第四章

级　数

内容提要

一、复数项级数

1. 复数列的极限

复数列极限与实数列极限的定义形式上相同，复数列$\{a_n\}=\{\alpha_n+i\beta_n\}(n=1,2,\cdots\cdots)$收敛于复数$a=\alpha+i\beta$的充要条件为

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha,\qquad \lim_{n\to\infty}\beta_n=\beta.$$

因此，复数列极限的性质也与实数列极限的性质相似，并且可将复数列极限的计算问题转化为实数列极限的计算问题.

2. 复数项级数

(1) 复数项级数敛散性与和的定义形式上也与实数项级数的相应概念相同.

(2) 复数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n(\alpha_n=a_n+ib_n)$收敛的充要条件是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$同时收敛；级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛(称之为绝对收敛准则)；$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 同时绝对收敛.

结论(2)与(3)将判定复数项级数敛散性问题转化为判定实数项级数的敛散性问题. 因此可以用实数项级数的各种收敛准则(例如，比值法与根值法等)来判定复数项级数的敛散性.

二、幂级数

1. 函数项级数与幂级数

设$\{f_n(z)\}$为定义在区域 D 内的复函数列

表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

称为复变函数项级数，

$$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots f_n(z)$$

称为级数部分和.

若 $z_0\in D$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z_0)=S(z_0)$ 存在，则称函数项级数在点 z_0 收敛. $S(z_0)$称为它的和. 如果级数在 D 内处处收敛，那么它的和一定是 z 的一个函数 $S(z)$

$$S(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

$S(z)$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 的和函数. 当

$$f_n(z)=c_{n-1}(z-a)^{n-1}$$

或

$$f_n(z)=c_{n-1}z^{n-1}$$

时，函数项级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

这种级数称为幂级数，其中 a 为定复数.

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 点收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛 —— 阿贝尔定理.

(2) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_1 \neq 0$ 点发散；则必在圆 $|z| > |z_1|$ 外发散.

(3) 任何幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 必出现且只出现以下三种情形之一：

①仅在 $z=0$ 收敛；

②在整个 z 平面收敛；

③存在 $R>0$，当 $|z|<R$ 时收敛，当 $|z|>R$ 时发散.

称 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛半径，$|z| = R$ 为收敛圆. 在①② 两种情形中，我们也称 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛半径为 0 和 ∞.

综上，我们有：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在收敛圆 $|z| = R$ 内不仅收敛而且绝对收敛，在收敛圆外发散，在收敛圆 $|z| = R$ 上则不一定.

2. 收敛半径的求法

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的和函数为 $f(z)$，其收敛半径为 R，我们有

(1) 比值法(D′Alembert)

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda\neq 0$，则 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

(2)根值法(Cauchy)

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\mathrm{e}\neq 0$，则 $R=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(3)柯西—阿达玛(Cauchy—Hadamard)定理

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\mathrm{e}\neq 0$，则 $R=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $\mathrm{e}=0$ 时，$R=\infty$；当 $\mathrm{e}=\infty$ 时，$R=0$.

(4) 设 b 是 $f(z)$ 的奇点中距离 a 最近的一个奇点，则

$|a-b|=R$ 即为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 的收敛半径.

3. 幂级数的运算性质

(1)代数运算性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2，令 $R=\min(R_1,R_2)$，则当 $|z|<R$ 时，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)z^n=\alpha\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\beta\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$（线性运算）

$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n)z^n$（乘积运算）

(2) 复合运算性质

设当 $|\zeta|<r$ 时，$f(\zeta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$，当 $|z|<R$ 时，$\zeta=g(z)$ 解析且 $|g(z)|<r$，则当 $|z|<R$ 时，$f[g(z)]=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n$.

(3) 分析运算性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 $R\neq 0$，则

① 它的和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 是收敛圆 $|z|<R$ 内的解析函数；

② 在收敛圆内可逐项求导，即

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n z^{n-1}$$
$$=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots,\ |z|<R;$$

③ 在收敛圆内可逐项积分，即

$$\int_0^z f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z a_n z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1},\ |z|<R.$$

其中，z 为收敛圆中任意一点.

三、泰勒(Taylor)级数

1. 泰勒展开定理

如果函数 $f(z)$ 在圆域 $|z-\alpha|<R$ 内解析，那么在此圆内 $f(z)$ 可以展开成幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$$

而且展开式是惟一的.

应该指出，如果 $f(z)$ 在点 α 解析，那么使 $f(z)$ 在 α 的泰勒展开式成立的圆域半径等于点 α 到 $f(z)$ 的奇点之间的最短距离. 此外幂级数的和函数在收敛圆周上至少有一个奇点. 函数 $f(z)$ 在点 α 解析等价于 $f(z)$ 在 α 的邻域内可以展开成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$.

2. 函数展开成泰勒级数的方法

直接法(直接用泰勒定理)与间接法. 所谓间接法就是根据函数的幂级数展开式的惟一性，利用一些已知函数的幂级数展开式[如 $\frac{1}{1-z}$，e^z，$\sin z$，$\cos z$，$\ln(1+z)$，$(1+z)^{\alpha}$(α 为复数)等函数的

幂级数展开式],通过对幂级数进行变量代换,四则运算和分析运算(逐项求导,逐项积分等),求出所给函数的幂级数展开式.

四、洛朗(Laurent)级数

1. 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$

双边幂级数的收敛域为圆环 $r<|z-\alpha|<R$,其内外半径 r 与 R 可分别由幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}(z-\alpha)^{-n}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ 的收敛半径来确定. 在收敛圆环内,双边幂级数具有与幂级数一样的运算和性质.

2. 洛朗展开定理

在圆环 $r<|z-\alpha|<R(r\geqslant 0,R\leqslant+\infty)$内解析的函数 $f(z)$必可展开成如下的双边幂级数(称为洛朗级数)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\mathrm{d}z(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

Γ 为圆环内绕 α 的任何一条正向简单闭曲线,并且展开式是惟一的.

3. 函数展开成洛朗级数的方法

洛朗级数是泰勒级数的推广. 圆环内解析函数展开成洛朗级数的一般方法并不是按照上面公式计算洛朗系数 c_n 进行,而主要是根据洛朗级数展开式的惟一性,利用已知的幂级数展开式去求所需要的洛朗展开式.

典型例题与解题技巧

【例 1】 考察下列级数是否收敛? 是否绝对收敛?

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-i)^{2n+1}}{n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^2}(1+2i)^n$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}$.

解题分析　此题考察级数收敛、发散、绝对收敛的判别方法.

解题过程　(1)由于 $\alpha_n=(1-\frac{1}{n^2})e^{i\frac{\pi}{n}}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)$，所以

$$a_n=(1-\frac{1}{n^2})\cos\frac{\pi}{n},\qquad b_n=(1-\frac{1}{n^2})\sin\frac{\pi}{n}$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1\neq 0$，故该级数发散.

(2)显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 但是，由于

$$\alpha_n=\frac{1+(-i)^{2n+1}}{n}=\frac{1-(-1)^n i}{n}$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛，故原级数必发散.

(3)由于很难分离出 $\alpha_n=\frac{n^2}{5^n}(1+2i)^n$ 的实部与虚部，故采用绝对收敛准则. 易见 $|\alpha_n|=n^2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n$，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<1$$

根据正项级数的根值法，故知原级数收敛，而且绝对收敛.

(4)由于 $|\alpha_n|=\left|\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}\right|=\frac{2^{n/2}}{2^{n/2}\operatorname{ch}n}=\frac{2}{e^n+e^{-n}}<\frac{2}{e^n}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{e^n}$ 是一收敛的等比级数，根据正项级数的比较准则，故知原级数绝对收敛.

【例 2】 设 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ 的收敛半径为 $R>0$,并且在收敛圆周上一点绝对收敛. 试证明这个级数对于所有的点 $z(|z|\leqslant R)$ 为绝对收敛.

分析 此题需分情况讨论.

证明 (1)当 $|z|<R$ 时,设 z_0 是圆周 $|z|=R$ 上一点, $|z_0|=R$, 且在 z_0 点 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ 绝对收敛,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|\cdot|z_0|^n$ 收敛.

由于 $|z|<R$,所以 $|z/z_0|<1$. 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|C_n z^n| &= \sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\cdot|z^n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\cdot|z_0|^n\cdot|z/z_0|^n \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\cdot|z_0|^n\end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\cdot|z_0|^n$ 收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n z^n|$ 收敛. 故得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ 绝对收敛.

(2) 当 $|z|=R$ 时,由于 $|z_0|=R$,故对于满足条件 $|z|=R$ 的点 z 而言,级数

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|C_n z^n| &= \sum_{n=0}^{\infty}|C_n||z|^n = \sum_{n=0}^{\infty}|C_n||R|^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|C_n||z_0|^n\end{aligned}$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}|C_n||z_0|^n$ 收敛. 所以 $\sum_{n=0}^{\infty}|C_n z^n|$ 收敛,从而 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n$ 绝对收敛.

【例 3】 设 m 为非负整数,试证对所有的 z,幂级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!\prod_{j=1}^{n}(m+j)}$$

的和函数 $w(z)$ 满足如下微分方程

$$z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+(1+m)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-w=0$$

分析 按题意,首先要验证所给幂级数的收敛半径 $R=+\infty$(以保证对所有的 z,和函数存在),其次证明对所有的 z,和函数 $w(z)$ 满足所给的方程. 而这一点只需要利用幂级数的逐项求导性以及幂级数的运算性质即可完成.

证明 由比值法可知所给幂级数的收敛半径 R 为

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\prod\limits_{j=1}^{n+1}(m+j)}{n!\prod\limits_{j=1}^{n}(m+j)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)(m+n+1)=+\infty$$

所以和函数 $w(z)$ 在 $|z|<+\infty$ 内解析,且

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!\prod\limits_{j=1}^{n}(m+j)}$$

$$=\frac{1}{m+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!\prod\limits_{j=1}^{n+1}(m+j)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!\prod\limits_{j=1}^{n+1}(m+j)}$$

于是由幂级数的运算易知,对所有 z(即 $|z|<+\infty$)

$$z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+(1+m)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-w$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^n}{n!\prod\limits_{j=1}^{n+1}(m+j)}+1+(1+m)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!\prod\limits_{j=1}^{n+1}(m+j)}$$

$$-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!\prod\limits_{j=1}^{n}(m+j)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(m+1)-(m+n+1)}{n!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)} z^n = 0$$

【例 4】　将下例函数在指定圆环内展成洛朗级数

(1) $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$，　$0<|z|<1$，　$1<|z|<+\infty$；

(2) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$，　$1<|z|<2$.

解题分析　**利用级数展开的基本方法.**

解题过程　(1)**当** $0<|z|<1$ **时**

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)} = \frac{z-1+2}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{2}{z-1}\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}\left(1-\frac{2}{1-z}\right) = \frac{1}{z^2}\left(1-2\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$$

当 $1<|z|<+\infty$**时**，$\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z^2}\left[1+\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right]$$

$$= \frac{1}{z^2}\left[1+\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{z^2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+3}}$$

(2) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{2}{z^2+1}$

当 $1<|z|<2$ **时**

$$\left|\frac{1}{z}\right|<1 \qquad \text{且} \qquad \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

$$\therefore \frac{1}{z-2} = -\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z^2+1}=\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+2}}$$

$$\therefore\ \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{2n+2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

【例 5】 求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{i})^{n-1}\frac{(2n-1)}{2^n}z^{2n-1}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n(z-1)^{n(n+1)}$.

解题分析 本题有 $a_n=0$ 的情形，不能套用公式

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{或} \quad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

但仍可用比值收敛法或根值收敛法求收敛半径.

解题过程 (1) 记 $f_n(z)=(1-\mathrm{i})^{n-1}\frac{(2n-1)}{2^n}z^{2n-1}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\,\frac{(2n+1)2^n\,|z|^{2n+1}}{(2n-1)2^{n+1}\,|z|^{2n-1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}|z|^2$$

当 $\frac{1}{\sqrt{2}}|z|^2<1$ 即 $|z|<\sqrt[4]{2}$ 时，幂级数绝对收敛；当 $\frac{\sqrt{2}}{2}|z|^2>1$ 即 $|z|>\sqrt[4]{2}$ 时，幂级数发散. 故该幂级数的收敛半径为 $R=\sqrt[4]{2}$.

(2) 记 $f_n(z)=\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n(z-1)^{n(n+1)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(z-1)^{n(n+1)}}{n^n}\right|}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{|z-1|^{n+1}}{n}$$

$$=\begin{cases}0, \text{若 } |z-1|\leqslant 1\\ \infty, \text{若 } |z-1|>1\end{cases}$$

所以，当且仅当 $|z-1|\leqslant 1$ 时幂数级数绝对收敛. 故该幂级数的收敛半径 $R=1$.

历年考研真题评析

【题 1】　求洛朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 4^{-|n|}(z-1)^n$ 的收敛域.（东北大学 2005 年）.

解题分析　先把该洛朗级数分为两部分，再求收敛域的交集.

解题过程　$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 4^{-|n|}(z-1)^n$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{4(z-1)}\right]^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{4}\right)^n$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{4(z-1)}\right]^n$ 的收敛域为

$$\left|\frac{\left[\frac{1}{4(z-1)}\right]^{n+1}}{\left[\frac{1}{4(z-1)}\right]^n}\right|<1$$

即
$$|z-1|>\frac{1}{4}$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{4}\right)^n$ 的收敛域为

$$\left|\frac{\left(\frac{z-1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{z-1}{4}\right)^n}\right|<1$$

即
$$|z-1|>4$$

故原级数收敛域为 $\frac{1}{4}<|z-1|<4$.

【题 2】　将 $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}(|b|>|a|>0)$ 按下例指定区域 G 展成洛朗级数.（上海交大 2006 年）

(1)G:$0<|a|<|z|<|b|$;　　(2)G:$|z|>|b|$.

解题分析　此题仍是基本方法的考查.

解题过程　$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z-a}\right)$$

(1)当 $0<|a|<|z|<|b|$ 时,$\left|\frac{a}{z}\right|<1$,$\left|\frac{z}{b}\right|<1$.

所以
$$\begin{aligned}&\frac{1}{(z-a)(z-b)}\\&=\frac{1}{b-a}\left(-\frac{1}{b}\frac{1}{1-\frac{z}{b}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right)\\&=\frac{1}{b-a}\left[-\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\right]\\&=\frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

(2)当 $|z|>|b|$ 时,$\left|\frac{b}{z}\right|<1$,$\left|\frac{a}{z}\right|<1$

所以
$$\begin{aligned}&\frac{1}{(z-a)(z-b)}\\&=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{b}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right)\\&=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\right]\\&=\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{z^{n+1}}\end{aligned}$$

【题 3】　$f(z)=\frac{1}{z^2-2z+2}$ 在 $z=0$ 解析,可展成 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kz^k$,求 C_k 及收敛半径.(北京大学 2006 年)

解题分析　级数展开的考查.

解题过程　
$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{z^2-2z+2}\\&=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-(1+i)}-\frac{1}{z-(1-i)}\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{1-i}}-\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{1+i}}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^{n}-\frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+\mathrm{i}}\right)^{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i)^{\mathrm{n}+1}}\right]z^{\mathrm{n}}$$

$$=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{2^{\frac{n+1}{2}}}z^{n}$$

故　$$C_k=\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{4}}{2^{\frac{k+1}{2}}},k=0,1,2\cdots$$

又 $\overline{\lim\limits_{\mathrm{k}\to\infty}}\sqrt[k]{|C_k|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$**,故收敛半径为** $R=\sqrt{2}$.

【题 4】　(1) **求函数** $\frac{z^3+2z-1}{z^2-4}$ **分别在区域** $0<|z+2|<4$ **及** $|z-2|>4$ **的洛朗级数展开式;**

(2) **求函数** $\frac{\ln z}{1-z^2}$ **在** $0<|z-1|<1$ **的洛朗级数展开式.**

(**浙江大学** 2005 **年**)

解题分析　**洛朗级数展开的考查.**

解题过程　(1) $\frac{z^3+2z-1}{z^2-4}=z+\frac{13}{4(z+2)}+\frac{11}{4(z-2)}$

①**在区域** $0<|z+2|<4$ **内**,$0<\frac{|z+2|}{4}<1$,

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{4}\right)^{k},$$

所以

$$\frac{z^3+2z-1}{z^2-4}=z+\frac{13}{4(z+2)}-\frac{11}{4^2}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{z}+2}{4}\right)^{\mathrm{k}}$$

$$=\frac{13}{4(z+2)}-\frac{43}{4^2}+\frac{53(z+2)}{4^3}$$

$$-\frac{11(z+2)^2}{4^4}\left[1+\frac{z+2}{4}+\frac{(z+2)^2}{4^2}+\cdots\right]$$

②**在区域** $|z-2|>4$ **内**，$\left|\frac{4}{z-2}\right|<1$，

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z-2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{z-2}\right)^k$$

所以 $\frac{z^3+2z-1}{z^2-4}=z+\frac{13}{4(z-2)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{z-2}\right)^k+\frac{11}{4(z-2)}$

$$=(z-2)+2+\frac{6}{z-2}-$$

$$\frac{13}{(z-2)^2}\left[1-\frac{4}{z-2}+\frac{4^2}{(z-2)^2}-\cdots\right]$$

(2) $\frac{\ln z}{1-z^2}=\frac{1}{2}\ln z\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1}\right)$

$$\ln z=\int_1^z\frac{1}{z}\mathrm{d}z=\int_1^z\frac{1}{1+(z-1)}\mathrm{d}z$$

$$=\int_1^z\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z-1)^k\mathrm{d}z$$

$$=(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\cdots\quad\frac{1}{z+1}$$

$$=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-1}{2}\right)^k$$

所以 $\frac{\ln z}{1-z^2}=\frac{1}{2}\left[(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\cdots\right]\cdot$

$$\left[-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}-\frac{z-1}{2^2}+\frac{(z-1)^2}{2^3}-\frac{(z-1)^3}{2^4}-\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-1+(z-1)-\frac{5}{6}(z-1)^2+\frac{2}{3}(z-1)^3+\cdots\right]$$

【题 5】 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，证明：如果对某一点 $z_0 \in D$ 有 $f^{(n)}(z_0)=0 \quad (n=1,2,\cdots)$，那么 $f(z)$ 在 D 内为常数.（东北大学 2005 年）

分析 利用解析及 Taylor 定理解题.

证明 $f(z)$ 在 z_0 点解析，由定义，$\exists z_0$ 的某个邻域 D，使 $f(z)$ 在 D 上处处解析.

由邻域的性质，$\exists \delta>0$，使 $U_\delta(z_0)=\{z:|z-z_0|<\delta\}\subset D$，故 $f(z)$ 在

$U_\delta(z_0)$ 内解析. 从而由 Taylor 定理有

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

因为　$f^{(k)}(z_0)=0(k=1,2,\cdots)$

所以　$f(z)=f(z_0)$，命题得证.

课后习题全解

◎ 1. 下列数列 $\{\alpha_n\}$ 是否收敛？如果收敛，求出它们的极限：

1) $\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}$；　　2) $\alpha_n=\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{-n}$；

3) $\alpha_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$；　　4) $\alpha_n=\mathrm{e}^{-n\pi i/2}$；

5) $\alpha_n=\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi i/2}$.

分析　充分掌握数列收敛的充分条件，以及发散的充分条件.

解　1) $\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}=\dfrac{(1+ni)^2}{1+n^2}=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}+\dfrac{2n}{1+n^2}i=a_n+b_ni$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{1+n^2}=-1,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1+n^2}=0$$

所以 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 -1.

2) 令 $x=1,y=\dfrac{1}{2},\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$，则

$$r=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$1+\frac{i}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+i\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\frac{\sqrt{5}}{2}e^{i\varphi}$$

$$\alpha_n=\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-n}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}e^{-in\varphi}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)$$

因为 $\left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|<1,\quad |\cos n\varphi|\leqslant 1,\quad |\sin n\varphi|\leqslant 1$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n\cos n\varphi=0$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n\sin n\varphi=0$$

所以 $\{\alpha_n\}$ **收敛于** 0.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ **不存在**, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

根据数列收敛的充要条件知 $\{\alpha_n\}$ **发散.**

4) $\alpha_n=e^{-\frac{n\pi i}{2}}=\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)=\cos\frac{n\pi}{2}-i\sin\frac{n\pi}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{n\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$ **均不存在,根据数列收敛的充要条件知** $\{\alpha_n\}$ **发散.**

5) $\alpha_n=\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi i}{2}}$

$$=\frac{1}{n}\left[\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

因为 $\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant 1,\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant 1,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$

根据数列收敛的充要条件知 $\{\alpha_n\}$ **收敛于** 0.

○ 2. **证明：**

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\begin{cases}0, & |\alpha|<1,\\ \infty, & |\alpha|>1,\\ 1, & \alpha=1,\\ \text{不存在}, & |\alpha|=1,\alpha\neq 1\end{cases}$$

证明　**令**　$\alpha=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

1) $|\alpha|<1$，**即** $r<1$

$$\alpha^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

所以　$0\leqslant|\alpha^n|\leqslant r^n(|\cos n\theta|+|i\sin n\theta|)\leqslant 2r^n$

$$\lim_{n\to\infty}r^n=0(r<1)$$

所以由两边夹法则，$\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha^n|=0$，**于是**

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$$

2) $|\alpha|>1$，**即** $r>1$

$$\alpha^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty(r>1)$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha^n|=\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n=\infty$

3) $\alpha=1\Rightarrow r=1$，**即**

$$\alpha=\cos 0+i\sin 0$$

所以　$\alpha^n=\cos 0n+i\sin 0n=\cos 0=1$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n=1$

4) $|\alpha|=1$，**但** $\alpha\neq 1$，**即**

$$r=1\quad \alpha=\cos\theta+i\sin\theta(\theta\neq 0)$$

所以　$\alpha^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\theta$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\theta$ **均不存在，根据数列收敛的充要条件知** $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n$ **不存在.**

◎ 3. **判别下列级数的绝对收敛性与收敛性：**

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$；　2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$；　3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(6+5i)^n}{8^n}$；　4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos in}{2^n}$.

分析 主要是对收敛和绝对收敛概念的考查严格把握定义即可.

解 1) $z_n=\dfrac{i^n}{n}=\dfrac{1}{n}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^n$

$$=\frac{1}{n}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+i\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}(-1)^k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot(-1)^k$$

以上两级数均为收敛的交错级数,所以原级数收敛.

又
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

为调和级数,发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$ 为条件收敛.

2) 令 $z_n=\dfrac{i^n}{\ln n}=\dfrac{1}{\ln n}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^n$

$$=\frac{1}{\ln n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\cos\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k)}\cdot(-1)^k$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k+1)}\cdot(-1)^k$$

以上两级数均为收敛的交错级数,所以原级数收敛.

又
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{i^n}{\ln n}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$$

$\ln n=\ln(1+n-1)<n-1\,(n-1>0)$

所以
$$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n-1}$$

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ 为调和级数,发散.

由比较判别法知：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$发散.

所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$条件收敛.

3）令　　$z_n=\dfrac{(6+5i)^n}{8^n}$

因为 $6+5i=\sqrt{61}(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{5}{6}$

所以 $z_n=\left(\dfrac{\sqrt{61}}{8}\right)^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

又因为$|z_n|=\left(\dfrac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$　且$\left|\dfrac{\sqrt{61}}{8}\right|<1$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|z_n|$收敛.

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(6+5i)^n}{8^n}$绝对收敛，因而也收敛.

4）令 $z_n=\dfrac{\cos in}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}\dfrac{e^n+e^{-n}}{2}=\dfrac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2e}\right)^n$$

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e}{2}\right)^n$发散，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2e}\right)^n$收敛.

所以原级数发散.

◎4. 下列说法是否正确？为什么？

1）每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛；

2）每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点；

3）每一个在 z_0 连续的函数一定可以在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数.

分析　主要是举反例，掌握收敛概念，并熟悉一些特殊函数和点.

解　1）不正确.

在收敛圆内的点处处收敛，而收敛圆周上的点可能收敛，也可能发散.

例如，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛圆为 $|z-1|=1$，在收敛圆 $|z-1|=1$ 上不一定收敛. 当 $z=0$ 时，原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，收敛；当 $z=2$ 时，原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散.

2）不正确.

和函数在收敛圆内处处解析.

3）不正确.

每一个在 z_0 解析的函数才一定可以在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数.

例如，$f(z)=\bar{z}$ 在 z_0 连续，但不可导，故不能在 z_0 点展开成泰勒级数.

○5. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛而在 $z=3$ 发散？

解 不能.

令 $z-2=y$

$\Rightarrow$ 因为 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n y^n$ 在 $z=0$ 收敛，所以在 $y=-2$ 处收敛，

由阿贝尔定理知 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n y^n$ 在 $|y|<2$ 内均绝对收敛.

当 $z=3$ 时，因为 $z-2=y=1$，所以 $|y|<2$.

所以在 $z=3$ 处一定绝对收敛.

○ 6. 求下列幂级数的收敛半径：

1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$（$p$ 为正整数）；　　2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}z^n$；

3）$\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$；　　4）$\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^n$；

5）$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}\left(\frac{i}{n}\right)(z-1)^n$；　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\mathrm{Ln}\,in}\right)^n$.

解 1）$c_n=\frac{1}{n^p}$

所以 $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p}$

所以收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda} = 1.$

2) $c_n = \dfrac{(n!)^2}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n!)^2}{(n+1)^n(n+1)}\cdot\frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \infty,\left(\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\right)$$

所以收敛半径 $R = 0.$

3) $$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$c_n = (1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{\frac{n\pi}{4}i}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2})^n} = \sqrt{2}$$

所以收敛半径 $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

4) $c_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$，$|c_n| = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = 1$

所以收敛半径 $R = 1.$

5) $c_n = \operatorname{ch}\left(\dfrac{i}{n}\right) = \dfrac{e^{\frac{i}{n}}+e^{-\frac{i}{n}}}{2}$

$$= \frac{\cos\dfrac{1}{n}+i\sin\dfrac{1}{n}+\cos\left(-\dfrac{1}{n}\right)+i\sin\left(-\dfrac{1}{n}\right)}{2}$$

$$= \cos\frac{1}{n}$$

$$|c_n|=\left|\cos\frac{1}{n}\right|$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n}}\right|=\frac{1}{1}=1$$

所以收敛半径 $R=1$.

6) $\mathrm{Ln}in=\ln|in|+i(\mathrm{Arg}in)=\ln n+\frac{\pi}{2}i$

所以 $$|\mathrm{Ln}in|=\left(\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

所以 $$|c_n|=\frac{1}{|\mathrm{Ln}in|^n}=\left(\frac{1}{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right)^{\frac{n}{2}},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=0.$$

所以收敛半径 $R=\infty$.

◎ 7. 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 R，证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}c_n)z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$. [提示 $|(\mathrm{Re}c_n)z^n|<|c_n||z|^n$]

分析 用提示公式即可证明.

证明 $|(\mathrm{Re}c_n)z^n|=|(\mathrm{Re}c_n)||z^n|\leqslant|c_n||z|^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|(\mathrm{Re}c_n)z^n|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|$$

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 R，即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $(-R,R)$ 内绝对收敛，由上式知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}c_n)z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$.

◎8. 证明：如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在 $(\neq\infty)$，则下列三个幂级数有相同的收

敛半径：$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$；$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$；$\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$.

分析　主要是收敛半径的计算方法，分别算出比较即可.

证明　1）$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$　因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ 存在，设 $\lambda_1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$.

2）$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$

因为 $\lambda_2 \triangleq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda_1$，所以 $\lambda_1 = \lambda_2$.

3）$\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$

因为 $\lambda_3 \triangleq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)c_{n+1}}{nc_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda_1$，所以 $\lambda_3 = \lambda_1$.

所以由 1）、2）和 3）知：$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

综合可得，当 $\lambda_1 \neq 0$ 时，$R_1 = \frac{1}{\lambda_1} = R_2 = \frac{1}{\lambda_2} = R_3 = \frac{1}{\lambda_3}$

当 $\lambda_1 = 0$ 时，$R_1 = R_2 = R_3 = +\infty$

即三个幂级数有相同的收敛半径.

◎ 9. 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛，而 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ 发散，证明 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 1.

分析　用反证法.

证明　已知 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z=1$ 处收敛，由阿贝尔定理，对 $|z|<1$ 的 z，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 必绝对收敛，从而 $R \geqslant 1$.

以下证明 $R>1$ 不对. 反设 $R>1$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在收敛圆 $|z|<R$ 内绝对收敛，特别地在 $z=1(|z|<R)$ 处也绝对收敛，即 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ 收敛，与题设矛盾，只有 $R=1$，得证.

○10. 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在它的收敛圆的圆周上一点 z_0 处绝对收敛，证明它在收敛圆所围着闭区域上绝对收敛.

证明 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 的收敛半径为 R，z_0 是收敛圆的圆周上的一点，且级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 z_0 点处绝对收敛. $\forall z \in \{z \mid |z| \leqslant R\}$，有

$$|C_n z^n| = |C_n||z|^n \leqslant |C_n||z_0|^n = |C_n z_0^n|$$

$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n z_0^n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n z^n|$ 收敛. 得证.

○ 11. 把下列各函数展开成 z 的幂级数，并指出它们的收敛半径：

1) $\dfrac{1}{1+z^3}$；　2) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$；　3) $\cos z^2$；　4) $\operatorname{sh} z$；

5) $\operatorname{ch} z$；　6) $e^{z^2}\sin z^2$；　7) $e^{\frac{z}{z-1}}$；　8) $\sin\dfrac{1}{1-z}$，

[提示

$$\sin\frac{1}{1-z} = \sin\left(1+\frac{z}{1-z}\right) = \sin 1\cos\left(\frac{z}{1-z}\right) + \cos 1\sin\left(\frac{z}{1-z}\right)]$$

解 1) 已知 $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots,(|z| < 1)$

上式中的 z 用 z^3 置换：

$$\frac{1}{1+z^3} = 1 - z^3 + z^6 - \cdots + (-1)^n z^{3n} - \cdots, \qquad |z^3| < 1$$

$|z^3| < 1 \Rightarrow |z| < 1$

收敛半径 $R = 1$.

2) 已知 $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$，$|z| < 1$

上式中的 z 用 z^2 置换：

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^{2n} - \cdots, \qquad |z^2| < 1$$

$|z^2|<1 \Rightarrow |z|<1$

又$\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)' = \dfrac{-2z}{(1+z^2)^2}$

所以$\dfrac{1}{(1+z^2)^2} = -\dfrac{1}{2z}\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)'$

$$= -\frac{1}{2z}(1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^{2n} - \cdots)'$$

$$= 1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + \cdots, \qquad |z|<1$$

收敛半径 $R = 1$.

3）已知 $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \cdots, \ |z|<+\infty$

上式中的 z 用 z^2 置换：

$$\cos z^2 = 1 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{12}}{6!} + \cdots, \ |z^2|<+\infty$$

$|z^2|<+\infty \Rightarrow |z|<+\infty$

收敛半径 $R = +\infty$.

4）$\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \ |z|<+\infty$$

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots, \ |z|<+\infty$$

$\operatorname{sh} z$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) - \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)\right]$$

$$= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots, \ |z|<+\infty$$

收敛半径 $R = +\infty$.

5）与上题推导类似：

$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\operatorname{ch} z$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)+\left(1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)\right]$$

$$=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots,\ |z|<+\infty$$

收敛半径 $R=+\infty$.

6) $$e^{z^2}=1+z^2+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\cdots,\ |z|<+\infty$$

$$\sin z^2=z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\cdots,\ |z|<+\infty$$

$$\Rightarrow e^2\sin z^2=\left(1+z^2+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\cdots\right)\times\left(z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\cdots\right)$$

$$=z^2+z^4+\frac{z^6}{3}+\cdots,\ |z|<+\infty$$

收敛半径 $R=+\infty$.

7) **因为** $$\frac{z}{z-1}=-\frac{z}{1-z}=-z+z^2+z^3+\cdots$$

$$=-z\sum_{n=0}^{\infty}z^n=-\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1},\ |z|<1$$

所以 $$e^{\frac{z}{z-1}}=e^{-z+z^2+z^3+\cdots}$$

$$=1-(z+z^2+z^3+\cdots)+\frac{1}{2!}(z+z^2+z^3+\cdots)^2$$

$$-\frac{1}{3!}z+z^2+z^3+\cdots^3\cdots$$

$$=1-z-\frac{1}{2!}z^2-\frac{1}{3!}z^3+\cdots,\ |z|<1$$

收敛半径 $R=1$.

8) $$\sin\frac{1}{1-z}=\sin\left(1+\frac{z}{1-z}\right)$$

$$=\sin1\cos\frac{z}{1-z}+\cos1\sin\frac{z}{1-z}$$

因为 $$\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1},\ |z|<1$$

所以 $$\sin\frac{z}{1-z}=(z+z^2+z^3+\cdots)-\frac{1}{3!}(z+z^2+z^3+\cdots)^3$$

$$+\frac{1}{5!}(z+z^2+z^3+\cdots)^5-\cdots$$

$$=z+z^2+\frac{5}{6}z^3+\cdots,\ |z|<1$$

$$\cos\frac{z}{1-z}=1-\frac{1}{2!}(z+z^2+z^3+\cdots)^2$$

$$+\frac{1}{4!}(z+z^2+z^3+\cdots)^4$$

$$-\cdots=1-\frac{1}{2}z^2-z^3+\cdots,\ |z|<1$$

所以 $\sin\frac{1}{1-z}=\sin1\left(1-\frac{1}{2}z^2-z^3+\cdots\right)$

$$+\cos1\left(z+z^2+\frac{5}{6}z^3+\cdots\right)$$

$$=\sin1+\cos1\cdot z+\left(\cos1-\frac{1}{2}\sin1\right)z^2$$

$$+\left(\frac{5}{6}\cos1-\sin1\right)z^3+\cdots,\ |z|<1$$

收敛半径 $R=1$.

◎12. **求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式，并指出它们的收敛半径：**

1) $\frac{z-1}{z+1}, z_0=1$；　　2) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=2$；

3) $\frac{1}{z^2}, z_0=-1$；　　4) $\frac{1}{4-3z}, z_0=1+i$；

5) $\mathrm{tg}z, z_0=\frac{\pi}{4}$；　　6) $\mathrm{arctg}z, z_0=0$.

分析　**这几题都是较为基本的题型，思路的疗法都一样，唯一要注题的就是计算技巧.**

解　1) $\frac{z-1}{z+1}=(z-1)\frac{1}{(z-1+2)}=\frac{z-1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots,\ |z|<1$$

上式两边的 z 用 $\left(\dfrac{z-1}{2}\right)$ 置换：

$$\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}}=1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\cdots$$

$$\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$$

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{z-1}{2}$$

$$\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1}+\cdots\right]$$

$$=\frac{z-1}{2}-\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(z-1)^n,$$

$$\left|\frac{z-1}{2}\right|<1\Rightarrow|z-1|<2$$

收敛半径 $R=2$.

2) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{z+2}-\dfrac{2}{z+1}\right)=\dfrac{2}{z+2}-\dfrac{1}{z+1}$

因为 $\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{4+(z-2)}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\dfrac{z-2}{4}}$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{z-2}{4}+\left(\frac{z-2}{4}\right)^2-\cdots\right],$$

$$\left(\left|\frac{z-2}{4}\right|<1\right)$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{3+z-2}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-2}{3}+\left(\frac{z-2}{3}\right)^2-\cdots\right],$$

$$\left|\frac{z-2}{3}\right|<1$$

所以

$$\text{原式}=\frac{2}{4}\left(1-\frac{z-2}{2^2}+\frac{1}{2^{2\cdot 2}}(z-2)^2+\cdots\right)$$
$$-\frac{1}{3}\left(1-\frac{z-2}{3}+\frac{(z-2)^2}{3^2}-\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{2n}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{3^n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}(z-2)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n$$

$\left|\frac{z-2}{4}\right|<1$ 且 $\left|\frac{z-2}{3}\right|<1\Rightarrow|z-2|<3$

收敛半径 $R=3$.

3) $\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}$

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{1-(z+1)}$$
$$=-[1+(z+1)+(z+1)^2+\cdots],\qquad |z+1|<1$$

上式两边求导：

$$\left(\frac{1}{z}\right)'=-[1+2(z+1)+3(z+1)^2+\cdots$$
$$+n(z+1)^{n-1}+\cdots]\quad(|z+1|<1),$$

所以 $\quad\frac{1}{z^2}=1+2(z+1)+\cdots+n(z+1)^{n-1}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n,\ |z+1|<1,$$

收敛半径 $R=1$.

4) $\frac{1}{4-3z}=\frac{1}{4-3[z-(1+i)]-3-3i}$

$$= \frac{1}{(1-3i)-3[z-(1+i)]}$$

$$= \frac{1}{1-3i} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{3}{1-3i}[z-(1+i)]}$$

$$= \frac{1}{1-3i}\left\{1+\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{1-3i}\right)^2[z-(1+i)]^2+\cdots\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1+i)]^n$$

$$\left|\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]\right|<1$$

$$\Rightarrow |z-(1+i)|<\frac{|1-3i|}{3}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

收敛半径 $R=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

(5) **令** $f(z)=\mathrm{tg}z,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4}=1$,

$(\mathrm{tg}z)'=\sec^2 z,(\mathrm{tg}z)'\Big|_{\frac{\pi}{4}}=2$,

$(\mathrm{tg}z)''=2\sec^2 z\mathrm{tg}z,(\mathrm{tg}z)''\Big|_{\frac{\pi}{4}}=4$,

$(\mathrm{tg}z)'''=2(2\sec^2 z\mathrm{tg}^2 z+\sec^4 z),(\mathrm{tg}z)'''\Big|_{\frac{\pi}{4}}=2(4+4)=16\cdots$

由 $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ **得** $c_0=1,c_1=\dfrac{2}{1!},c_2=\dfrac{4}{2!}=2$,

$c_3=\dfrac{16}{3!}=\dfrac{8}{3},\cdots$

所以 $\mathrm{tg}z=1+2\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)^2$

$$+\frac{8}{3}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots,\ |z|<\frac{\pi}{4}$$

收敛半径 $R=\frac{\pi}{4}$.

6）因为 $$(\operatorname{arctg}z)'=\frac{1}{1+z^2}$$

又 $\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+\cdots$，$|z^2|<1$ 即 $|z|<1$

所以 $$\operatorname{arctg}z=\int_0^z\frac{dz}{1+z^2}=\int_0^z(1-z^2+z^4-z^6+\cdots)dz$$

$$=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}$$

$|z|<1$，收敛半径 $R=1$.

◎ 13. 为什么在区域 $|z|<R$ 内解析且在区间 $(-R,R)$ 取实数值的函数 $f(z)$ 展开成 z 的幂级数时，展开的系数都是实数？

分析　主要是泰勒级数的性质的应用.

解　由解析函数展开为泰勒级数的惟一性得：$f(z)$ 在 $|z|<R$ 内的展开式应与 $f(x)$ 在 $|x|<R$ 内展开式一致. $f(x)$ 在 $|x|<R$ 内展开式的系数是实数.

于是，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的展开式的系数 $C_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，$C_n$ 均为实数.

◎14. 证明 $f(z)=\cos\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 以 z 的各次幂表出的洛朗展开式中各系数为 $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta\, d\theta$，$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

[提示　在对应教材公式(4.4.8)中，取 C 为 $|z|=1$，在此圆上设积分变量 $\zeta=e^{i\theta}$，然后证明：c_n 的积分的虚部等于零.]

分析　本题对计算技巧和几个常用公式要求较多，有一定难度.

证明 $$f(z)=\cos\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$ （令 $\xi=e^{i\theta}$，$d\xi=ie^{i\theta}d\theta$，$\theta:0\to2\pi$，$z_0=0$）

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{(e^{i\theta})^{n+1}} i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\cos\theta)}{e^{in\theta}} i d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta)[\cos n\theta - i\sin n\theta] d\theta$$

其虚部为：$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta$

令 $g(\theta) = \cos(2\cos\theta)\sin n\theta$

由于
$$\cos[2\cos(\theta+2\pi)] = \cos(2\cos\theta)$$
$$\sin n(\theta+2\pi) = \sin(n\theta+2n\pi) = \sin n\theta$$

所以 $g(\theta+2\pi) = \cos[2\cos(\theta+2\pi)]\sin n(\theta+2\pi)$

$= \cos(2\cos\theta)\sin n\theta = g(\theta)$，以 2π 为周期

又 $g(-\theta) = \cos[2\cos(-\theta)]\sin n(-\theta)$

$= \cos(2\cos\theta)(-\sin n\theta)$

$= -\cos(2\cos\theta)\cdot\sin n\theta = -g(\theta)$

$g(\theta)$ 为奇函数，

于是虚部 $= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)d\theta = 0$

故 $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$，　$(n = 0, \pm 1, \cdots)$

○ 15. 下列结论是否正确？

用长除法得
$$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots$$
$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$$

因为
$$\frac{z}{1-z} + \frac{z}{z-1} = 0$$

所以 $\cdots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots = 0$

解　不正确.

$$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \cdots,\ |z| < 1$$
$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots,\ |z| > 1$$

用长除法所得到的两式的取值范围的交集为空集，故不能相加.

◎ 16. 把下列各函数在指定的圆环域内展开成洛朗级数：

1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}, 1<|z|<2$;

2) $\dfrac{1}{z(1-z)^2}, 0<|z|<1; 0<|z-1|<1$;

3) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}, 0<|z-1|<1; 1<|z-2|<+\infty$;

4) $e^{\frac{1}{1-z}}, 1<|z|<+\infty$;

5) $\dfrac{1}{z^2(z-i)}$ 在以 i 为中心的圆环域内；

6) $\sin\dfrac{1}{1-z}$，在 $z=1$ 的去心邻域内；

7) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}, 3<|z|<4; 4<|z|<+\infty$.

分析　注意计算的技巧.

解　1) 先用待定系数法将上式拆开：

令 $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}=\dfrac{a}{z+i}+\dfrac{b}{z-i}+\dfrac{c}{z-2}$

则 $1=a(z-i)(z-2)+b(z+i)(z-2)+c(z^2+1)$

上式恒成立. z 取一些特殊值，可分别得 a,b,c.

令 $z=i\Rightarrow 1=2i\cdot b(i-2)\Rightarrow b=\dfrac{1}{2i(i-2)}=\dfrac{-1+2i}{10}$;

$z=2\Rightarrow 1=5c\Rightarrow c=\dfrac{1}{5}$;

$z=-i\Rightarrow 1=-2i(-i-2)a\Rightarrow a$

$=\dfrac{1}{2i(i+2)}=\dfrac{-1-2i}{10}$;

于是 $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$

$$=\frac{-1-2i}{10}\frac{1}{(z+i)}+\frac{-1+2i}{10}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{5}\frac{1}{z-2}$$

$$= \frac{-1-2i}{10}\frac{1}{z\left(1+\dfrac{i}{z}\right)} + \frac{-1+2i}{10}\frac{1}{z\left(1-\dfrac{i}{z}\right)} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$$

$$= \frac{-1-2i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{z^{n+1}} + \frac{-1+2i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}} + \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}} - \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\cdots + \frac{2}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} - \cdots\right) \quad 1 < |z| < 2$$

2)① $0 < |z| < 1$

$$\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{z}\frac{1}{(1-z)^2}$$

因为 $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots,\ |z| < 1$

所以

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = -\frac{-1}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$$

所以

$$\frac{1}{z(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z}nz^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-2} = \sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n \quad 0 < |z| < 1$$

② $0 < |z-1| < 1$

$$\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}\cdot\frac{1}{z}$$

因为

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z| < 1$$

所以 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+z-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\quad |z-1|<1$

所以 $\dfrac{1}{z(1-z)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-2}(z-1)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\qquad 0<|z-1|<1$$

3)① $0<|z-1|<1$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)-1}$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

② $1<|z-2|<+\infty$

则 $\left|\dfrac{1}{z-2}\right|<1$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{1+(z-2)}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+2}}$$

4)因为 $1<|z|<+\infty$，所以 $\dfrac{1}{|z|}<1$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$$e^{\frac{1}{1-z}}=1-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^2$$

$$-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^3+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\cdots$$

5)① $0<|z-i|<1$

$$\frac{1}{z^2(z-i)}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z-i}\,\frac{1}{(z-\mathrm{i}+\mathrm{i})^2}$$

$$=\frac{1}{z-i}\,\frac{1}{i^2\left[1+\frac{(z-i)}{i}\right]^2}=\frac{-1}{z-i}\,\frac{1}{[1-i(z-i)]^2}$$

因为 $$\frac{1}{(1-\xi)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\xi^{n-1},\ |\xi|<1$$

所以 $|i(z-i)|<1$ **即** $|z-i|<1$

$$\frac{1}{[1-i(z-i)]^2}=\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n-1}(z-i)^{n-1}$$

所以 $$\frac{1}{z^2(z-i)}=-\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n-1}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot i^2\cdot i^{n-1}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n+1}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{i^{n+1}\cdot i^{n+1}}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{i^{2(n+1)}}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{(i^2)^{n+1}}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(z-i)^{n-2}}{i^{n+1}},\qquad 0<|z-i|<1$$

② $1<|z-i|<+\infty$

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i}+\mathrm{i})^2}=\frac{1}{(z-i)^2}\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{z-i}\right)^2}$$

因为 $\dfrac{1}{1+\xi}=1-\xi+\xi^2-\xi^3+\cdots,\ |\xi|<1$

所以 $\left(\dfrac{1}{1+\xi}\right)'=-\dfrac{1}{(1+\xi)^2}=-(-1+2\xi-3\xi^2+\cdots)$

所以 $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{z-i}\right)^2}=1-2\left(\dfrac{i}{z-i}\right)+3\left(\dfrac{i}{z-i}\right)^2$

$$-4\left(^2\frac{i}{z-i}\right)^3+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{i}{z-i}\right)^{n-1}$$

所以 $\dfrac{1}{z^2(z-i)}=\dfrac{1}{(z-i)^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{i}{z-i}\right)^{n-1}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\frac{i^{n-1}}{(z-i)^{n+2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)i^n}{(z-i)^{n+3}},1<|z-i|<+\infty$$

6）**在** $0<|z-1|<+\infty$

因为　　$\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\cdots,\ |z|<+\infty$

所以 $\sin\dfrac{1}{1-z}=-\sin\dfrac{1}{z-1}$

$$=-\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\cdots\right]$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$$

$$0<|z-1|<+\infty$$

7）①　$3<|z|<4$

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1-\frac{6}{4-z}-\frac{2}{z-3}$$

$$= 1 - \frac{6}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{4}} - \frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n - \frac{2}{z}\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}z^n - 2\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}$$

$$3 < | z | < 4$$

② $4 < | z | < +\infty$

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} = 1 - \frac{6}{4-z} - \frac{2}{z-3} = 1 + \frac{6}{z-4} - \frac{2}{z-3}$$

$$= 1 + \frac{6}{z}\frac{1}{1-\frac{4}{z}} - \frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$

$$= 1 + \frac{6}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n - \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(3 \cdot 2^{2n-1} - 2 \cdot 3^{n-1})z^{-n},$$

$$4 < | z | < +\infty$$

○17. 函数 $\operatorname{tg}\frac{1}{z}$ **能否在圆环域** $0 < | z | < R(0 < R < +\infty)$ **内展开成洛朗级数?为什么?**

解 $f(z) = \operatorname{tg}\frac{1}{z}$

令 $$z_k = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}, k = 0, \pm 1, \cdots$$

有 $\operatorname{tg}\frac{1}{z_k} = \infty$

所以 $z_k = \dfrac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$ **是** $f(z) = \operatorname{tg}\frac{1}{z}$ **的奇点.**

又因为 $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$**,所以** $\{z_k\}$ **以** $z = 0$ **为极限,即** $f(z) = \operatorname{tg}\frac{1}{z}$

在 $z=0$ 处的任意小的去心邻域内，总有不可导的点 z_k 故不能保证 $f(z)=\operatorname{tg}\dfrac{1}{z}$ 在 $0<|z|<R$ 内处处解析.

所以 $f(z)=\operatorname{tg}\dfrac{1}{z}$ 不可以在 $0<|z|<R$ 内展开为洛朗级数.

○18. 如果 k 为满足关系 $k^2<1$ 的实数，证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos(n+1)\theta=\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}.$$

[提示　对 $|z|>k$ 展开 $(z-k)^{-1}$ 的洛朗级数，并在展开式的结果中令 $z=e^{i\theta}$，再令两边的实部与实部相等，虚部与虚部相等.]

证明　在 $|z|>k$ 时

$$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{z\left(1-\dfrac{k}{z}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}(k^2<1)$$

令　$z=\mathrm{e}^{i\theta}$

则　$$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{\cos\theta-k+i\sin\theta}=\frac{\cos\theta-k-i\sin\theta}{(\cos\theta-k)^2+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta-k-i\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}\qquad①$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}k^ne^{-(n+1)\theta i}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}k^n[\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta]\qquad②$$

① = ②⇒ 两边的实部相等、虚部相等，得证.

○ 19. 如果 C 为正向圆周 $|z|=3$，求积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值. 设 $f(z)$ 为

1) $\dfrac{1}{z(z+2)}$;　　2) $\dfrac{z+2}{(z+1)z}$;

3) $\dfrac{1}{z(z+1)^2}$；　　　　4) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$.

解　1) 因为 $\dfrac{1}{z(z+2)}=\dfrac{1}{2z}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}=\dfrac{1}{2z}\left(1-\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}-\cdots\right)$

因为 $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$，所以 $|z|<2$，

故　$f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)}$ 在域 $C:|z|=3$ 内不全解析.

设 C_1,C_2 为两两互不相交，互不包含的圆周，且各自包围奇点 $z=0,z=-2$

所以 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)\mathrm{d}z$

$$=\oint_{C_1}\frac{1}{z(z+2)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z(z+2)}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i+\frac{1}{-2}\cdot 2\pi i=0$$

2) 因为 $\dfrac{z+2}{(z+1)z}=\dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{1}{1+z}\right)$

故在 $C:|z|=3$ 内 $f(z)$ 不全解析.

设 C_1,C_2 为既不相交又不包含且各自包含奇点 $z=0,z=-1$ 的小圆周.

由柯西积分公式

$$\oint_C\frac{z+2}{z(z+1)}\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)\mathrm{d}z=2\cdot 2\pi i-2\pi i=2\pi i$$

3) 设 C_1,C_2 为互不相交，又互不包含的两小圆域，且各自包含着奇点 $z=0,z=-1$，

所以 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)\mathrm{d}z$

$$=\oint_{C_1}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)\mathrm{d}z$$

$$+\oint_{C_2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)dz$$

$$=2\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i}=0.$$

4）设 C_1,C_2 为互不相交且互不包含的两小圆域，且各自包围着奇点 $z=-1,z=-2$，

所以 $$\oint_C \frac{z}{(z+1)(z+2)}\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{-1}{-1+2}2\pi\mathrm{i}+\frac{-2}{-2+1}2\pi\mathrm{i}$$

$$=2\pi i$$

◎ 20. 试求积分 $\oint_C\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z$ 的值，其中 C 为单位圆 $|z|=1$ 内的任何一条不经过原点的简单闭曲线.

分析　考查级数积分的求值方法，先利用级数展开，逐项积分即可.

解　$$\sum_{n=-2}^{\infty}z^n=z^{-2}+z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 在 $|z|<1$ 内收敛，所以可对其逐项积分：

$$\oint_C\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z=\oint_C\left(z^{-2}+z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)dz$$

$$=\oint_C z^{-2}\mathrm{d}z+\oint_C z^{-1}\mathrm{d}z+\sum_{n=0}^{\infty}\oint_C z^n\mathrm{d}z$$

$$=0+2\pi\mathrm{i}+0=2\pi\mathrm{i}.$$

［已知：$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 2\pi\mathrm{i} & n=0\end{cases}$，$f(z)=z^n$ 在 $|z|<1$ 内解析］

第五章

留　数

内容提要

一、解析函数在孤立奇点邻域内的性态

1. **孤立奇点的定义**

   如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，且存在 z_0 的某邻域，$f(z)$ 在此邻域内除了 z_0 点外再无其它奇点，那么称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇立.

2. **解析函数在有限远奇点邻域内的性态**

   若 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则必存在 $\delta > 0$，使得 $f(z)$ 于圆环 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析，由第四章可知 $f(z)$ 在此圆环内可展成洛朗级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n} \qquad ①$$

若式 ① 中不含，只含有限个、含无穷多个 $z - z_0$ 的负幂项，那么分别称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点、极点、本性奇点.

(1) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列三条是等价的. 因此每一条都是可去奇点的特征.

①$f(z)$ 在 z_0 点的洛朗展式中不含 $z - z_0$ 的负幂项，即

$$f(z)=C_0+C_1(z-z_0)+\cdots+C_n(z-z_0)^n+\cdots$$

② $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=C_0\quad(\neq\infty)$

③ $f(z)$ 在 z_0 点的某去心邻域内有界.

此性质再次反映了解析函数函数值之间深刻的内在联系.因为在实函数中,函数在某点邻域内有界显然不能保证在该点可微,也不能保证在该点连续.

(2) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点,则下列三条中的每一条都是 m 级极点的特征.

① $f(z)$ 在 z_0 点的洛朗展式为

$$f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$$

$$(C_{-m}\neq 0,m>0)$$

② $f(z)$ 在 z_0 的某去心领域内能表示成

$$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m}$$

或 $$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\lambda(z_0)(\neq\infty)$$

其中,$\lambda(z)$ 在 z_0 的邻域内解析,且 $\lambda(z_0)\neq 0$;

③ $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 z_0 为 m 级零点(可去奇点当做解析点看).

下述定理也能说明极点的特征,其缺点是不可能指明极点的级:

$f(z)$ 的孤立奇点 z_0 为极点 $\Leftrightarrow\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$

(3) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点,则下列二条中每一条都是本性奇点的特征:

① $f(z)$ 在 z_0 点的洛朗展式中含有无穷多 $z-z_0$ 的负幂项;

② $\lim\limits_{z\to z_0}f(x)$ 不存在.

利用极限判断奇点的类型,当极限是$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型时,可以像在

《高等数学》中那样用 L'Hospital 法则来求.

如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数,那么

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

3. 解析函数在无穷远点的性态

无穷远点 ∞ 总是复变函数的奇点.

若 $f(z)$ 在无穷远点 ∞ 的去心领域 $R<|z|<+\infty$ 内解析,则称 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 是孤立奇点.

通过变换 $t=\frac{1}{z}$,将研究 $f(z)$ 在孤立奇点 $z=\infty$ 处的分类与性态转化为研究函数 $f(\frac{1}{t})$ 在孤立奇点 $t=0$ 处的分类与性态. 若 $t=0$ 为 $f(\frac{1}{t})$ 的可去奇点、极点、本性奇点,则 $z=\infty$ 就是 $f(z)$ 的可去奇点、极点、本性奇点.

$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点、极点、本性奇点的充要条件分别是 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 存在且有限、$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$,$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 不存在.

若 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的去心领域 $R<|z|<+\infty$ 内的洛朗级数中不含 z 的正幂项、含有限多个 z 的正幂项,且最高正幂项为 z^m、含无限多个 z 的正幂项,则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点、m 级极点、本性奇点.

二、留数的定义及留数定理

1. 留数及其计算

设 $a(\neq\infty)$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点,那么 $f(z)$ 在 a 的留数 $\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)\mathrm{d}z=c_{-1}$,其中 c 是 a 的去心邻域内围绕 a 的任意一条正向简单闭曲线.

计算留数最基本的方法就是求洛朗展开式中负幂项 $c_{-1}(z-$

$a)^{-1}$ 的系数 c_{-1}. 但是如果知道奇点 a 的类型,那么留数的计算也许稍简便些. 例如当 $a(\neq\infty)$ 为可去奇点时 $\mathrm{Res}[f(z),a]=0$. 对于极点处留数的计算,有如下公式或规则:

(1) 如果 a 为 $f(z)$ 的 m 级极点,那么

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)].$$

特别地,如果 a 为 $f(z)$ 的简单极点($m=1$),则 $\mathrm{Res}[f(z),a]=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$.

注　如果极点 a 的实际级数比 m 低时,(1) 仍然有效.

(2) 设 a 为 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的一级极点(只要 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在点 a 解析且 $P(a)\neq 0,Q(a)=0,Q'(a)\neq 0$),那么

$$\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

注　如果 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 a 点解析,a 为 $Q(z)$ 的一级零点,则同样有 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

如果 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点,那么 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的留数 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c -f(z)\mathrm{d}z=-c_{-1}$,其中 c 为 $r<|z|<+\infty$ 内绕原点的任意一条正向简单闭曲线. 函数在 ∞ 处的留数就是洛朗展开式负幂项 $c_{-1}z^{-1}$ 前系数的相反数:$-c_{-1}$. 当 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点时,按定义 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$ 可以不等于零.

2. 留数定理

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外处处解析,C 是 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线,那么

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

由柯西定理极易得到以上的留数定理,更确切地说,留数定理是柯西定理的一个直接应用,它把计算封闭曲线积分的整体问题,化为计算各孤立奇点处留数的局部问题,即利用留数计

算积分.因此,有必要专门研究留数的计算.

三、用留数定理计算定积分

1. **形如$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$的定积分的计算**

其中$R(\cos\theta,\sin\theta)$为$\cos\theta$与$\sin\theta$的有理函数.

作变换,令

$$z=\mathrm{e}^{i\theta},\mathrm{d}z=iz\mathrm{d}\theta=i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta})=\frac{z^2-1}{2iz}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta})=\frac{z^2+1}{2z}$$

则

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z$$

其中

$$f(z)=R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right]\frac{1}{\mathrm{i}z}$$

然后由留数定理求得积分值为$2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$其中$z_k(k=1,2,\cdots,n)$为$f(z)$在单位圆周内的所有孤立奇点.

2. **形如$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$的积分的计算**

其中$R(x)$为x的有理函数,且分母的次数比分子的次数至少高二次,$R(z)$在实轴上无孤立奇点.则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}[R(z),z_k],$$

其中z_k为$R(z)$在上半平面内的极点.

3. 形如$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx(a>0)$的积分的计算

其中$R(x)$是x的有理函数,分母的次数比分子次数至少高一次,且$R(z)$在实轴上无孤立奇点. 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{iaz},z_k],$$

其中z_k为$R(z)$在上半平面内的极点.

典型例题与解题技巧

【例 1】 试求下列函数的所有有限孤立奇点,并判断它们的类型

(1) $f(z)=\dfrac{\mathrm{tg}z}{z^2-\dfrac{\pi}{6}z}$; (2) $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin\dfrac{1}{z+1}}$;

(3) $f(z)=\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{\sin z(z-\sin z)}$; (4) $f(z)=\dfrac{z-\dfrac{\pi}{4}}{z(\sin z-\cos z)}$.

解题分析 为了求出函数的孤立奇点,首先必须求出它的所有奇点,其次要判定它们是否孤立,最后再选择适当的方法判断奇点的类型.

解题过程 (1) 显然,$z=0$与$z=\dfrac{\pi}{6}$是$f(z)$的奇点. 又由于$\cos z$的零点为$z_k=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,所以$z_k$都是$f(z)$的奇点. 容易看出$0,\dfrac{\pi}{6}$及$z_k$都是有限孤立奇点. 因为$z=0$是分子$\mathrm{tg}\,z$的一级零点,也是分母的一级零点,所以它是$f(z)$的可去奇点. 其余奇点都是$f(z)$的一级极点.

(2) 由于$z=-1$与$z_k=\dfrac{1}{k\pi}-1(k=\pm1,\pm2,\cdots)$都是$f(z)$的有限奇点,并且$z_k\to-1(k\to\infty)$,故$z=-1$不是孤立奇点. 因此,$f(z)$的有限孤立奇点为$z_k=$

$\frac{1}{k\pi}-1(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$，并且，它们都是一级极点.

(3) 易见 $z=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 都是 $f(z)$ 的奇点，并且是孤立的．下面判断它们的类型．由于

$$z-\sin z=z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)$$
$$=z^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\cdots\right)=z^3\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)=\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\cdots$ 是解析函数，且 $\varphi(0)=\frac{1}{3!}\neq 0$，所以 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三级零点，因而是分母的四级零点．又因为

$$\sin 3z-3\sin z=\left[3z-\frac{1}{3!}(3z)^3+\frac{1}{5!}(3z)^5-\cdots\right]$$
$$-3\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)$$
$$=-\frac{3^3-3}{3!}z^3+\frac{3^5-3}{5!}z^5-\cdots$$
$$=z^3\psi(z)$$

其中 $\psi(z)=-\frac{3^3-3}{3!}+\frac{3^5-3}{5!}z^2-\cdots$ 是解析函数，且 $\psi(0)\neq 0$，所以 $z=0$ 是分子的三级零点，从而知 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点．

根据极限的有理运算法则和洛必达法则，

$$\lim_{z\to k\pi}\frac{\sin 3z-3\sin z}{(z-\sin z)\sin z}=\frac{1}{k\pi}\lim_{z\to k\pi}\frac{\sin 3z-3\sin z}{\sin z}$$
$$=\frac{1}{k\pi}\lim_{z\to k\pi}\frac{3\cos 3z-3\cos z}{\cos z}$$
$$=0$$

所以 $z=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是 $f(z)$ 的可去奇点．

此题中，为了判定奇点 $z=0$ 的类型，将分子与分母分别展开为洛朗级数，判断它的级数，需利用零用与极点的关系．对于 $z=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$，用求

$f(z)$ 的极限的方法来判定．

(4) 容易看出，$z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点，分母 $\sin z-\cos z$ 的零点也是 $f(z)$ 的奇点．由于

$$\sin z-\cos z=\sqrt{2}\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$$

所以 $\sin z-\cos z$ 的零点是 $z=k\pi+\frac{\pi}{4}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，并且都是一级的，从而得知 $z=0$ 与 $z=k\pi+\frac{\pi}{4}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是 $f(z)$ 的一级极点．又因 $z=\frac{\pi}{4}$ 也是分子的一级零点，所以 $z=\frac{\pi}{4}$ 是它的可去奇点．

【例 2】 求下列函数在所有孤立奇点处的留数：

(1) $\dfrac{z^2}{\cos z-1}$；　　(2) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$.

解题分析　求出函数的奇点(不解析点，无穷远点也应考虑在内)，找出孤立奇点(注意：并非所有奇点都是孤立的)，然后根据每一类孤立奇点的特征来判定类型，明确计算留数的方法，即用公式或规则(特别适合于极点的情形)还是用洛朗展开式求 c_{-1}(一般方法).

解题过程　(1) 函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{\cos z-1}$ 有奇点：$2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$(分母的零点)与 ∞．显然当 $k\to\infty$ 时 $2k\pi$ 以 ∞ 为极限点，∞ 为非孤立奇点．又 $\cos z-1$ 以 $2k\pi$ 为二级零点，$z=0$ 为分子的二级零点，所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点[也可由 $\lim\limits_{z\to0}f(z)=-2$ 推知]，$2k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$ 为 $f(z)$ 的二级极点．由公式 $\mathrm{Res}[f(z),0]=0$

$$\mathrm{Res}[f(z),2k\pi]=\lim_{z\to2k\pi}\left[(z-2k\pi)^2\frac{z^2}{\cos z-1}\right]'$$

$$(k=\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots)$$

注意到 $\cos z-1=\cos(z-2k\pi)-1=(z-2k\pi)^2\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)=-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}(z-2k\pi)^2-\frac{1}{6!}(z-2k\pi)^4+\cdots$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),2k\pi]&=\lim_{z\to 2k\pi}\left(\frac{z^2}{\varphi(z)}\right)'\\&=\lim_{z\to 2k\pi}\frac{2z\varphi(z)-z^2\varphi'(z)}{\varphi^2(z)}\\&=\frac{4k\pi\left(-\frac{1}{2!}\right)-0}{\left(-\frac{1}{2!}\right)^2}\\&=-8k\pi,(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)\end{aligned}$$

(2) 函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 有奇点：$0,\infty,\frac{1}{k\pi}(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$. 显然 0 为非孤立奇点，$\frac{1}{k\pi}$ 为 $\sin\frac{1}{z}$ 的一级零点，所以$\frac{1}{k\pi}$ 为 $f(z)$ 的一级极点. 由公式

$$\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{1}{k\pi}\right]=\left.\frac{1}{\left(\sin\frac{1}{z}\right)'}\right|_{z=\frac{1}{k\pi}}=\frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2}$$

$$(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),\infty]&=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]\\&=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin z},0\right]\\&=-\frac{1}{2!}\left.\left(\frac{z}{\sin z}\right)''\right|_{z=0}\end{aligned}$$

这里$\frac{1}{z^2\sin z}$ 以 $z=0$ 为三级极点. 令$\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{z}{\sin z}$，易知 $\varphi(z)=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots$. 故

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\varphi(z)}\right)''\bigg|_{z=0}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\varphi''(0)\varphi(0)-2(\varphi'(0))^2}{(\varphi(0))^3}=-\frac{1}{6}$$

【例 3】　计算下列积分

(1) $\oint_{|z|=2}\frac{2z-1}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$；

(2) $\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$，　　$C: x^2+y^2=2(x+y)$；

(3) $\int_{|z|=n}\operatorname{tg}\pi z\mathrm{d}z$（$n$ **为正整数**）；

(4) $\int_{|z-2\pi|=2\pi}\frac{1}{e^z-i^i}\mathrm{d}z$；

(5) $\int_C\frac{1}{1+z^4}\mathrm{d}z$，**其中** C **为正向椭圆**：$x^2-xy+y^2+x+y=0(z=x+iy)$.

解题分析　**利用留数定理计算复积分，一般先要求出被积函数在积分路径内部的孤立奇点，判断类型，计算出奇点处的留数，应用留数定理便可以得到所求的积分值．如果积分路径内部孤立奇点处的留数计算比较困难时，也可以类似地考查被积函数在积分路径外部孤立奇点处的留数计算．**

解题过程　(1) **令**

$$f(z)=\frac{2z-1}{z(z-1)^2}$$

$f(z)$ **在圆周** $|z|=2$ **内只有二个极点**，$z=0$ **为一级极点**，$z=1$ **为二级极点，由留数计算规则知**

$$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\frac{2z-1}{(z-1)^2}\Big|_{z=0}=-1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=\left(\frac{2z-1}{z}\right)'\Big|_{z=1}=1$$

由留数定理得

$$\oint_{|z|=2}\frac{2z-1}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z=2\pi i(-1+1)=0$$

(2) 由线 C 为圆周

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

被积函数

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

有两个一级极点 $z=\pm i$，一个二级极点 $z=1$，只有 $z=1,z=i$ 在 C 的内部，$z=-i$ 在 C 的外部.

$$\operatorname*{Res}_{z=i}f(z)=\left[\frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{(z^2+1)'}\right]_{z=i}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2z}\Big|_{z=i}$$

$$=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=\left[\frac{1}{(z^2+1)}\right]'_{z=1}$$

$$=-\frac{2z}{(z^2+1)^2}\Big|_{z=1}=-\frac{1}{2}$$

由留数定理知

$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i[\operatorname*{Res}_{z=i}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)]$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right]=-\frac{\pi i}{2}$$

(3) 被积函数 $\mathrm{tg}\pi z=\dfrac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$ 在 $|z|=n$ 内有孤立奇点：

$k+\dfrac{1}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm(n-1),-n)$，均为一阶极点．由公式

$$\mathrm{Res}[\mathrm{tg}\pi z,k+\frac{1}{2}]=\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\Big|_{z=k+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\pi}$$

于是由留数定理

$$\int_{|z|=n}\mathrm{tg}\pi z\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{\left|k+\frac{1}{2}\right|<n}\mathrm{Res}\left[\mathrm{tg}\pi z,k+\frac{1}{2}\right]$$

$$= 2\pi i\left(2n\frac{-1}{\pi}\right) = -4ni$$

(4) 由 $i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$ 可知被积函数 $f(z) = \dfrac{1}{e^z - i^i}$

以 $z_k = -\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为一阶

极点,其中 $z_{-1} = 2\pi - \dfrac{\pi}{2}$ 与 $z_{-2} = 4\pi - \dfrac{\pi}{2}$ 包含在 $|z - 2\pi| = 2\pi$ 内部．由公式,

$$\mathrm{Res}[f(z), z_k] = \frac{1}{(e^z - i^i)'}\Bigg|_{z=z_k} = e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

以按 $i^i = e^{z_{-1}}$ 理解为例,由留数定理

$$\int_{|z-2\pi|=2\pi} \frac{1}{e^z - i^i}\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{Res}[f(z), z_{-1}]$$

$$= 2\pi i e^{\frac{-3\pi}{2}}$$

其余情况类似.

(5) 所给椭圆的内部由不等式 $x^2 - xy + y^2 + x + y < 0$ 来描述,被积函数 $\dfrac{1}{1+z^4}$ 的 4 个一阶极点 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$

中只有一个即 $z_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$ 位于椭圆 C 的内部．

所以由留数定理

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = 2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^4}, z_0\right]$$

$$= 2\pi i\frac{1}{4z_0^3} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(-1+i)$$

【例 4】　指出下列函数在零点 $z = 0$ 的级:

(1) $z^2(e^{z^2} - 1)$;　　　(2) $6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$.

解题分析　利用导数或展开式验证.

解题过程　(1) 用求导数验证:记 $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$, $f(0) = 0$,不难计算

$f'(z) = -2z + 2(z^3 + z)e^{z^2}$，　$f'(0) = 0$，

$f''(z) = (4z^4 + 10z^2 + 2)e^{z^2} - 2$，　$f''(0) = 0$，

$f'''(z) = (8z^5 + 36z^3 + 24z)e^{z^2}$，　$f'''(0) = 0$，

$f^{(4)}(z) = (16z^6 + 112z^4 + 156z^2 + 24)e^{z^2}$，$f^{(4)}(0) = 24$.

即

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0,\quad f^{(4)}(0) \neq 0,$$

故 $z = 0$ **为函数** $z^2(e^{z^2} - 1)$ **的四阶零点**.

用泰勒展式:由展开式

$$e^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{1}{2!}z^4 + \cdots + \frac{1}{n!}z^{2n} + \cdots,\ |z| < +\infty$$

可知

$$z^2(e^{z^2} - 1) = z^2\left(z^2 + \frac{1}{2!}z^4 + \cdots\right) = z^4\varphi(z)$$

其中 $\varphi(z) = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^{2n-2} + \cdots$ **在** $|z| < +\infty$ **内解析**,$\varphi(0) = 1$.

故 $z = 0$ **为函数** $z^2(e^{z^2} - 1)$ **的** 4 **阶零点**.

(2) **由展开式**

$$\sin z^3 = z^3 - \frac{1}{3!}z^9 + \frac{1}{5!}z^{15} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{6n+3}}{(2n+1)!} + \cdots,\quad |z| < +\infty$$

可知

$$\begin{aligned}&6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)\\ &= 6\left(z^3 - \frac{1}{3!}z^9 + \frac{1}{5!}z^{15} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{6n+3}}{(2n+1)!} + \cdots\right)\\ &\quad + z^9 - 6z^3 = z^{15}\varphi(z)\end{aligned}$$

其中

$$\varphi(z) = 6\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}z^6 + \cdots + (-1)^n\frac{z^{6n-12}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$

在 $|z| < +\infty$ **内解析**,$\varphi(0) = \frac{6}{5!} \neq 0$. **故** $z = 0$ **是函数** $6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$ **的** 15 **阶零点**.

【例 5】 **设 n 为整数，计算积分** $\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$ **及** $\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\sin(n\varphi-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

解题分析　**把如上两个积分视为一个复积分的实部与虚部，再用留数定理求积.**

解题过程　**设** $I_1=\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$，

$$I_2=\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\sin(n\varphi-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

则
$$I=I_1+iI_2=\int_0^{2\pi} e^{e^{-i\varphi}}e^{in\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

令
$$e^{i\varphi}=z,\text{则 } \mathrm{d}\varphi=\frac{1}{iz}\mathrm{d}z$$

$$I=\frac{1}{I}\oint_{|z|=1} z^{n-1}e^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{Res}[z^{n-1}e^{\frac{1}{z}},0]$$

由于

$$z^{n-1}e^{\frac{1}{z}}=z^{n-1}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots\right)$$

故

$$\mathrm{Res}[z^{n-1}e^{\frac{1}{z}},0]=c_{-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{n!}, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

所以

$$I=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{n!}, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

比较等式两边的实部和虚部即得题中所要证明的两个结论.

【例 6】 **设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 阶极点，那么下列三个函数：**

(1) $f(z)+g(z)$；　(2) $f(z)g(z)$；　(3) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$

在 $z=a$ 处各有什么性质?

解题分析 由极点的特征,$z=a$ 分别是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 m 级与 n 阶极点 $\Leftrightarrow$ 在 a 的去心邻域内

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},\quad g(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^n}$$

其中 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 在 a 的邻域内解析,$\varphi(a)\neq 0$,$\psi(a)\neq 0$,利用此表示式考查所给的三个函数.

解题过程 (1) 不难看出

$$f(z)+g(z)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(z)+(z-a)^{m-n}\psi(z)}{(z-a)^m}, & m>n\\[2ex] \dfrac{(z-a)^{n-m}\varphi(z)+\psi(z)}{(z-a)^n}, & m<n\\[2ex] \dfrac{\varphi(z)+\psi(z)}{(z-a)^m}, & m=n\end{cases}$$

其中当 $m>n$ 时,分子以 $z=a$ 代入得 $\varphi(a)\neq 0$;当 $m<n$ 时分子以 $z=a$ 代入得 $\psi(a)\neq 0$;当 $m=n$ 时分子以 $z=a$ 代入得 $\varphi(a)+\psi(a)$. 又显然各个分子在 a 的邻域内解析,所以有结论:

当 $m\neq n$ 时,点 a 是 $f(z)+g(z)$ 的 $\max\{m,n\}$ 阶极点;

当 $m=n$ 时,若 $\varphi(a)+\psi(a)\neq 0$,点 a 是 $f(z)+g(z)$ 的 n 阶极点;若 $\varphi(a)+\psi(a)=0$,点 a 是 $f(z)+g(z)$ 的低于 n 级的极点或可去奇点.

(2) $f(z)g(z)=\dfrac{\varphi(z)\psi(z)}{(z-a)^{m+n}}$,因 $\varphi(z)\psi(z)$ 在 a 的邻域内解析且 $\varphi(a)\psi(a)\neq 0$,所以 $z=a$ 是 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点.

$$(3)\ \frac{f(z)}{g(z)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(z-a)^{m-n}}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}, m>n, a\text{ 是 } m-n \text{ 阶极点}\\ (z-a)^{n-m}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)},\ m<n, a \text{ 是 } n-m \text{ 阶零点}\\ \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)},\qquad m=n, a\text{ 是可去奇点(解析点)}\end{cases}$$

历年考研真题评析

【题 1】 设 L 表示以原点为中心的正向单位圆周，求下列积分.

(1) $\displaystyle\int_L \frac{e^z \sin z}{(z-2)^3}dz$；　　(2) $\displaystyle\int_L z^{-2}\operatorname{sh}z dz$；

(3) $\displaystyle\int_L \ln\left|\frac{z-\pi}{\pi z}\right| |dz|$.（兰州大学 2005 年）

解题分析　可利用解析函数的性质及留数定理等计算.

解题过程　(1) 因为 $\dfrac{e^z\sin z}{(z-2)^3}$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，故

$$\int_L \frac{e^z\sin z}{(z-2)^3}dz=0$$

(2) $z^{-2}\operatorname{sh}z$ 在 $|z|\leqslant 1$ 内有一个一级极点 $z=0$，据留数定理及 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ 有

$$\int_L z^{-2}\operatorname{sh}z dz=2\pi i\lim_{z\to 0}z\frac{\operatorname{sh}z}{z^2}=2\pi i\operatorname{ch}0=2\pi i$$

(3) $\displaystyle\int_L \ln\left|\frac{z-\pi}{\pi z}\right|\cdot|dz|$

$$=\int_L \ln|\pi-z|\cdot|dz|-\int_L \ln|\pi z|\cdot|dz|$$

$$=\int_0^{2\pi}\ln[(\cos\theta-\pi)^2+\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}}d\theta-2\pi\ln\pi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln(1-2\pi\cos\theta+\pi^2)d\theta-2\pi\ln\pi$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\ln\pi^2-2\pi\ln\pi=0$$

【题 2】 (1)函数$\dfrac{1}{e^z+i}$有哪些孤立奇点？各属何种类型？无穷远点是否为孤立奇点？

(2)$\dfrac{1}{(1+z)^3}\sin\dfrac{1}{1-z}$在扩充复平面上有哪些孤立奇点？各属何种类型？（浙江大学 2005 年）

解题分析 此题考查如何寻找奇点及奇点类型的判断.

解题过程 (1)显然 $z_k=i\left(\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi\right)$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是分母的零点，又

$$(e^z+i)'|_{z=z_k}=-i\neq0\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

所以 $z_k=i\left(\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi\right)$是$\dfrac{1}{e^z+i}$的一级极点，又$\lim\limits_{k\to\infty}z_k=\infty$，故 $z=\infty$是极点的极限点，不是孤立奇点.

(2)因为$\lim\limits_{z\to-1}(1+z)^3\cdot\dfrac{1}{(1+z)^3}\sin\dfrac{1}{1-z}=\sin\dfrac{1}{2}\neq0$

故 $z_1=-1$ 是 $f(z)$的三级极点.

$$\lim_{z\to1}(z-1)\cdot\frac{1}{(1+z)^3}\sin\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{8}\neq0$$

故 $z_2=1$ 是 $f(z)$的一级极点.

又$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{(1+z)^3}\cdot\sin\dfrac{1}{1-z}=0$ $\quad\therefore z_3=\infty$是可去奇点，

所以在扩充复平面上，$f(z)$有一个三级极点 $z_1=-1$，一个一级极点 $z_2=1$ 和一个可去奇点 $z_3=\infty$.

【题 3】 (1)求$\dfrac{1}{\cos z-\cos\alpha}$在扩充复平面上各孤立奇点的留数，$\alpha$ 为一固定复数；

(2)若 $\varphi(z)$在 $z=a$ 解析，$\varphi'(a)\neq0$，又函数 $f(\zeta)$以 $\zeta_0=\varphi(a)$为简单极点，且 $\mathrm{Res}[f,\varphi(a)]=A$，试求 $\mathrm{Res}[f(\varphi(z)),a]$.（浙江大学 2005 年）

解题分析 此题是关于留数计算的考查，要求对留数有深刻的认识.

解题过程 (1)设 $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-\cos\alpha}$，因为 $\cos z-\cos\alpha$ 仅以 $z_k=2k\pi$

$\pm\alpha\quad(k=0,\pm1,\cdots)$为孤立零点，又因为

$(\cos z-\cos\alpha)'|_{z=z_k}=-\sin(2k\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$

$(\cos z-\cos\alpha)''|_{z=z_k}=-\cos(2k\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha$

所以，当 $\sin\alpha\neq0$ 时，$z_k=2k\pi\pm\alpha(k=0,\pm1,\cdots)$各为 $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-\cos\alpha}$的一级极点，此时

$$\operatorname{Res}[f(z),z_k]=\lim_{z\to z_k}\frac{1}{(\cos z-\cos\alpha)'}=\mp\frac{1}{\sin\alpha}$$

当 $\sin\alpha=0$ 时，必须 $\cos\alpha\neq0$，因而 $z_k=2k\pi\pm\alpha(k=0,\pm1,\cdots)$各为 $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-\cos\alpha}$的二级极点. 此时可以算得

$$\operatorname{Res}[f(z),z_k]=0$$

在扩充复平面上，因为

$$\lim_{k\to\infty}z_k=\lim_{k\to\infty}(2k\pi\pm\alpha)=\infty$$

故 $z=\infty$为非孤立奇点.

(2)由 $\varphi(z)$在 a 点解析且 $\varphi'(a)\neq0$，可知

$$\varphi(z)=\varphi(a)+\varphi'(a)(z-a)+\frac{\varphi''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots$$

若记 $\varphi(z)-\varphi(a)=(z-a)h(z)$，则

$$h(z)=\varphi'(a)+\frac{\varphi''(a)}{2!}(z-a)+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}$$
$$+\cdots$$

$h(a)=\varphi'(a)\neq0\Rightarrow$在 a 的邻域内，$h(z)\neq0$.

函数 $f(\zeta)$以 $\zeta_0=\varphi(a)$为简单极点且 $\operatorname{Res}[f(\zeta),\zeta_0]=A\Leftrightarrow f(\zeta)$在 ζ_0 的去心邻域内洛朗展式的负幂项只有 $\dfrac{c_{-1}}{\zeta-\zeta_0}$，而且 $c_{-1}=A\neq0$ 故可设 $f(\zeta)$在 ζ_0 的去心邻域的洛朗展式为

$$f(\zeta)=\frac{A}{\zeta-\zeta_0}+c_0+c_1(\zeta-\zeta_0)+\cdots\triangleq\frac{g(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}$$

其中 $g(\zeta)$ 在 ζ_0 的邻域内解析且 $g(\zeta_0)=A\neq0$(从而在 ζ_0 的邻域内 $g(\zeta)\neq0$),于是

$$f[\varphi(z)]=\frac{g[\varphi(z)]}{\varphi(z)-\varphi(a)}=\frac{g[\varphi(z)]}{(z-a)h(z)}$$

以 a 为一级极点,

$$\begin{aligned}\text{Res}\{f[\varphi(z)],a\}&=\lim_{z\to a}(z-a)f[\varphi(z)]\\&=\lim_{z\to a}\frac{g[\varphi(z)]}{h(z)}=\frac{g[\varphi(a)]}{h(a)}=\frac{A}{\varphi'(a)}\end{aligned}$$

【题 4】 用复变函数沿闭曲线积分的方法计算

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x.$$

(浙江大学 2005 年)

解题分析 先找出 $f(z)$ 的孤立奇点再计算留数.

解题过程 设 $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^4+1}$,则 $f(z)$ 的孤立奇点为 $z_k=\mathrm{e}^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}$ ($k=0,1,2,3$),且都是 $f(z)$ 的一级极点,其中 z_0 与 z_1 在上半平面.

$$\text{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}\frac{z^2+1}{(z^4+1)'}=\frac{z_0^2+1}{4z_0^3}=-\frac{\sqrt{2}}{4}i$$

$$\text{Res}[f(z),z_1]=\frac{z_1^2+1}{4z_1^3}=-\frac{\sqrt{2}}{4}i$$

所以
$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\cdot2\pi i\sum_{k=0,1}\text{Res}[f(z),z_k]\\&=\pi i\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}i-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right]\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\end{aligned}$$

【题 5】 利用留数计算下列积分:

(1) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.（东北大学 2006 年）

解题分析　这又是一道用留数计算积分的题目，是对基本知识基本方法的考查.

解题过程　(1) $R(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$ 在上半平面有一个二级极点 $z = i$，且

$$\mathrm{Res}[R(z), i] = -\frac{i}{4}$$

易得：

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x = \pi i \mathrm{Res}[R(z), \mathrm{i}] = \frac{\pi}{4}$$

(2) 采用以下积分路径：

$C: C_R + [-R, -r] + C_r + [r, R] (0 < r < R)$，来绕开奇点 $Z = 0$，如图 5－1 所示.

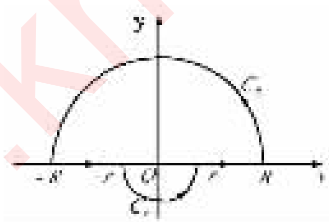

图 5－1

令 $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}$，则 $f(z)$ 在 C 内有奇点 $z = 0$，据留数定理有

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z} \mathrm{d}z = \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z} \mathrm{d}z + \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x} \mathrm{d}x + \int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z} \mathrm{d}z + \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z} \mathrm{d}z + \int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z} \mathrm{d}z + 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = 2\pi i \quad ①$$

课本中已证明 $$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0 \quad ②$$

又 $$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + i - \frac{z}{2!} - \frac{iz^2}{3!} + \cdots = \frac{1}{z} + \varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)$ **在** $z=0$ **解析，且** $\varphi(0)=i$**，故当** $|z|$ **充分小时，可使**

$$|\varphi(z)| \leqslant 2$$

所以 $$\left|\int_{C_r}\varphi(z)dz\right| \leqslant \int_{C_r}|\varphi(z)|ds \leqslant 2\pi r$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\varphi(z)dz = 0 \quad ③$$

而 $$\int_{C_r}\frac{1}{z}dz = \pi i \quad ④$$

将式 ① 两端令 $r\to 0, R\to+\infty$ **取极限，并将式 ②、③、④ 代入，得** $\pi i + 2i\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = 2\pi i$

所以 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

课后习题全解

○ 1. **下列函数有些什么奇点？如果是极点，指出它的级：**

1) $\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$；　2) $\dfrac{\sin z}{z^3}$；　3) $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$；

4) $\dfrac{\ln(z+1)}{z}$；　5) $\dfrac{z}{(1+z^2)(e^{\pi z}+1)}$；　6) $\dfrac{1}{e^{z-1}}$；

7) $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$；　8) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$（n **为正整数**）；　9) $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

解　1) **令** $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$**，则** $\dfrac{1}{f(z)} = z(z-i)^2(z+i)^2$ **以** $z=0$ **为一级零点，** $z=\pm i$ **为二级零点. 所以** $f(z)$ **有奇点：** $0, \pm i$**，并且由零点与极点的关系可知：** $z=0$ **为** $f(z)$ **的一级**

极点，$z=\pm i$ 为 $f(z)$ 的二级极点.

2）$z=0$ 为 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的奇点，又在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内 $\dfrac{\sin z}{z^3}=\dfrac{1}{z^3}\left(z-\dfrac{1}{3!}z^3+\dfrac{1}{5!}z^5-\cdots\right)=\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}z^2-\cdots$，所以 $z=0$ 为 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的二级极点.

3）
$$\frac{1}{z^3-z^2-z+1}=\frac{1}{z^2(z-1)-(z-1)}=\frac{1}{(z+1)(z-1)^2}$$

有奇点：$-1,1$. $z=-1$ 为一级极点，$z=1$ 为二级极点.

4）由 $\ln(z+1)=\ln|z+1|+i\arg(z+1)$ 结合第一章习题中 32 题的结论可知 $\ln(z+1)$ 在负实轴上区间 $(-\infty,-1]$ 中每一点不连续，因而也不解析. 除此之外是解析函数. 显然 $(-\infty,-1]$ 上的点都是 $\ln(z+1)$ 的非孤立奇点，也是 $\dfrac{\ln(z+1)}{z}$ 的非孤立奇点. 又 $z=0$ 为 $\dfrac{\ln(z+1)}{z}$ 的奇点，且在其去心邻域 $0<|z|<1$ 内

$$\frac{\ln(z+1)}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots\right)=1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2-\cdots$$

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{\ln(z+1)}{z}$ 的可去奇点.

5）分母的零点：$\pm i$ 及方程 $e^{\pi z}+1=0$ 的根 $z_k=(2k+1)i$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，均为函数的奇点. 注意 $e^{\pi z}+1=0\Leftrightarrow e^{\pi z}=-1\Leftrightarrow \pi z=\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+i(\pi+2k\pi)=(2k+1)\pi i$，即 $z=(2k+1)i$，又 $(e^{\pi z}+1)'\Big|_{z=z_k}=\pi e^{\pi z_k}\neq 0$，$z_k$ 为 $e^{\pi z}+1$ 的一级零点，且当 $k=0,-1$ 时，$z_0=i$，$z_{-1}=-i$. 这样 $\pm i$ 为函数 $(1+z^2)(e^{\pi z}+1)$ 的二级零点. 故 $\pm$

i 为 $\dfrac{z}{(1+z^2)(e^{\pi z}+1)}$ 的二级极点，$z_k=(2k+1)i\quad(k=1,\pm2,\pm3,\cdots)$ 为此函数的一级极点.

6) $z=1$ 为 $e^{\frac{1}{z-1}}$ 的奇点，又在 $z=1$ 的去心邻域 $0<|z-1|<+\infty$ 内 $e^{\frac{1}{z-1}}=1+\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{(z-1)^2}+\cdots$ 含有无穷多个 $z-1$ 的负幂项，因此 $z=1$ 为本性奇点.

7) 分母的零点：0 及方程 $e^z-1=0$ 的根 $z_k=2\pi ik(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，均为函数的奇点. 又 $(e^z-1)'\Big|_{z=z_k}=e^{z_k}\neq0$，$z_k=2k\pi i$ 为 e^z-1 的一级零点，且当 $k=0$ 时 $z_0=0$. 这样 $z=0$ 为函数 $z^2(e^z-1)$ 的三级零点. 故 $z=0$ 为 $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$ 的三级极点，$z_k=2k\pi i(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为此函数的一级极点.

8) 由分母为零得 $z^n+1=0\Leftrightarrow z=\sqrt[n]{-1}=e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，且 $(z^n+1)'\Big|_{z=e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}}\neq0$，即 $z=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}$ 为 z^n+1 的一级零点. 因而 $z=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 为函数 $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$ 的一级极点.

9) 由 $\sin z^2=z^2-\dfrac{1}{3!}z^6+\dfrac{1}{5!}z^{10}-\cdots=z^2\left(1-\dfrac{1}{3!}z^4+\cdots\right)$ 知 $z=0$ 是 $\sin z^2$ 的二级零点，从而 $z=0$ 为 $\dfrac{1}{\sin z^2}$ 的二级极点.

又 $\sin z^2=0\Leftrightarrow z^2=k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

当 $k=1,2,3,\cdots$ 时，$z^2=k\pi$ 给出 $z=\pm\sqrt{k\pi}$.

当 $k=-1,-2,-3,\cdots$ 时，$z^2=k\pi$ 给出 $z=\pm\sqrt{|k|}\pi i$.

而 $(\sin z^2)'=2z\cos z^2$ 在 $\pm\sqrt{k\pi},\pm\sqrt{k\pi}i(k=1,2,\cdots)$ 点处不为零，所以 $\pm\sqrt{k\pi},\pm\sqrt{k\pi}i$ 均为 $\sin z^2$ 的一级零点.

综上所述，函数$\frac{1}{\sin z^2}$有奇点：$0, \pm\sqrt{k\pi}, \pm\sqrt{k\pi}i (k=1, 2, 3, \cdots)$，其中 0 为二级极点，$\pm\sqrt{k\pi}, \pm\sqrt{k\pi}i$ 均为一级极点.

◯ 2. 求证：如果 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的 $m(m>1)$ 级零点. 那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点.

证明　z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点 $\Leftrightarrow f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$. 而 $f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)=(z-z_0)^{m-1}[m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)]\overset{\text{def}}{=\!=}(z-z_0)^{m-1}g(z)$，$g(z)=m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)$ 在 z_0 解析，$g(z_0)=m\varphi(z_0)\neq 0$. 所以又由 $f'(z)=(z-z_0)^{m-1}g(z)$，$g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$ 可得 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点.

◯ 3. 验证：$z=\frac{\pi i}{2}$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的一级零点.

证明　由 $\operatorname{ch} z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})$ 得

$$\operatorname{ch}\frac{\pi i}{2}=\frac{1}{2}(e^{\pi i/2}+e^{-\pi i/2})=\frac{1}{2}(i-i)=0$$

$$(\operatorname{ch} z)'\Big|_{z=\frac{\pi i}{2}}=\operatorname{sh}\frac{\pi i}{2}=\frac{1}{2}(e^{\pi i/2}-e^{-\pi i/2})=\frac{1}{2}(i+i)$$
$$=i\neq 0$$

所以 $z=\frac{\pi i}{2}$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的一级零点.

◎ 4. $z=0$ 是函数 $(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{-2}$ 的几级极点？

分析　确定一个点是函数的几级极点，先确定逆函数的零点即可求出.

解　$z=0$ 是 $(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{-2}$ 的 10 级极点. 因为

$$\sin z+\operatorname{sh} z-2z=\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)+$$
$$\left(z+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots\right.$$

$$+\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\cdots\Big)-2z$$

$$=z^5\left(\frac{2}{5!}+\frac{2}{9!}z^4+\cdots\right)$$

以 $z=0$ 为 5 级零点，所以 $z=0$ 是 $(\sin z+\mathrm{sh}z-2z)^2$ 的 10 级零点，结合零点与极点的关系，$z=0$ 是函数 $(\sin z+\mathrm{sh}z-2z)^{-2}$ 的 10 级极点.

◯5. 如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，那么

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\text{(或两端均为 }\infty\text{)}.$$

证明 设 z_0 分别为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 m 级零点与 n 级零点，则在 z_0 的邻域内，

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi_1(z),\quad g(z)=(z-z_0)^n\varphi_2(z)$$

其中 $\varphi_1(z)$ 与 $\varphi_2(z)$ 在 z_0 解析，$\varphi_1(z_0)\neq 0$，$\varphi_2(z_0)\neq 0$. 于是

$$\frac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} \qquad ①$$

$$\frac{f'(z)}{g'(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{m\varphi_1(z)+(z-z_0)\varphi'_1(z)}{n\varphi_2(z)+(z-z_0)\varphi'_2(z)} \qquad ②$$

由式 ① 和式 ② 可知

当 $m>n$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=0=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$；

当 $m=n$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\varphi_1(z_0)}{\varphi_2(z_0)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$；

当 $m<n$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\infty=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$，结论得证.

◎6. 设函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点（或零点），那么下列三个函数：

1) $\varphi(z)\psi(z)$； 2) $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$； 3) $\varphi(z)+\psi(z)$

在 $z=a$ 处各有什么性质？

分析　函数的乘积、商、和等的零点与极点的性质，主要是要明确概念及极点的基本性质.

解　函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点相当于在 a 的去心邻域内：

$$\varphi(z)=\frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^m},\psi(z)=\frac{\psi_1(z)}{(z-a)^n} \qquad ①$$

其中 $\varphi_1(z)$ 与 $\psi_1(z)$ 在 a 点解析且 $\varphi_1(a)\neq 0,\psi_1(a)\neq 0$

1）由式 ① 可知

$$\varphi(z)\psi(z)=\frac{\varphi_1(z)\psi_1(z)}{(z-a)^{m+n}}$$

其中 $\varphi_1(z)\psi_1(z)$ 在 a 点解析，$\varphi_1(a)\psi_1(a)\neq 0$，故 a 为 $\varphi(z)\psi(z)$ 的 $m+n$ 级极点.

2）由式 ① 可知

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}}{(z-a)^{m-n}}$$

其中$\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$ 在 a 点解析（这要用到第一章习题 29 的结论，得出在 a 的邻域内 $\psi_1(z)\neq 0$），$\dfrac{\varphi_1(a)}{\psi_1(a)}\neq 0$. 于是当 $m>n$ 时，a 为$\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的 $m-n$ 级极点；当 $m=n$ 时，a 为$\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的可去奇点（解析点）；当 $m<n$ 时，a 为$\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的 $n-m$ 级零点.

3）由式 ① 可知

$$\varphi(z)+\psi(z)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_1(z)+(z-a)^{m-n}\psi_1(z)}{(z-a)^m}, & \text{当 } m>n \text{ 时}\\[2ex] \dfrac{\varphi_1(z)+\psi_1(z)}{(z-a)^m}, & \text{当 } m=n \text{ 时}\\[2ex] \dfrac{(z-a)^{n-m}\varphi_1(z)+\psi_1(z)}{(z-a)^n}, & \text{当 } m<n \text{ 时}\end{cases}$$

当 $m>n$ 时，$\varphi(z)+\psi(z)$ 表达式的分子在 a 点解析且当 $z=a$ 时，分子 $=\varphi_1(a)\neq 0$，从而 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 m 级极点.

当 $m=n$ 时，$\varphi(z)+\psi(z)$ 表达式的分子 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)$ 在 a 点解析，当且 $z=a$ 时，分子 $=\varphi_1(a)+\psi_1(a)$. 若 $\varphi_1(a)+\psi_1(a)\neq 0$，则 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 m 级极点；若 $\varphi_1(a)+\psi_1(a)=0$，则 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的低于 m 级的极点或可去奇点[此时，要根据 a 为 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)$ 的多少级零点来判断. 设 a 为 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)$ 的 l 级零点，等价地 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)=(z-a)^l h(z)$，$h(z)$ 在 a 解析且 $h(a)\neq 0$，则 $\varphi(z)+\psi(z)=\dfrac{\varphi_1(z)+\psi_1(z)}{(z-a)^m}=\dfrac{h(z)}{(z-a)^{m-l}}$. 当 $l<m$ 时 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 $m-l$ 级极点；当 $l>m$ 时 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 $l-m$ 级零点(解析点)；当 $l=m$ 时 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的可去奇点(解析点)，所以当 $\varphi_1(a)+\psi_1(a)=0$ 时 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)=\dfrac{\varphi_1(z)+\psi_1(z)}{(z-a)^m}$ 的低于 m 级的极点或可去奇点(解析点)].

当 $m<n$ 时，$\varphi(z)+\psi(z)$ 表达式的分子在 a 点解析，且当 $z=a$ 时，分子 $=\psi_1(a)\neq 0$. 从而 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 n 级极点.

在 a 分别为 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 的 m 级与 n 级零点的情形，只要在 a 的邻域内用

$$\varphi(z)=(z-a)^m\varphi_1(z),\quad \psi(z)=(z-a)^n\psi_1(z)$$

代替式 ①，类似讨论即可.

◎7. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处有一个二级极点；这个函数又有下列罗朗展开式：

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\cdots+\frac{1}{(z-1)^5}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{1}{(z-1)^3},$$

$$|z-1|>1$$

所以“$z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点”;又其中不含 $(z-1)^{-1}$ 幂,因此 $\mathrm{Res}[f(z),1]=0$,这些说法对吗?

分析　极点的级数,罗朗展开式,本性奇点等的概念与性质,考查知识是否牢固.

解　这些说法不对.利用罗朗展开式判定奇点 $z=1$ 的类型及确定 $\mathrm{Res}[f(z),1]$ 时,只能用函数 $f(z)$ 在 $z=1$ 的去心邻域内的罗朗展开式.对 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 而言,应考虑在 $0<|z-1|<1$ 内的罗朗展开式:

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)+1}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}$$
$$=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-\cdots,$$
$$0<|z-1|<1$$

这样才有正确的结论:$z=1$ 为 $\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 的二级极点,$\mathrm{Res}\left[\dfrac{1}{z(z-1)^2},1\right]=-1$.此题中依据 $|z-1|>1$ 内的罗朗展开式得到的结论是不正确的.

○ 8. 求下列函数 $f(z)$ 在有限奇点处的留数:

1) $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$;　2) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$;　3) $\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$;

4) $\dfrac{z}{\cos z}$;　5) $\cos\dfrac{1}{1-z}$;　6) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

7) $\dfrac{1}{z\sin z}$;　8) $\dfrac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}$.

解　1) 函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-2z}=\dfrac{z+1}{z(z-2)}$ 有一级极点:0,2,其留数分别为

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z+1}{z-2}=-\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{z+1}{z}=\frac{3}{2}$$

2）在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内，由展开式

$$\frac{1-e^{2z}}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left\{1-\left[1+2z+\frac{1}{2!}(2z)^2+\frac{1}{3!}(2z)^3+\cdots\right]\right\}$$

$$=-\frac{2}{z^3}-\frac{2}{z^2}-\frac{4}{3}\frac{1}{z}-\frac{2}{3}-\cdots$$

易知 $z=0$ 为 $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的三级极点且 $\operatorname{Res}[f(z),0]=-\frac{4}{3}$.

3）函数 $f(z)=\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}=\frac{1+z^4}{(z-i)^3(z+i)^3}$ 有三级极点：$\pm i$，其留数分别为

$$\operatorname{Res}[f(z),i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}[(z-i)^3f(z)]''$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left[\frac{1+z^4}{(z+i)^3}\right]''$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{-12z^2+12}{(z+i)^5}=-\frac{3}{8}i$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}[(z+i)^3f(z)]''$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}\left[\frac{1+z^4}{(z-i)^3}\right]''$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\frac{-12z^2+12}{(z-i)^5}=\frac{3}{8}i$$

4）函数 $f(z)=\frac{z}{\cos z}$ 有一级极点 $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$（分母的一级零点），其留数分别为

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{\cos z},k\pi+\frac{\pi}{2}\right]=\left.\frac{z}{(\cos z)'}\right|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}}{-\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=(-1)^{k+1}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

5) 在 $z=1$ 的去心邻域 $0<|z-1|<+\infty$ 内,由展开式

$$\cos\frac{1}{1-z}=\cos\frac{1}{z-1}$$

$$=1-\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{(z-1)^4}-\cdots$$

可知 $z=1$ 为 $\cos\dfrac{1}{1-z}$ 的本性奇点且

$$\operatorname{Res}\left[\cos\frac{1}{1-z},1\right]=0.$$

6) 在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内,由展开式

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}-\cdots\right)$$

$$=z-\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^3}-\cdots$$

可知 $z=0$ 为 $z^2\sin\dfrac{1}{z}$ 的本性奇点且

$$\operatorname{Res}\left[z^2\sin\frac{1}{z},0\right]=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}.$$

7) 函数 $z\sin z$ 以 $z=0$ 为二级零点,以 $z_k=k\pi$ 为一级零点,所以函数$\dfrac{1}{z\sin z}$ 有二级极点 $z=0$ 及一级极点 $z_k=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$,其留数分别为

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\sin z},k\pi\right]=\left.\frac{\frac{1}{z}}{(\sin z)'}\right|_{z=k\pi}$$

$$=\frac{1}{k\pi\cos k\pi}=\frac{(-1)^k}{k\pi}$$

$$(k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\sin z},0\right]=\lim_{z\to0}\left(z^2\cdot\frac{1}{z\sin z}\right)'$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{z^2}\cdot\left(\frac{z}{\sin z}\right)^2$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{z^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{z\ \sin z}{2z} = 0$$

8) 函数$\frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}$以$z_k = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$为一级极点(因为$\mathrm{ch}z$以$z_k$为一级零点,且$\mathrm{sh}z_k\neq 0$)($k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$),其留数分别为

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z},\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]=\left.\frac{\mathrm{sh}z}{(\mathrm{ch}z)'}\right|_{x=(k+\frac{1}{2})\pi i} = 1$$

$$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

◎9. 计算下列积分(利用留数,圆周均取正向):

1) $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$; 2) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z$;

3) $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z$(其中$m$为整数);

4) $\int_{|z-2i|=1}\mathrm{th}z\mathrm{d}z$; 5) $\oint\limits_{|z|=3}\mathrm{tg}\pi z\mathrm{d}z$;

6) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\mathrm{d}z$(其中$n$为正整数,且$|a|\neq 1$,$|b|\neq 1$,$|a|<|b|$).[提示:试就$|a|$,$|b|$与1的大小关系分别进行讨论].

分析 利用留数求积分,留数定理的内容只要掌握,求解较简单.

解 1) 由留数定理 $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z},0\right]$. 而$z=0$为$\frac{\sin z}{z}$的可去奇点,$\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z},0\right]=0$,所以积分值为零.

2) 由留数定理

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2},1\right]$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\right]'$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1} 2e^{2z} = 4\pi i e^2$$

3）由

$$\frac{1-\cos z}{z^m}$$

$$= \frac{1}{z^m}\left[1-\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+\cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{z^m}\left(\frac{1}{2!}z^2-\frac{1}{4!}z^4+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}z^{2n}+\cdots\right)$$

$$0<|z|<+\infty$$

易知，当 m 为偶数时，上式中不含 z^{-1} 项，即 $c_{-1}=0$；当 m 为奇数，即 $m=2n+1$ 时，上式中 $c_{-1}=\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$，而当 $m\leqslant 2$ 时，上式无负幂项，$c_{-1}=0$. 故

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^m},0\right] = \begin{cases}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}, & \text{当 } m=2n+1,n=1,2,3,\cdots \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } m \text{ 为其它整数或 } 0 \text{ 时}\end{cases}$$

再由留数定理得

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1-\cos z}{z^m}dz = 2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^m},0\right]$$

$$= \begin{cases}\frac{2\pi i(-1)^{n+1}}{(2n)!}, & \text{当 } m=2n+1,n=1,2,3,\cdots \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } m \text{ 为其它整数或 } 0 \text{ 时}\end{cases}$$

4）由第 8 题 8）小题可知函数 $\operatorname{th}z=\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}$ 有一级极点 $z_k=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 且 $\operatorname{Res}[\operatorname{th}z,z_k]=\operatorname{Res}[\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z},z_k]=1$. 而 $z_0=\frac{\pi i}{2}$ 在 $|z-2i|=1$ 内，所以由留数定理

$$\oint_{|z-2i|=1} \operatorname{th}z dz = 2\pi i\operatorname{Res}[\operatorname{th}thz,z_0] = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i$$

5) 函数 $\mathrm{tg}\pi z=\dfrac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$ 有一级极点 $z_k=k+\dfrac{1}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)[\cos\pi z_k=0$ 且 $(\cos\pi z)'\Big|_{z=z_k}\neq 0$ 即 z_k 为 $\cos\pi z$ 的一级零点且 $\sin\pi z_k\neq 0]$ 且 $\mathrm{Res}[\mathrm{tg}\pi z,z_k]=\dfrac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\Big|_{z=z_k}=-\dfrac{1}{\pi}$. 而 $k=0,\pm 1,\pm 2,-3$ 时，$z_0=\dfrac{1}{2},z_1=\dfrac{3}{2},z_{-1}=-\dfrac{1}{2}$，$z_2=\dfrac{5}{2},z_{-2}=-\dfrac{3}{2},z_{-3}=-\dfrac{5}{2}$，这 6 个极点在 $|z|=3$ 内，所以由留数定理

$$\oint_{|z|=3}\mathrm{tg}\pi z\mathrm{d}z=2\pi i\left\{\sum_{k=-2}^{2}\mathrm{Res}[\mathrm{tg}\pi z,z_k]+\mathrm{Res}[\mathrm{tg}\pi z,z_{-3}]\right\}=2\pi i\cdot 6\cdot\frac{-1}{\pi}=-12i$$

6) 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$ 有两个 n 级极点 a 与 b，其留数分别为

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),a]&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^nf(z)]^{(n-1)}\\&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{1}{(z-b)^n}\right]^{(n-1)}\\&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(z-b)^{2n-1}}\\&=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!(a-b)^{2n-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),b]&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to b}[(z-b)^nf(z)]^{(n-1)}\\&=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!(b-a)^{2n-1}}\end{aligned}$$

（只须在上式中把 a,b 互换）

① 当 $1<|a|<|b|$ 时，极点 a,b 均在 $|z|=1$ 的外部，即 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上及其内部解析，故积分 $\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z=0$.

② 当 $|a|<1<|b|$ 时，$f(z)$ 在 $|z|=1$ 内只有极点 a，由留数定理 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}[f(z),a]$

$$=\frac{(-1)^{n-1}2\pi i(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$$

③ 当 $|a|<|b|<1$ 时，$f(z)$ 在 $|z|=1$ 内有极点 a 与 b. 由留数定理 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)^n}$

$$=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),a]+\mathrm{Res}[f(z),b]\}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!(a-b)^{2n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!(b-a)^{2n-1}}\right\}=0$$

◎10. 判断 $z=\infty$ 是下列函数的什么奇点？并求出在 ∞ 的留数：

1) e^{1/z^2}； 2) $\cos z-\sin z$； 3) $\frac{2z}{3+z^2}$.

分析 判断函数的奇点，并求留数，利用留数定理即可.

解 1) 在 ∞ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内

$$e^{1/z^2}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^4}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{2n}}+\cdots$$

展开式中无 z 的正幂项也无 $\frac{1}{z}$ 项，所以 $z=\infty$ 是函数 e^{1/z^2} 的可去奇点且 $\mathrm{Res}[e^{1/z^2},\infty]=-c_{-1}=0$.

2) 在 ∞ 的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 内

$$\cos z-\sin z=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)-\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)$$

$$=1-z-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\cdots$$

展开式中有无穷多个 z 的正幂项而无 $\frac{1}{z}$ 项，所以 $z=\infty$ 是 $\cos z-\sin z$ 的本性奇点且 $\mathrm{Res}[\cos z-\sin z,\infty]=-c_{-1}=0$.

3) 在 ∞ 的去心邻域 $\sqrt{3}<|z|<+\infty$ 内

$$\frac{2z}{3+z^2}=\frac{2}{z}\frac{1}{1+\frac{3}{z^2}}=\frac{2}{z}\left(1-\frac{3}{z^2}+\cdots\right)=\frac{2}{z}-\frac{6}{z^3}+\cdots$$

展开式中无 z 的正幂项且 $c_{-1}=2$，所以 $z=\infty$ 是 $\frac{2z}{3+z^2}$ 的可去奇点且 $\mathrm{Res}\left[\frac{2z}{3+z^2},\infty\right]=-c_{-1}=-2$.

○ 11. 求 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$ 的值，如果

1) $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$；　2) $f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$.

解　1) 函数 $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$ 在扩充复平面上有奇点：$\pm1,\infty$，而 ±1 为 $f(z)$ 的一级极点且

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{e^z}{z+1}=\frac{1}{2}e$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-1]=\lim_{z\to-1}(z+1)f(z)$$

$$=\lim_{z\to-1}\frac{e^z}{z-1}=-\frac{1}{2}e^{-1}$$

所以由 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]+\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]=0$ 得

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]\}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-1}-e)=-\mathrm{sh}1$$

2) 由公式 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0]$，而

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{z^4}{(1+z)^4(1-4z)}$$

以 $z=0$ 为可去奇点. 所以

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]=0$$

○12. **计算下列各积分，C 为正向圆周：**

1) $\oint_C \dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz,\quad C:|z|=3;$

2) $\oint_C \dfrac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz, C:|z|=2;$

3) $\oint_C \dfrac{z^{2n}}{1+z^n}dz$（$n$ **为一正整数**），$C:|z|=r>1.$

解　1）**函数** $f(z)=\dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ **在圆周** $C:|z|=3$ **的内部有** 6 **个孤立奇点：**$\pm i,\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}(k=0,1,2,3)$（**均为分母的零点**），**而在** C **外部仅有孤立奇点** $z=\infty$. **由函数在扩充复平面上这** 7 **个奇点处留数之和为零及留数定理可知**

$$\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz=-2\pi i\operatorname{Res}[f(z),\infty]$$

$$=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3},0\right]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 0}z\cdot\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3}=2\pi i$$

2）**与上题** 1）**类似，**

$$\oint_C \frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz=-2\pi i\operatorname{Res}[f(z),\infty]$$

$$=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$$

$$=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^4(1+z)},0\right]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 0}\left[z^4\cdot\frac{e^z}{z^4(1+z)}\right]'''$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{3!}\cdot(-2)=\frac{-2\pi i}{3}$$

3）**与** 1）**题解答类似**

$$\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}dz = -2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right]$$

而在 ∞ 的去心邻域 $1<|z|<+\infty$ 内

$$\frac{z^{2n}}{1+z^n} = z^n \frac{1}{1+\dfrac{1}{z^n}} = z^n\left(1-\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{2n}}-\frac{1}{z^{3n}}+\cdots\right)$$

$$= z^n - 1 + \frac{1}{z^n} - \frac{1}{z^{2n}} + \cdots$$

展开式中正幂项最高次幂为 z^n，且 $\frac{1}{z}$ 项的系数

$C_{-1} = \begin{cases} 1, & \text{当 } n=1 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}\end{cases}$，所以 ∞ 为 $\frac{z^{2n}}{1+z^n}$ 的 n 级极点.

且 $\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right] = -C_{-1} = \begin{cases} -1, & \text{当 } n=1 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}\end{cases}$

故

$$\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}dz = -2\pi i\cdot(-C_{-1}) = \begin{cases} 2\pi i, & \text{当 } n=1 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}\end{cases}$$

○13. 计算下列积分：

1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin\theta}d\theta$；　2) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta (a>b>0)$；

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$；　4) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$；

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx$；　6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}dx$.

解　1) 令 $z=e^{i\theta}$，则 $dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta$，$d\theta = \frac{dz}{iz}$. 于是

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5+3\dfrac{z^2-1}{2iz}}\frac{dz}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2}{3z^2+10iz-3}dz$$

$$= \frac{2}{3}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(z+\dfrac{i}{3}\right)(z+3i)}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{z+3i}\bigg|_{z=-\frac{i}{3}} = \frac{\pi}{2}$$

2）令 $z = e^{i\theta}$，则 $d\theta = \frac{dz}{iz}$，$\sin\theta = \frac{z^2-1}{2iz}$，$\cos z = \frac{z^2+1}{2z}$. 于是 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta} d\theta = \frac{i}{2} \oint\limits_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)} dz$. 函数 $f(z) = \frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)}$ 在 $|z| = 1$ 内有一个二级极点 0 及一个一级极点 $z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$，其留数分别为

$$\mathrm{Res}[f(z),0] = \lim_{z\to 0}(z^2 f(z))' = \lim_{z\to 0}\left[\frac{(z^2-1)^2}{bz^2+2az+b}\right]'$$

$$= -\frac{2a}{b^2}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1] = \frac{\frac{(z^2-1)^2}{z^2}}{(bz^2+2az+b)'}\bigg|_{z=z_1} = \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

从而由留数定理得

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\sin\theta} d\theta = \frac{i}{2} \cdot 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0] + \mathrm{Res}[f(z),z_1]\}$$

$$= \frac{2\pi}{b^2}(a - \sqrt{a^2-b^2})$$

3）函数 $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ 分母的次数比分子的次数高四次，且在实轴上不为零，而 $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ 在上半平面有二级极点 i，由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi \mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^2}, i\right]$$

$$= 2\pi \mathrm{i} \cdot \left[(z-i)^2 \cdot \frac{1}{(1+z^2)^2}\right]'\bigg|_{z=i}$$

$$= 2\pi \mathrm{i}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]'\bigg|_{z=i}$$

$$= 2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2}$$

4）在上半平面上，函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{1+z^4}$ 有两个一级极点：$z_0=e^{\frac{\pi}{4}i}$ 与 $z_1=e^{\frac{3\pi}{4}i}$（均为 $z^4+1=0$ 的根，即 $z_k=\sqrt[4]{-1}=e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}$（$k=0,1,2,3$）），其留数分别为

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\left.\frac{z^2}{(1+z^4)'}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=z_0}$$

$$=\frac{1}{4z_0}=\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=\left.\frac{z^2}{(1+z^4)'}\right|_{z=z_1}=\frac{1}{4z_1}=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),z_0]+\mathrm{Res}[f(z),z_1]\}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i}+\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

注意到被积函数为偶函数，可知

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

5）函数 $\dfrac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$ 在上半平面有一级极点：$-2+i$（分母的一级零点）且

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5},-2+i\right]=\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+4z+5)'}\right|_{z=-2+i}$$

$$=\frac{e^{-1-2i}}{2i}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{e}(\cos 2-i\sin 2)$$

由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}dx=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5},-2+i\right]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{e}(\cos 2-i\sin 2)$$

$$=\frac{\pi}{e}(\cos 2-i\sin 2)$$

两边取实部得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\mathrm{e}}\cos 2$$

6）由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{ix}}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{1+z^2},i\right]$$

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{(1+z^2)'}\right|_{z=i}=\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1}$$

两边取虚部得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\mathrm{e}}$$

● 14. 试用图 5－2 中的积分路线，求积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的值.

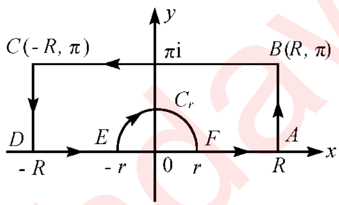

图　5－2

分析　沿指定路径求积分，一般分段求，由复积分计算公式及积分不等式即可求出.

解　函数$\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}$在如图 5－2 的路线$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+C_r+\overline{FA}$上及其内部解析，由柯西－古萨定理

$$\int_{\overline{AB}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{\overline{BC}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{\overline{CD}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{\overline{DE}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+$$

$$\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{\overline{FA}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=0 \qquad ①$$

由复积分计算公式

$\int_{\overline{AB}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=\int_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(R+iy)}}{R+iy}(R+iy)'\mathrm{d}y$，再由积分不等式，

$$\left|\int_{\overline{AB}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_{0}^{\pi}\left|\frac{\mathrm{e}^{-y+Ri}}{R+iy}i\right|\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{e^{-y}}{\sqrt{R^2 + y^2}} dy \leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{-y}}{R} dy$$

$$= \frac{1 - e^{-\pi}}{R} \to 0(\text{当 } R \to +\infty) \qquad ②$$

同样

$$\left| \int_{\overline{CD}} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i(-R+iy)}}{-R+iy} (-R+iy)' dy \right|$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} \left| \frac{e^{-y-Ri}}{-R+iy} \right| dy$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{e^{-y}}{\sqrt{R^2 + y^2}} dy \xrightarrow{R \to +\infty} 0 \qquad ③$$

又

$$\int_{\overline{BC}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{R}^{-R} \frac{e^{i(x+\pi i)}}{x + \pi i} (x + \pi i)' dx$$

$$= -\int_{-R}^{R} \frac{e^{-\pi + xi}}{x + \pi i} dx$$

$$= -e^{-\pi} \left\{ \int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{x^2 + \pi^2} dx - \pi i \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2 + \pi^2} dx \right\} \qquad ④$$

而由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + \pi^2} dx = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{z e^{iz}}{z^2 + \pi^2}, \pi i \right] = \pi i e^{-\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + \pi^2} dx = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2 + \pi^2}, \pi i \right] = e^{-\pi}$$

代入式 ④ 即知

$$\int_{\overline{BC}} \frac{e^{iz}}{z} dz \xrightarrow{R \to +\infty} 0 \qquad ⑤$$

再注意到

$$\int_{\overline{DE}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\overline{FA}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

$$= -\int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

$$= 2i \int_{r}^{R} \frac{\sin x}{x} dx \qquad ⑥$$

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\pi i[\text{教材例 4 中}(5.3.5)\text{式}] \quad ⑦$$

在式 ① 中令 $R\to+\infty, r\to 0^+$，并利用式 ②，③，⑤ ～ ⑦ 可得

$$2i\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\pi i=0,$$

即
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

小结　掌握沿指定路径求积分的方法.

○ *15. 利用公式 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$，计算下列积分：

1) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{1}{z}dz$；　　2) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{z}{z^2-1}dz$；

3) $\oint\limits_{|z|=3}\operatorname{tg}z\,dz$；　　4) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)}dz$.

解　1) 设 $f(z)=z$，则 $f(z)$ 在 $|z|=3$ 内零点总个数 $N=1$，极点总个数 $P=0$. 所以

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{1}{z}dz=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$
$$=2\pi i(N-P)=2\pi i(1-0)=2\pi i$$

2) 设 $f(z)=z^2-1$，则 $f(z)$ 在 $|z|=3$ 内有一级零点 ± 1，无极点，即 $N=2, P=0$. 所以

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{z}{z^2-1}dz=\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i(N-P)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i(2-0)=2\pi i$$

3) 设 $f(z)=\cos z$，则 $f(z)$ 在 $|z|=3$ 内有两个一级零点 $\pm\frac{\pi}{2}$，无极点，即 $N=2, P=0$.

所以

$$\oint\limits_{|z|=3}\operatorname{tg}z\,dz=-\oint\limits_{|z|=3}\frac{-\sin z}{\cos z}dz=-\oint\limits_{|z|=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

$$= -2\pi i(N-P) = -4\pi i$$

4) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)}\mathrm{d}z = \oint_{|z|=3} \frac{1}{z}\mathrm{d}z - \oint_{|z|=3} \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z$，而 z 和 $z+1$ 在 $|z|=3$ 内分别只有一个零点而无极点，故

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i, \quad \oint_{|z|=3} \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z = 2\pi i$$

从而

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)}\mathrm{d}z = 0$$

● $*$16. 设 C 为区域 D 内的一条正向简单闭曲线，它的内部全含于 D，z_0 为 C 内一点. 如果 $f(z)$ 在 D 内解析，且 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)\neq 0$. 在 C 内 $f(z)$ 无其它零点. 试证：$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = z_0$.

分析　解析函数的积分问题，分析积分函数的点，再利用留数定理，即可解决.

证明　被积函数 $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ 在 C 内仅有一个一级极点 z_0（因 z_0 为分母的一级零点），而由分式给出的函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$，当 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 z_0 点解析且 z_0 为 $Q(z)$ 的一级零点时，$\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ 成立. 注意：当 $P(z_0)\neq 0$ 时，z_0 为 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的一级极点，此公式在书上被列为留数的计算规则 Ⅲ，当 $P(z_0)=0$ 时，z_0 为 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的可去奇点，$\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right]=0$，此规则 Ⅲ 同样成立. 于是由留数定理

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \mathrm{Res}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}, z_0\right]$$

$$= \left.\frac{zf'(z)}{(f(z))'}\right|_{z=z_0} = z_0$$

小结　解析函数的积分问题，要熟练掌握留数定理.

○ $*$17. 设 $\varphi(z)$ 在 C：$|z|=1$ 上及其内部解析，且在 C 上 $|\varphi(z)|<$

1. 证明 C 内只有一个点 z_0 使 $\varphi(z_0)=z_0$.

证明　设 $f(z)=-z, g(z)=\varphi(z)$,则在 C 上:

$$|g(z)|=|\varphi(z)|<1=|-z|=|f(z)|$$

由儒歇(Rouche)定理,$f(z)$ 与 $f(z)+g(z)=\varphi(z)-z$ 在 C 内零点个数相同. 而 $f(z)=-z$ 在 $C:|z|=1$ 内只有一个零点,所以 $f(z)+g(z)=\varphi(z)-z$ 在 C 内只有一个零点记为 z_0. 即 C 内只有一个点 z_0 使 $\varphi(z_0)-z_0=0$ 或 $\varphi(z_0)=z_0$.

◎ *18. 证明:当 $|a|>\mathrm{e}$ 时,方程 $\mathrm{e}^z-az^n=0$ 在单位圆 $|z|=1$ 内有 n 个根.

分析　方程的根与区域的关系,主要考查对儒歇定理的掌握程度.

证明　设 $f(z)=-az^n, g(z)=\mathrm{e}^z, C:|z|=1$,则在 C 上:$|g(z)|=|\mathrm{e}^z|\leqslant \mathrm{e}^{|z|}=\mathrm{e}<|a|=|-az^n|=|f(z)|$,即 $|g(z)|<|f(z)|$. 由儒歇定理,$f(z)=-az^n$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 C 内零点个数相同. 而 $f(z)$ 在 C 内有 n 个零点,所以 $f(z)+g(z)=\mathrm{e}^z-az^n$ 在 C 内有 n 个零点,即方程 $\mathrm{e}^z-az^n=0$ 在 $|z|=1$ 内有 n 个根.

◎ *19. 证明方程 $z^7-z^3+12=0$ 的根都在圆环域 $1<|z|<2$ 内.

分析　方程的根与区域的关系,主要考查对儒歇定理的掌握程度.

证明　设 $f(z)=z^7, g(z)=-z^3+12$,则在圆周 $|z|=2$ 上:$|f(z)|=2^7=128$, $|g(z)|=|-z^3+12|\leqslant |z|^3+12=2^3+12=20$. 即在 $|z|=2$ 上,$|f(z)|>|g(z)|$,由儒歇定理,$f(z)=z^7$ 与 $f(z)+g(z)=z^7-z^3+12$ 在 $|z|=2$ 内零点个数相同,即方程 $z^7-z^3+12=0$ 在 $|z|=2$ 内有 7 个零点.

又当 $|z|\leqslant 1$ 时 $|z^7-z^3+12|\geqslant 12-|z^7-z^3|\geqslant 12-|z|^7-|z|^3\geqslant 12-1-1=10>0$,即当 $|z|\leqslant 1$ 时方程 $z^7-z^3+12=0$ 无根. 故此方程的根都是在圆环域 $1<|z|<2$ 内.

第六章

共形映射

内容提要

一、解析函数的导数的几何意义

1. **两条曲线在交点的夹角**

曲线 $C: z=z(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$，**若** $\alpha < t_0 < \beta$，**且** $z'(t_0) \neq 0$，**那么向量** $z'(t_0)$ **与曲线** C **相切于点** $z_0 = z(t_0)$，**而** $\mathrm{Arg}\, z'(t_0)$ **表示这条切线的正向与** x **轴正向之间的夹角，若曲线** C_1 **与** C_2 **相交一点，它们正向的夹角定义为此两条曲线在交点处的两条切线正向之间的夹角．**

2. **导数的几何意义**

设 $f(z)$ **为区域** D **的解析函数，**C **为** D **内的一条光滑曲线，设** $f(z)$ **把** C **映为一条光滑曲线** Γ.

(1) $z_0 \in C$ **若导数** $f'(z_0) \neq 0$，**则导数的辐角** $\mathrm{Arg}\, f'(z_0)$ **是曲线** C **经过** $w=f(z)$ **映射成** Γ **后，在** z_0 **处的转动角．这个转动角的大小跟曲线** C **的形状与方向无关．**

(2) **若** $w=f(z)$ **为复映射，**C_1, C_2 **为任何相交于** z_0 **的两条曲线，经过映射** $w=f(z)$，C_1, C_2 **变为** Γ_1, Γ_2，**若** C_1 **与** C_2 **在** z_0

的夹角等于 Γ_1 与 Γ_2 在 $f(z_0)$ 的夹角，则称映射在点 z_0 具有保角性.

(3)导数的模 $|f'(z_0)|$ 表示曲线 C 经过 $\omega=f(z)$ 映射成 Γ 后在点 z_0 的伸缩率，它与线 C 的形态及方向无关，我们说这种映射具有伸缩率不变性.

二、共形映射

若 $w=f(z)$ 在区域 D 内是一一的(称为单叶的)保角的，则称 $w=f(z)$ 是 D 内的共形(或保形)映射.

定理 设 $w=f(z)$ 为区域 D 内的解析函数，$z_0\in D$.

(1)若 $f'(z_0)\neq 0$，则 $w=f(z)$ 在 z_0 处是保角的.

(2)若 $w=f(z)$ 在 D 内是一一的，则 $w=f(z)$ 将区域 D 共形映射为区域 $G=\{w|w=f(z),z\in D\}=f(D)$，并且它的反函数 $z=f^{-1}(w)$ 在 G 内是一一的解析函数，因而将区域 G 共形映射到区域 D.

三、分式线性映射

1. 分式线性映射

由
$$w=\frac{az+b}{cz+d}\qquad\left(\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0\right)\tag{①}$$
确定的映射称为分式线性映射.

因为 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 有单值的反函数 $z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$，且 $\begin{vmatrix}-d & b\\ c & -a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$，故式①的逆映射 $z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$ 也是分式线性映射.

2. 分式线性映射的分解

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

$$=\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}+\frac{a}{c}$$

故分式线性映射可以分解为以下四种基本映射的复合：

(1)平移　$w=z+b$.

(2)旋转　$w=e^{i\alpha}z$.

(3)伸缩　$w=rz(r>0)$.

(4)反演　$w=\frac{1}{z}$.

3. 分式线性映射的性质

(1)保角性：如果我们规定两条伸向无穷远的曲线在 $z=\infty$ 处的夹角，等于它们在映射 $\xi=\frac{1}{z}$ 下所映成的通过原点 $\xi=0$ 的两条象曲线的夹角，则分式线性映射是保角的.

(2)保圆性：如果我们把直线看做是经过无穷远点的圆周，则分式线性映射将圆周映射成圆周.

(3)保对称性：设 z_1、z_2 是关于圆周 C 的一对称点，分式线性映射把它们分别映成点 w_1、w_2 与圆周 Γ，则 w_1、w_2 关于 Γ 对称.

(4)保交比性

4. 惟一决定分式线性映射的条件

在 z 平面上任意给定三个相异的点 z_1,z_2,z_3，同样在 w 平面上任意给定三个相异的点 w_1,w_2,w_3，则存在惟一的分式线性映射把 $z_k(k=1,2,3)$ 依次映成 $w_k(k=1,2,3)$，其表示式为

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

四、几个初等函数所构成的映射

1. 幂函数及其反函数——根式函数

(1)幂函数 $w=z^n$($n\geqslant 2$ 为正整数)在复平面上除去原点 $z=0$ 外处处保角；它将 z 平面上以 $z=0$ 为顶点的角形域 $0<\arg z$

$<\theta_0$，映成 w 平面上 $w=0$ 为顶点的角形域 $0<\arg w<n\theta_0$（$\theta_0<\frac{2\pi}{n}$），张角为原来的 n 倍；它在角形域 $0<\arg z<\frac{2\pi}{n}$ 内是共形的．

（2）幂函数 $w=z^n$（$n\geqslant 2$ 为正整数）的功能是将角形域映成角形域，且张角扩大为原来的 n 倍．

（3）根式函数 $z=\sqrt[n]{w}$（一个单值分支）的性质与功能同幂函数 $w=z^n$ 完全相反．

2. 指数函数及其反函数——对数函数

（1）指数函数 $w=e^z$ 在复平上处处保角；它将 z 平面上的水平带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<a(a\leqslant 2\pi)$ 映成 w 平面上角形域 $0<\arg w<a$；它在水平带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<2\pi$ 内是共形的；它的功能是将水平带形域映成角形域．

（2）对数函数的性质与功能同指数函数相反．

典型例题与解题技巧

【例 1】 求将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 保形映射为圆 $|w-2i|<2$．内部的分式线性映射 $w=f(z)$，使它满足：

（1）$f(2i)=2i$；　　（2）$\arg f'(2i)=-\frac{\pi}{2}$.

解题分析 我们知道，分式线性映射 $\zeta=e^{i\theta}\frac{z-2i}{z+2i}$ 就可将上半平面映为单位圆 $|\zeta|=1$ 的内部，并且将 $2i$ 映为 $\zeta=0$，其中 θ 为待定实常数．只要再将单位圆 $|\zeta|=1$ 的圆心平移至 $w=2i$，半径伸长为原来的 2 倍，该单位圆内部就映为圆 $|w-2i|<2$ 的内部．最后利用条件（2）确定 θ 的值，就可得到所求的映射 $w=f(z)$.

解题过程 由于分式线性映射 $\zeta=e^{i\theta}\frac{z-2i}{z+2i}$ 将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映为单位圆 $|\zeta|=1$ 的内部，且 $z=2i$ 映为 $\zeta=0$；而 $w=2(\zeta$

$+i)$将$|\zeta|<1$映为$|w-2i|<2$,故分式线性映射

$$w=2\left(e^{i\theta}\frac{z-2i}{z+2i}+i\right)\qquad(\theta\text{为待定实数})$$

将上半平面$\mathrm{Im}(z)>0$映为圆$|w-2i|<2$内部,并且满足条件(1)(图6-1).

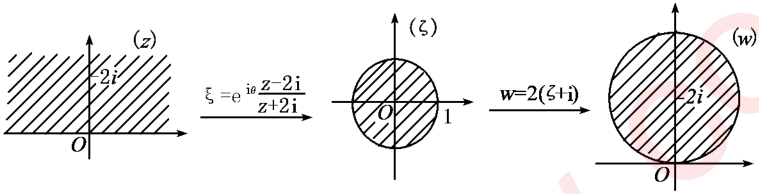

图 6-1

又因为

$$f'(2i)=2\left(e^{i\theta}\frac{z-2i}{z+2i}\right)'\Bigg|_{z=2i}=2e^{i\theta}\frac{4i}{(z+2i)^2}\Bigg|_{z=2i}$$

$$=-\frac{1}{2}ie^{i\theta},$$

所以$\arg f'(2i)=\theta-\dfrac{\pi}{2}$.

代入条件(2)得$\theta=0$,故$w=2\left(i+\dfrac{z-2i}{z+2i}\right)$即为所求的分式线性映射.

【例2】 求下列各区域到上半平面的一个共形互为单值映射.

(1)$|z+i|<2$, $\mathrm{Im}z>0$;

(2)$|z+i|>\sqrt{2}$, $|z-i|<\sqrt{2}$.

解题分析 这道题是基本的题型,但需要对各种变换几何意义的深刻理解.

解题过程 (1)先将区间$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$映成正实轴使$-\sqrt{3}$映成0,$\sqrt{3}$映成∞,0映为1,见图6-2(a).

此映射为

$$\zeta=-\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}$$

它把如图阴影域映为角形域,夹角为$\frac{\pi}{3}$. 见图 6－2(b).

再令

$$w=\zeta^3$$

则 $w=\zeta^3$ 把如图角形域映为上半平面. 所以所求映射为

$$w=\zeta^3=-\left(\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\right)^3$$

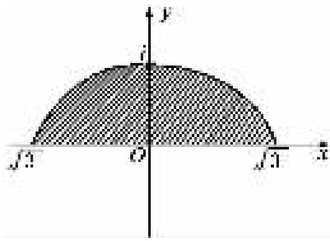

图 6－2(a)

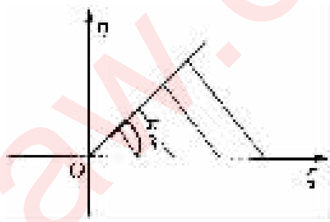

图 6－2(b)

(2)先将区间[－1,1]映成正实轴:

$-1\to 0,0\to 1,1\to\infty$

此映射为

$$w_1=-\frac{z+1}{z-1}$$

它将如图 6－2(c)阴影部分映成角形区域,其张角为 $\pi/2$.

再作映射 $w_2=w_1^2$ 将上述角形区域映射左半平面,再作映射 $w=-iw_2$,将左半平面映成上半平面. 如图 6－2(d)所示. 所以所求映射为

$$w=-iw_2=-iw_1^2=-i\left(-\frac{z+1}{z-1}\right)^2=-i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

【例 3】　求出将圆 $|z-4i|<2$ 映射成半平面 $\mathrm{Im}(w)>\mathrm{Re}(w)$ 的共形

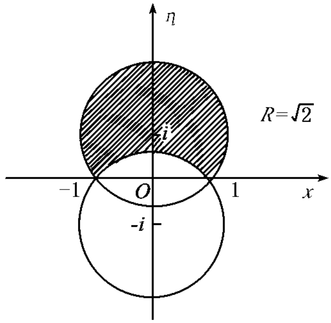

图 6－2(c)

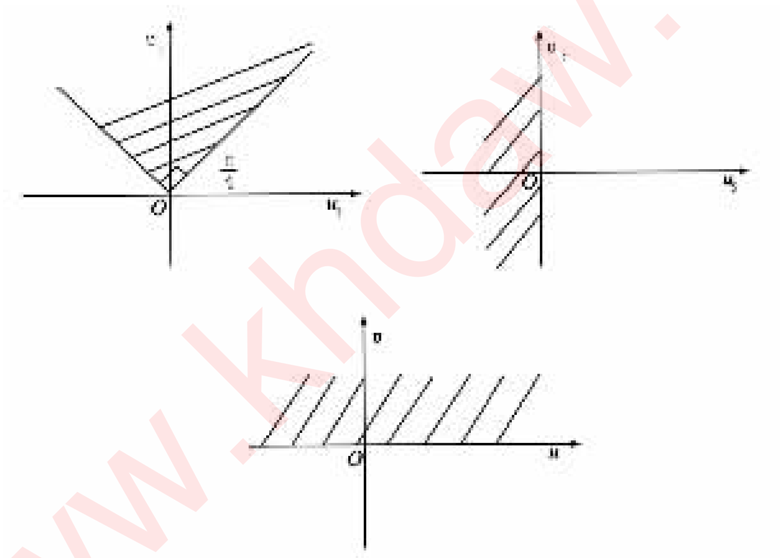

图 6－2(d)

映射 $w=f(z)$，且满足 $f(4i)=-4$，$f(2i)=0$.

解题分析 在 z 平面与 w 平面间插入两个“中间”平面，分别将 $|z-4i|<2$ 和 $\mathrm{Im}(w)>\mathrm{Re}(w)$ 映射成典型区域——单位圆和上半平面，以便利用公式，如图 6－3.

解题过程 设 $w_1=\dfrac{z-4i}{2}$，则映射 w_1 将 z 平面上圆 $|z-4i|<2$ 映射

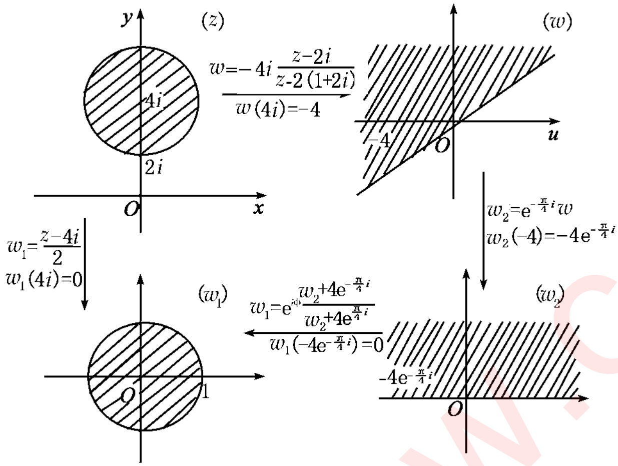

图 6—3

成 w_1 平面上单位圆 $|w_1|<1$，且 $w_1(4i)=0$.

设 $w_2=e^{-\frac{\pi}{4}i}w$，则映射 w_2 将 w 平面上的半平面 $\mathrm{Im}(w)>\mathrm{Re}(w)$映射成 w_2 平面上的上半平面 $\mathrm{Im}(w_2)>0$，且 $w_2(-4)=-4e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

再作从上半平面 $\mathrm{Im}(w_2)>0$ 到单位圆 $|w_1|<1$ 的共形映射，且将 $-4e^{-\frac{\pi}{4}i}$ 映射为坐标原点. 显然此映射为

$$w_1=e^{i\varphi}\frac{w_2+4e^{-\frac{\pi}{4}i}}{w_2+4e^{\frac{\pi}{4}i}}$$

将 $w_1=\dfrac{z-4i}{2}$，$w_2=e^{-\frac{\pi}{4}i}w$ 代入上式，得

$$\frac{z-4i}{2}=e^{i\varphi}\frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}w+4e^{-\frac{\pi}{4}i}}{e^{-\frac{\pi}{4}i}w+4e^{\frac{\pi}{4}i}}$$

即
$$\frac{z-4i}{2}=e^{i\varphi}\frac{w+4}{w+4i}$$

又　$f(2i)=0$，　故 $e^{i\varphi}=1$

所以　$\dfrac{z-4i}{2}=\dfrac{w+4}{w+4i}$，即　$w=-4i\dfrac{z-2i}{z-2(1+2i)}$

为所求的共形映射.

【例 4】 求一共形映射,将单位圆周 $|z|=1$ 内部在第一象限内的部分映射为单位圆内部.

解题分析 有人认为这个题很简单,$w=z^4$ 就是所求的映射.这是不对的,因为 $w=z^4$ 将题中给定的区域映射成沿正实轴的半径剪开后的单位圆内部.很多初学者容易犯这样的错误!为了将已知区域映射为单位圆内部,只要能将它映射成上半平面就行了.因此,只要先将它映射成第一象限.上半单位圆可以通过分式线性映射映成第一象限,因此,只要将已知区域映成上半单位圆就可以了,这件事可以利用幂 $w=z^2$ 来完成.下面我们沿着分析过程相反的程序一步一步地做,并将完成各步的映射复合起来,就可得到所求的映射.

解题过程 第一步,通过映射 $z_1=z^2$ 将已知区域映为上半单位圆;第二步,通过映射 $z_2=-\dfrac{z_1+1}{z_1-1}$将上半单位圆映为第一象限;第三步,通过映射 $z_3=z_2^2$ 将第一象限映成上半平面;最后,通过分式线性映射 $w=\dfrac{z_3-i}{z_3+i}$将上半平面映成单位圆内部(图 6—4).因此,所求的映射为

$$w=\frac{\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2-i}{\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2+i}=\frac{(z^2+1)^2-i(z^2-1)^2}{(z^2+1)^2+i(z^2-1)^2}$$

【例 5】 求把 z 平面上的区域 $D=\{z:|z|<1,|z+\sqrt{3}|>2\}$ 映为 w 平面上的单位圆的一个保角映射.

解题分析 注意本题只需求出满足题目要求的某个保角映射,而不是求把 D 映为 $|w|<1$ 的所有保角映射.

解题过程 由 $|z|=1$ 有 $|x+iy|=1$,从而有 $x^2+y^2=1$,关于 x 求导,得

$$2x+2yy'=0$$

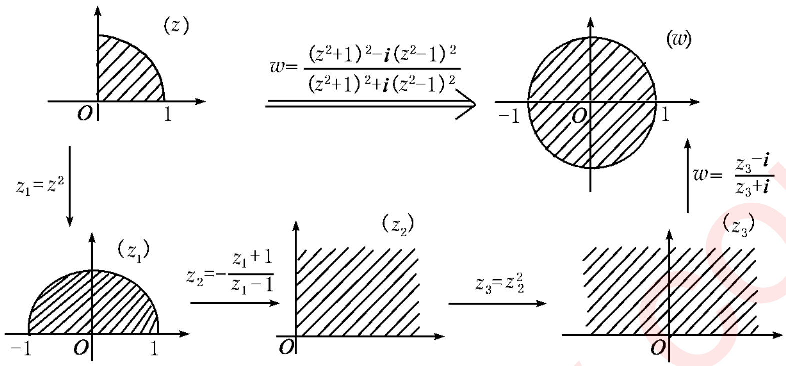

图 6—4

故

$$k_1 = y' = -x/y|_{(0,1)} = 0$$

同理，由 $|z+\sqrt{3}|=2$ 有 $k_2=-\sqrt{3}$，于是

$$\mathrm{tg}\ a = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} = \frac{-\sqrt{3}-0}{1+0\cdot(-\sqrt{3})} = -\sqrt{3}$$

所　　　　以 $a=-\pi/3$

即 D 是在 $z=-i,i$ 处张角为 $\pi/3$ 的月牙形区域．利用

$$\zeta = \frac{z-i}{z+i}$$

能把 D 映为 ζ 平面上开度为 $\pi/3$ 的顶点在原点的角域．适当旋转后可使此角域以正实轴为一边，另一边在第一象限内．利用幂函数可使它变为上半平面．最后把上半平面变到单位圆，把各个映射顺次复合，即得待求之映射（如图 6—5 所示）．最后有

$$w = \frac{\eta-i}{\eta+i} = \frac{\zeta^3-i}{\zeta^3+i} = \frac{e^{i\frac{5}{2}\pi}\zeta^3-i}{e^{i\frac{5}{2}\pi}\zeta^3+i} = \frac{\zeta^3-1}{\zeta^3+1}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^3-1}{\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^3+1} = \frac{(z-i)^3-(z+i)^3}{(z-i)^3+(z+i)^3}$$

此类题的解不是唯一的，还可从不同角度得到不同答案．

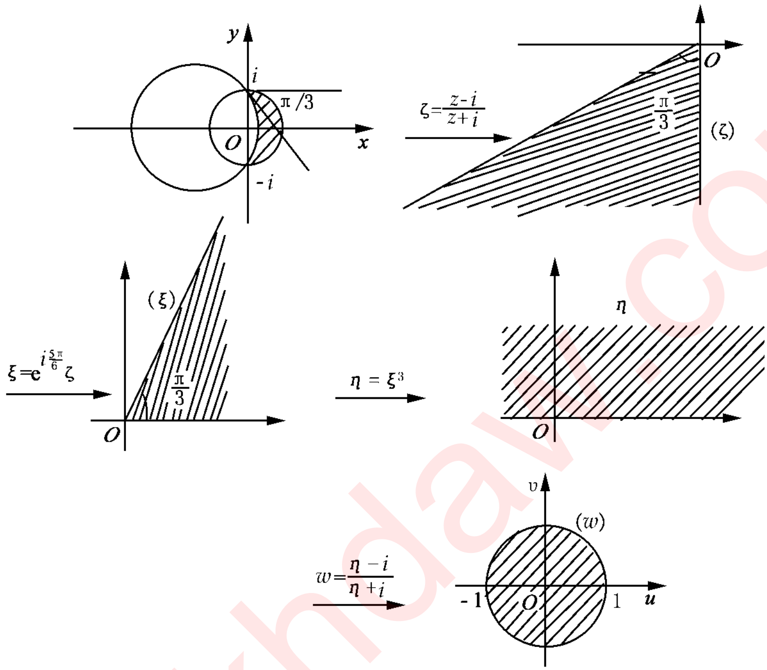

图 6—5

历年考研真题评析

【题 1】 求一个共形映射 $w=f(z)$，它把 z 平面上的区域 D：$\begin{cases}|z+1|<2\\|z-3|<2\sqrt{3}\end{cases}$ 映射为 w 平面的上半平面．（吉林大学 2005 年）

解题分析 本题的解法是一种比较通用的解法，先把区域 D 映射为角形域，再射到第 Ⅰ 象限，最后映射到上半平面．

解题过程 圆周 $|z+1|=2$ 与圆周 $|z-3|=2\sqrt{3}$ 的交点是 $z_1=-\sqrt{3}i$ 和 $z_2=\sqrt{3}i$，因此分式线性映射

$$w_1=\frac{z+\sqrt{3}\ i}{z-\sqrt{3}\ i}$$

$$\left(w_1(-\sqrt{3}\ i)=0,w_1(1)=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},w_1(\sqrt{3}\ i)=\infty\right)$$

把区域 D 共形映射为 w_1 平面的角形域：

$$\frac{2}{3}\pi<\arg w_1<\frac{7}{6}\pi$$

设
$$w_2=e^{-\frac{2}{3}\pi i}w_1$$

w_2 又将角形域 $\frac{2}{3}\pi<\arg w_1<\frac{7}{6}\pi$ 映射为第Ⅰ象限：$0<\arg w_2<\frac{\pi}{2}$，再将第Ⅰ象限 $0<\arg w_2<\frac{\pi}{2}$ 映射为上半平面 $0<\arg w<\pi$，从而

$$w=w_2^2=(e^{-\frac{2}{3}\pi i}w_1)^2=e^{-\frac{4}{3}\pi i}\left(\frac{z+\sqrt{3}i}{z-\sqrt{3}i}\right)^2$$

即为所求的一个共形映射，如图 6－6.

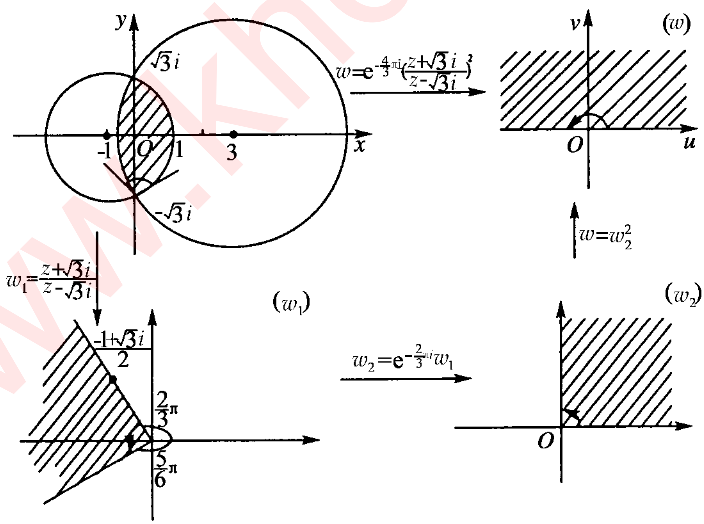

图 6－6

【题 2】 求一单叶共形映射 $w=f(z)$，将圆盘 $|z|<1$ 变为角形域 $\frac{\pi}{3}<\arg w<\frac{2}{3}\pi$.（浙江大学 2005 年）

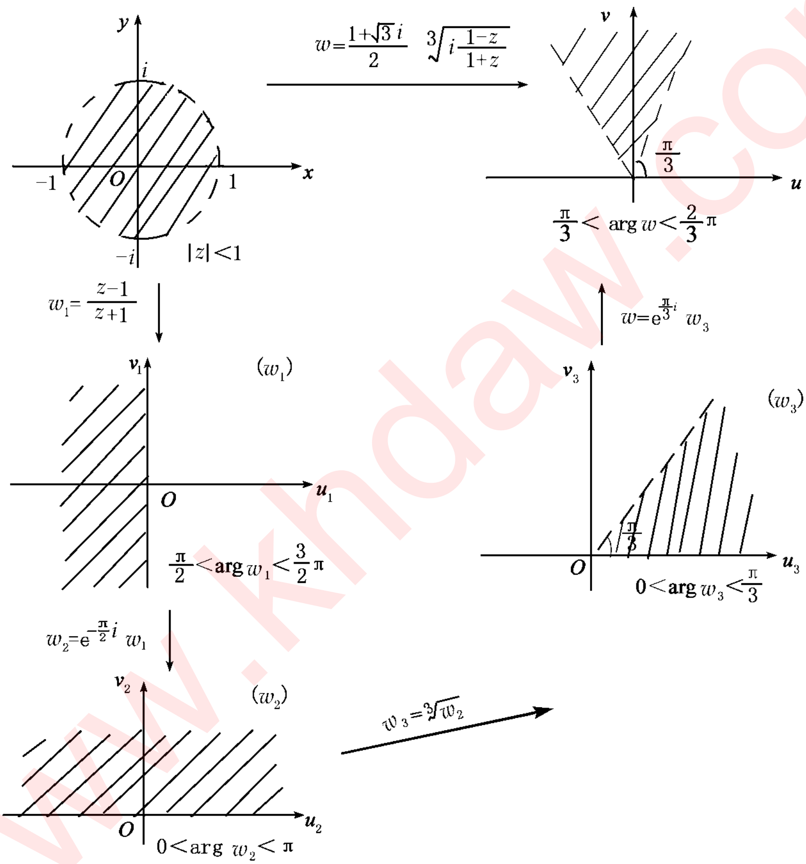

图 6—7

解题分析 本题的解法是先把单位圆映射到左半平面，再映射到上半平面，继而映射到第Ⅰ象限，最后映射到角形域.

解题过程 如图 6—7 所示.

【题 3】　试作一单叶解析函数 $w=f(z)$，把 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$，并且使 $f(0)=\frac{1}{2}$，$f'(0)>0$.（东北大学 2005 年）

解题分析　这里提供以下两种方法供参考，请体会它们的不同思路.

解题过程　解法 1　分式线性映射

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$，因为 $f(0)=\frac{1}{2}$

所以
$$\frac{1}{2}=-\alpha e^{i\theta} \tag{①}$$

又 $f'(0)>0$，所以
$$e^{i\theta}(1-|\alpha|^2)>0 \tag{②}$$

由式②得，$\theta=2k\pi$，将 $\theta=2k\pi$ 代入式①：$\alpha=-\frac{1}{2}$

故
$$w=\frac{z+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}z}=\frac{2z+1}{2+z}$$

为所求的单叶解析函数.

解法 2　先求出将 $|w|<1$ 映射为 $|z|<1$ 的分式线性映射 $z=f^{-1}(w)$，满足 $f^{-1}(\frac{1}{2})=0$，再求其逆映射 $w=f(z)$.

因为
$$f^{-1}(\frac{1}{2})=0$$

所以 $z=e^{i\theta}\dfrac{w-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}w}=e^{i\theta}\dfrac{2w-1}{2-w}$，$w=\dfrac{1+2ze^{-i\theta}}{2+ze^{-i\theta}}$，

$$w'(0)=\frac{3}{4}e^{-i\theta}>0$$

$$\theta=2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

故 $w=\dfrac{1+2z}{2+z}$ 为所求的单叶解析函数.

【题 4】 设在 $|z|<1$ 内，$f(z)$ 解析，并且 $|f(z)|<1$，但 $f(\alpha)=0$，其中 $|\alpha|<1$. 证明：在 $|z|<1$ 内，有不等式

$$|f(z)|\leqslant\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|$$

（东北大学 2005 年）

分析 分式线性映射 $w=\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ 在 $|z|<1$ 内解析，且将 $|z|<1$ 共形映射成 $|w|<1$，且 $w(\alpha)=0$. 其反函数 $z=\varphi^{-1}(w)$ 在 $|w|<1$ 内解析，将 $|w|<1$ 共形映射成 $|z|<1$，且 $\varphi^{-1}(0)=\alpha$.

证明 作复合函数 $\varphi(w)=f[\varphi^{-1}(w)]$，则 $\varphi(w)$ 在 $|w|<1$ 内解析，且 $\varphi(0)=f(\alpha)=0$

$$|\varphi(w)|=|f(\varphi^{-1}(w))|=|f(z)|<1$$

故 $\varphi(w)$ 满足施瓦兹引理的条件，由该引理得

$$|\varphi(w)|\leqslant|w|\quad(|w|<1)$$

即

$$|f(z)|\leqslant\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|\quad(|z|<1)$$

施瓦兹引理　如果函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析，并且满足条件 $f(0)=0$，$|f(z)|<1(|z|<1)$，则在单位圆 $|z|<1$ 内恒有 $|f(z)|\leqslant|z|$. 且有 $|f'(0)|\leqslant 1$.

课后习题全解

○1. 求 $w=z^2$ 在 $z=i$ 处的伸缩率和旋转角. 问：$w=z^2$ 将经过点 $z=i$ 且平行于实轴正向的曲线的切线方向映射成 w 平面上哪一个方向？并作图.

解 因为 $w'=2z$，$w'\Big|_{z=i}=2i$

所以伸缩率 $|w'(i)|=|2i|=2$

旋转角（即转动角）$\operatorname{Arg}w'(i)=\operatorname{Arg}(2i)=\dfrac{\pi}{2}$

因为 $w=z^2$ 且 $z_0=i$

所以 $w(i)=-1$,并由旋转角意义可知:

过 $z=i$ 且平行于实轴正向的曲线的切线方向 $\xrightarrow{w=z^2}$ 过 $u=-1$ 平行于虚轴的正向,如图 6－8.

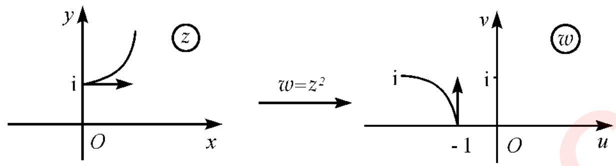

图 6－8

◎2. 一个解析函数所构成的映射在什么条件下具有伸缩率和旋转角的不变性? 映射 $w=z^2$ 在 z 平面上每一点都具有这个性质吗?

分析　映射的伸缩率与旋转角的不变性,以及具备这些性质的区域.

解　1)由第六章§1 节定理 1 知条件为:该解析函数的导数不等于 0;

2)因为 $w=z^2$　　所以 $w'=2z$

由使 $w'\Big|_{z=0}=2z\Big|_{z=0}=0$ 的点不具有该性质可得:

$w=z^2$ 在 $z\neq 0$ 处具有伸缩率与旋转角的不变性.

○3. 设 $w=f(z)$在 z_0 解析,且 $f'(z_0)\neq 0$. 为什么说:曲线 C 经过映射 $w=f(z)$后在 z_0 的转动角与伸缩率跟曲线 C 的形状和方向无关?

解　因为曲线 C 经过映射 $w=f(z)$后在 z_0 的转动角和伸缩率分别为 $\mathrm{Arg}(f'(z_0))$、$|f'(z_0)|$,只与 $w=f(z)$有关,所以与经过 z_0 的曲线 C 的形状及方向无关.

◎4. 在映射 $w=iz$ 下,下列图形映射成什么图形?

1)以 $z_1=i$,$z_2=-1$,$z_3=1$ 为顶点的三角形;

2)圆域 $|z-1|\leqslant 1$.

分析　图形在已知映射下映射成什么样的新图形,还是考查伸缩

率与旋转问题.

解 1)分别将 $z_1=i, z_2=-1, z_3=1$ 代入 $w=iz$ 得

$w_1=-1, w_2=-i, w_3=i$

因为 $w'=i\neq 0, |w'|=|i|=1$

所以 $w=iz$ 是整个复平面上的分式线性共形映射,具有保角性及保伸缩性,$|w|=|iz|=|z|$, $\mathrm{Arg}w=\mathrm{Arg}z+\frac{\pi}{2}$,辐角增加 $\frac{\pi}{2}$.

直线上的无穷远点会被映射成无穷远点.

$w=iz$ 将直线映射为直线.

映射成的图形是以 $w_1=-1, w_2=-i, w_3=i$ 为顶点的三角形. 如图 6—9(a).

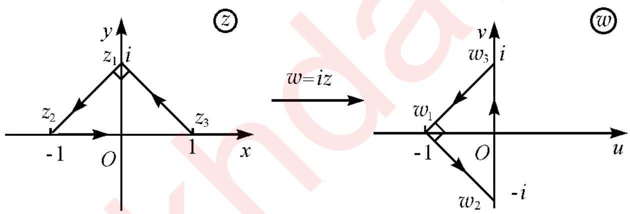

图 6—9(a)

2)设 $z=x+iy, w=u+iv$,则 $w=iz$

即
$$u+iv=i(x+iy)$$
$$u+iv=-y+ix$$

所以
$$u=-y, v=x$$

$$|z-1|\leqslant 1 \text{ 即}(x-1)^2+y^2\leqslant 1 \xrightarrow{w=iz} u^2+(v-1)^2\leqslant 1$$

即
$$|w-i|\leqslant 1$$

映射成如图 6—9(b).

○5. 证明:映射 $w=z+\frac{1}{z}$ 把圆周 $|z|=c$ 映射成椭圆:

$$u=\left(c+\frac{1}{c}\right)\cos\theta, v=\left(c-\frac{1}{c}\right)\sin\theta.$$

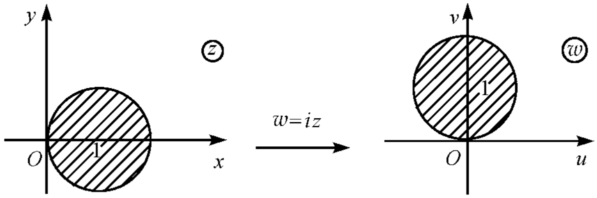

图 6－9(b)

证明　$|z|=c \Rightarrow z=ce^{i\theta}=c(\cos\theta+i\sin\theta)$

则　$\frac{1}{z}=\frac{1}{c}e^{-i\theta}=\frac{1}{c}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$

$$=\frac{1}{c}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

设 $w=u+iv$，**则**

$$w=z+\frac{1}{z}=c(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{c}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\left(c+\frac{1}{c}\right)\cos\theta+i\left(c-\frac{1}{c}\right)\sin\theta$$

所以　$u=\left(c+\frac{1}{c}\right)\cos\theta, v=\left(c-\frac{1}{c}\right)\sin\theta$ **得证.**

◎6. **证明：在映射** $w=e^{iz}$ **下，互相正交的直线族** $\mathrm{Re}(z)=c_1$ **与** $\mathrm{Im}(z)=c_2$ **依次映射成互相正交的直线族** $v=u\,\mathrm{tg}c_1$ **与圆族** $u^2+v^2=e^{-2c_2}$.

分析　**图形在已知映射下映射成什么样的新图形，还是考查率与旋转问题.**

证明　**设** $z=x+iy, w=u+iv$

由 $\mathrm{Re}(z)=c_1$ **可得**

$$w=u+iv=e^{i(c_1+iy)}=e^{-y}(\cos c_1+i\sin c_1)$$

则　$u=e^{-y}\cos c_1, v=e^{-y}\sin c_1$

得　$v=u\,\mathrm{tg}c_1$ **为一直线族**

由 $\mathrm{Im}(z)=c_2$ **得**

$$w=u+iv=e^{iz}=e^{i(x+ic_2)}=e^{-c_2}(\cos x+i\sin x)$$

得　$u=e^{-c_2}\cos x, v=e^{-c_2}\sin x$

$u^2+v^2=(e^{-c_2})^2=e^{-2c_2}$，为一圆族.

因为 $w'=ie^{iz}\neq0$ 且 $w=e^{iz}$ 为解析函数，故 $w=e^{iz}$ 是共形映射，有保角性.

已知 $\mathrm{Re}(z)=c_1$ 与 $\mathrm{Im}(z)=c_2$ 相互正交，故 $v=u\mathrm{tg}c_1$ 与 $u^2+v^2=e^{-2c_2}$ 也相互正交.

◎7. 映射 $w=z^2$ 把上半个圆域：$|z|<R,\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成什么？

分析 图形在已知映射下映射成什么样的新图形，还是考查伸缩率与旋转问题.

解 上半个圆域：$|z|<R,\mathrm{Im}(z)>0$

设 $w=re^{i\varphi}$，则当 z 在圆周上时，$w=z^2=R^2e^{i2\theta}$

故 $r=R^2$， $\varphi=2\theta\Rightarrow0<\varphi<2\pi$

即 $w=z^2$ 把上半个圆域映射成圆心在原点，半径为 R^2，且沿由 0 到 R^2 的半径有割痕的圆域，见图 6－10.

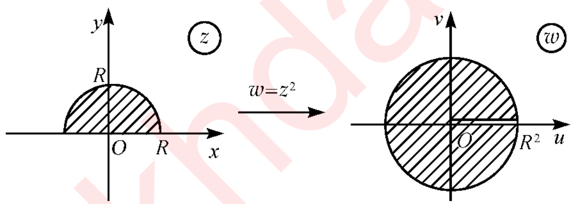

图 6－10

◎8. 下列区域在指定的映射下映射成什么？

1) $\mathrm{Re}(z)>0,w=iz+i$；

2) $\mathrm{Im}(z)>0,w=(1+i)z$；

3) $0<\mathrm{Im}(z)<\dfrac{1}{2},w=\dfrac{1}{z}$；

4) $\mathrm{Re}(z)>1,\mathrm{Im}(z)>0,w=\dfrac{1}{z}$；

5) $\mathrm{Re}(z)>0,0<\mathrm{Im}(z)<1,w=\dfrac{i}{z}$.

解 设 $z=x+iy,w=u+iv$

1) 由 $w=u+iv=iz+i=i(x+iy)+i=-y+i(1+x)$

知
$$\begin{cases} u=-y \\ v=x+1 \end{cases}$$

因为　　$\mathrm{Re}(z)=x>0$

所以　　$v=x+1>1$

即　　$\mathrm{Im}(w)>1$

2)映射成图 6－11(a).

由 $w=u+iv=(1+i)z=(1+i)(x+iy)$
$$=(x-y)+i(x+y)$$

知

$$\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases} \quad \text{故} \quad \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{v-u}{2} \end{cases}$$

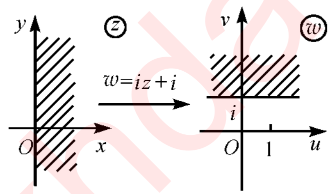

图 6－11(a)

因为 $\mathrm{Im}(z)=y>0$，所以 $\dfrac{v-u}{2}>0$ 即 $v>u$，$\mathrm{Im}(w)>\mathrm{Re}(w)$，映射成图 6－11(b).

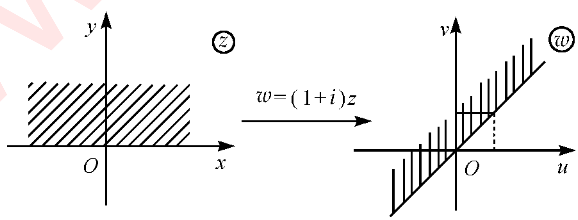

图 6－11(b)

3)由 $z=\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{u+iv}=\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}=x+iy$ 知

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

因为 $0<\mathrm{Im}(z)<\frac{1}{2}$,所以 $0<\frac{-v}{u^2+v^2}<\frac{1}{2}$

由 $\frac{-v}{u^2+v^2}>0\Rightarrow v<0$ 即 $\mathrm{Im}(w)<0$

由 $\frac{-v}{u^2+v^2}<\frac{1}{2}\Rightarrow u^2+v^2+2v>0$

即 $u^2+(v+1)^2>1$(以$(0,-1)$为圆心,1 为半径的圆的外部,且 $\mathrm{Im}(w)<0$)

即 $|w+i|>1$ 且 $\mathrm{Im}(w)<0$

映射成图 6—11(c).

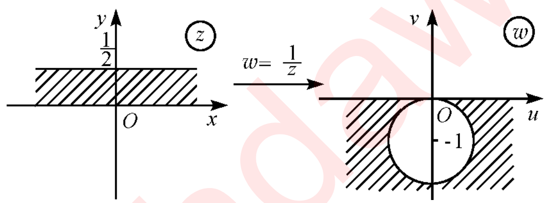

图 6—11(c)

4)由 $z=x+iy=\frac{1}{w}=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$知

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

因为 $\mathrm{Re}(z)>1,\mathrm{Im}(z)>0$

所以$\begin{cases}\frac{u}{u^2+v^2}>1\\ \frac{-v}{u^2+v^2}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ v<0\end{cases}$

即 $|w-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$且 $\mathrm{Im}(w)<0$

映射成图 6—11(d).

5)由 $z=x+iy=\frac{i}{w}=\frac{i}{u+iv}=\frac{v+iu}{u^2+v^2}$知,

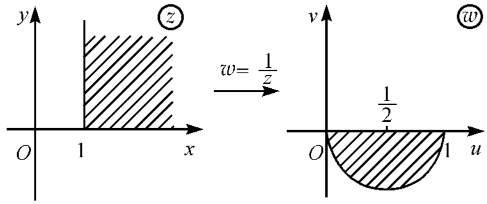

图 6－11(d)

$$x=\frac{v}{u^2+v^2},y=\frac{u}{u^2+v^2}$$

因为 $\mathrm{Re}(z)>0,0<\mathrm{Im}(z)<1$

所以 $\begin{cases}\dfrac{v}{u^2+v^2}>0\\ 0<\dfrac{u}{u^2+v^2}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u>0\\ v>0\\ \left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+v^2>\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\end{cases}$

即 $\left|w-\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$，**且** $\begin{cases}\mathrm{Im}(w)>0\\ \mathrm{Re}(w)>0\end{cases}$

映射成图 6－11(e).

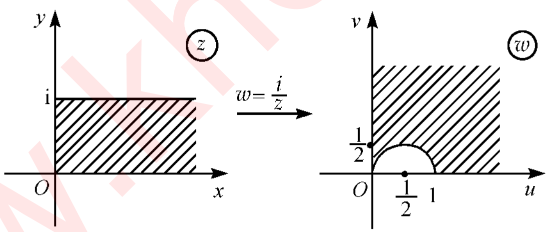

图 6－11(e)

◎9. **如果分式线性映射** $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ **将上半平面** $\mathrm{Im}(z)>0$，(1)**映射成上半平面** $\mathrm{Im}(w)>0$；(2)**映射成下半平面** $\mathrm{Im}(w)<0$，**那么它的系数满足什么条件**？

分析　**已知两图形，求它们之间的映射，可以分情况考虑.**

解　**对** $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，**取** $z_k\in R$，**即实轴上的点**，a,b,c,d **均为实数时**，

$w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}$也为实数,故 w 必将实轴仍映射为实轴.

$w'=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$

1)当 $ad-bc>0$,即 $w'>0$(a,b,c,d 均为实数,z 也在实轴上变)时,取 z_k 沿着增大的方向走时,w_k 也沿着增大的方向走,由于在前进方向左侧的区域始终在前进的方向左侧.

w 将 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成 $\mathrm{Im}(w)>0$,如图 6—12(a).

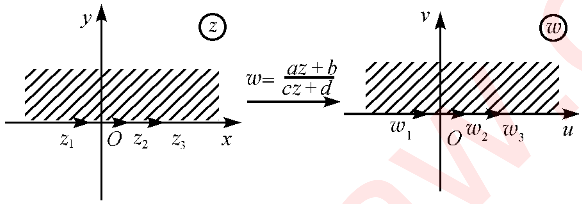

图 6—12(a)

2)当 $ad-bc<0$ 即 $w'<0$(a,b,c,d 均为实数,z 也在实轴上变)时取 z_k 沿增大方向走时,w_k 沿减小方向走,由于在前进方向左侧的区域始终在前进方向的左侧,且实轴经 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$映射后,前进方向变反(即与 u 轴反向).

故 w 将 $\mathrm{Im}(z)>0$,映射成 $\mathrm{Im}(z)<0$,如图 6—12(b).

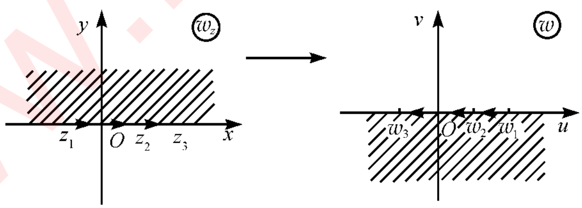

图 6—12(b)

◎10. 如果分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$能将 z 平面上的某条直线映射成 w 平面上的单位圆,那么它的系数应满足什么条件?

分析　已知两图形,求它们之间的映射,可以分情况考虑.

解　如果 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将直线映射成单位圆，则直线上的 $z=\infty$ 点必被映射到单位圆 $|w|=1$ 上，故将 $z=\infty$ 代入 $|w|=\left|\dfrac{az+b}{cz+d}\right|$ 有

$$|w|_{z=\infty}=\left|\frac{a+\dfrac{b}{z}}{c+\dfrac{d}{z}}\right|_{z=\infty}=\left|\frac{a}{c}\right|=1,\text{即}|a|=|c|$$

而 $wi'=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq0$　即 $ad-bc\neq0$

所以条件为　$|a|=|c|$ 且 $ad-bc\neq0$

○11. 试证：对任何一个分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 都可以认为 $ad-bc=1$.

证明　在 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 中由于 $ad-bc\neq0$ 故可变为

$$w=\frac{\dfrac{a}{(ad-bc)^{\frac{1}{2}}}z+\dfrac{b}{(ad-bc)^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{c}{(ad-bc)^{\frac{1}{2}}}z+\dfrac{d}{(ad-bc)^{\frac{1}{2}}}} \qquad ①$$

式①与原式是等价的. 设 $w=\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$　②

在式②中 $a'd'-b'c'=\dfrac{ad}{ad-bc}-\dfrac{bc}{ad-bc}=1$

故对任何一个分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 都可认为

$$ad-bc=1$$

◎12. 试求将 $|z|<1$ 映射成 $|w-1|<1$ 的分式线性映射.

分析　已知两图形，求它们之间的映射，可以分情况考虑.

解　由教材 P204 例 4 知，将 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$ 的分式线性映射的表式为　$w_1=\mathrm{e}^{i\varphi}\left(\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right),|\alpha|<1$

$|w_1|<1$ 向右平移一个单位,即得 $|w-1|<1$,如图 6−13.

即 $w=1+w_1=1+e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right)$,$|\alpha|<1$

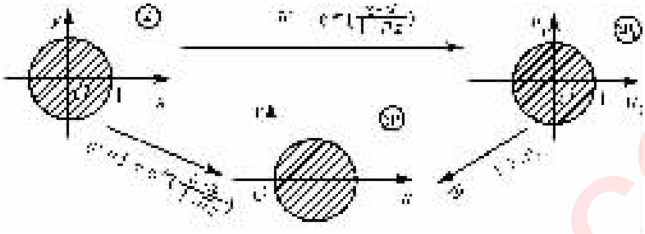

图 6−13

○13. 设 $w=e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right)$,试证:$\varphi=\arg w'(\alpha)$.

证明　因为 $w'=e^{i\varphi}\dfrac{(1-\bar{\alpha}z)-(z-\alpha)(-\bar{\alpha})}{(1-\bar{\alpha}z)^2}=e^{i\varphi}\dfrac{1-\alpha\bar{\alpha}}{(1-\bar{\alpha}z)^2}$

所以 $w'(\alpha)=e^{i\varphi}\dfrac{1-\alpha\bar{\alpha}}{(1-\overline{\alpha\alpha})^2}=e^{i\varphi}\dfrac{1}{1-\overline{\alpha\alpha}}$

由于 $1-\alpha\bar{\alpha}$ 是正实数,故 $\varphi=\arg w'(\alpha)$.

◎14. 试求将圆域 $|z|<R$ 映射成圆域 $|w|<1$ 的分式线性映射.

分析　已知两图形,求它们之间的映射,可以分情况考虑.

解　1)先把 $|z|<R$ 映射成 $|\xi|<1$ 作 $\xi=\dfrac{z}{R}$,因为 $|z|<R$,所以 $|\xi|<1$.

2)再把 $|\xi|<1$ 映射到 $|w|<1$

即 $w=e^{i\varphi}\left(\dfrac{\xi-\alpha}{1-\bar{\alpha}\xi}\right)=e^{i\varphi}\left(\dfrac{\dfrac{z}{R}-\alpha}{1-\bar{\alpha}\dfrac{z}{R}}\right)=e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-R\alpha}{R-\bar{\alpha}z}\right)$,　$|\alpha|<1$

映射成图 6−14.

●15. 求把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$,并满足条件:

1)$f(i)=0$,$f(-1)=1$;　　2)$f(i)=0$,$\mathrm{Arg} f'(i)=0$;

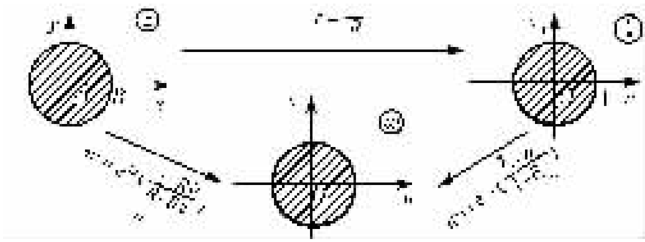

图 6－14

3) $f(1)=1, f(i)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

分析　先设分式线性映射的一般形式，再根据具体情况求解.

解　把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成 $|w|<1$ 的分式线性映射的一般形式为

$$w=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right), \mathrm{Im}(\lambda)>0, \theta\in R$$

1) $f(i)=0, f(-1)=1$

因为 $f(i)=0$ 表示 $i\xrightarrow{w}0$ 即将 i 变换为 w 面上的原点，所以 $\lambda=i, \bar{\lambda}=-i$　故 $w=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$

由 $f(-1)=1$ 可得

$$1=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{-1-i}{-1+i}\right)=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{(-1-i)^2}{(-1+i)(-1-i)}=\mathrm{e}^{i\theta}\cdot\frac{2i}{2}=\mathrm{e}^{i\theta}\cdot i$$

故 $\mathrm{e}^{i\theta}=-i=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{2})}$　所以 $w=-i\dfrac{z-i}{z+i}$

2) $f(i)=0, \mathrm{Arg}f'(i)=0$

因 $f(i)=0$，所以 $\lambda=i, \bar{\lambda}=-i$

所以 $$w=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

则 $$w'=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2}=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{2i}{(z+i)^2}$$

故 $$w'(i)=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{2i}{(\mathrm{i}+\mathrm{i})^2}=\mathrm{e}^{i\theta}\left(-\frac{i}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{i\theta}\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$$

因为 $\operatorname{Arg}f'(i)=0$　所以 $\theta-\dfrac{\pi}{2}=0$

即 $$\theta=\frac{\pi}{2},\quad w=i\,\frac{z-i}{z+i}$$

3)设 $\lambda=x+iy$

由 $f(1)=1,f(i)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$可得

$$\begin{cases}1=e^{i\theta}\left(\dfrac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}\right) & ①\\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}=e^{i\theta}\left(\dfrac{i-\lambda}{i-\bar{\lambda}}\right) & ②\end{cases}$$

① ÷ ② 得$\sqrt{5}=\left(\dfrac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}\right)\left(\dfrac{i-\bar{\lambda}}{i-\lambda}\right)$

$$=\left(\frac{1-x-iy}{1-x+iy}\right)\left(\frac{i-x+iy}{i-x-iy}\right)\quad ③$$

整理 ③ 得

$$\begin{cases}\sqrt{5}(x^2+y^2-x-y)=x^2+y^2-x+y & ④\\ \sqrt{5}(1-y-x)=1+y-x & ⑤\end{cases}$$

由 ④⑤ 相减得 $x^2+y^2-1=0$

即 $x^2+y^2=1$　⑥

由 ⑤⑥ 得$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$(舍去,因 $w=e^{i\theta}$ 不合题意)及$\begin{cases}y=\dfrac{2}{3}\\x=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}$

将 x,y 值代入 ① 得　$e^{i\theta}=\dfrac{\sqrt{5}+2i}{3}$

所以 $$w=\frac{\sqrt{5}+2i}{3}\left[\frac{z+\dfrac{\sqrt{5}}{3}-\dfrac{2}{3}i}{z+\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{2}{3}i}\right]=\frac{3z+(\sqrt{5}-2i)}{(\sqrt{5}-2i)z+3}$$

小结　掌握这类给出附加条件的求分式线性映射的方法.

● 16. **求把单位圆映射成单位圆的分式线性映射,并满足条件:**

1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, f(-1)=1$;

2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$;

3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$;

4) $f(a)=a, \operatorname{Arg} f'(a)=\varphi$.

分析　先设分式线性映射的基本形式,再由具体要求求解.

解　将 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$ 的映射的一般形式:

$$w=e^{i\varphi}\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right),(|\alpha|<1,\varphi\in R)$$

1) 由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 知,所求映射将 $|z|<1$ 内的点 $z=\frac{1}{2}$ 映射成 $|w|<1$ 的中心,可得 $\alpha=\frac{1}{2}$

所以
$$w=e^{i\varphi}\left[\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}\right]=e^{i\varphi}\left(\frac{2z-1}{2-z}\right)$$

由此并结合 $f(-1)=1$ 得

$$e^{i\varphi}\left[\frac{-2-1}{2-(-1)}\right]=1$$

所以
$$e^{i\varphi}=-1$$

即
$$\varphi=\pi$$

所以
$$w=-\frac{2z-1}{2-z}=\frac{2z-1}{z-2}$$

2) 由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 知,所求映射将 $|z|<1$ 内的点 $z=\frac{1}{2}$ 映射成 $|w|<1$ 的中心

所以
$$w=e^{i\varphi}\left[\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}\right]=e^{i\varphi}\left(\frac{2z-1}{2-z}\right)$$

由此并结合 $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ 得

$$w'\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{i\varphi}\frac{2(2-z)+(2z-1)}{(2-z)^2}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{i\varphi}\Rightarrow\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=\arg(\mathrm{e}^{i\varphi})=\varphi$$

所以
$$\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$w=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2z-1}{2-z}\right)=i\,\frac{2z-1}{2-z}$$

3）由 2）可知 $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=\arg(\mathrm{e}^{i\varphi})=\varphi=0$

所以 $w=\mathrm{e}^0\left(\dfrac{2z-1}{2-z}\right)=\dfrac{2z-1}{2-z}$

4）将大问题化解为两个易于解决的小问题：

1° 先将 $|z|<1$ 映射到 $|\xi|<1$，并使 $\xi(a)=0$，$\mathrm{Arg}\xi'(a)=\varphi$；

2° 再将 $|w|<1$ 映射到 $|\xi|<1$，并使 $\xi(a)=0$，$\mathrm{Arg}\xi'(a)=0$.

由于分式线性映射的逆存在，且也为分式线性映射，设 $\xi=f_1(z)=f_2(w)$，记 $f_2^{-1}=f$，则从 $|\xi|<1$ 到 $|w|<1$ 的映射为 $w=f(\xi)$，故 $w=f[f_1(z)]$.

$w=f(\xi)$ 将 $|\xi|<1$ 内的 $\xi=0$ 映射到 $|w|<1$ 内的 $w=a$，由于 $w\to\xi$ 在 a 点的旋转角为 0，故从 $\xi\to w$，在 0 点的旋转角也为 0，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}w'(a)&=\mathrm{Arg}f'(\xi_0=0)+\mathrm{Arg}\xi'(z_0=a)\\&=0+\varphi=\varphi\end{aligned}$$

这样以 $|\xi|<1$ 为中介，建立起满足题意从 $|z|<1$ 到 $|w|<1$ 的映射 w.

① 求将 $|z|<1$ 映到 $|\xi|<1$，并使 $\xi(a)=0$，$\mathrm{Arg}\xi'(a)=\varphi$ 的映射 $\xi=f_1(z)$，由 3）可知，$\xi=\mathrm{e}^{i\varphi}\left(\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)$

② 求将 $|w|<1$ 映到 $|\xi|<1$，并使 $\xi(a)=0$，$\mathrm{Arg}\xi'(a)=0$ 的映射　　$\xi=f_2(w)$

由 2) 可知　　$\xi=\dfrac{w-a}{1-\bar{a}w}$

故由 1°、2° 得　$\dfrac{w-a}{1-\bar{a}w}=e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)$　　且 $|a|<1$

见图 6－15.

小结　主要掌握此类题目的方法步骤.

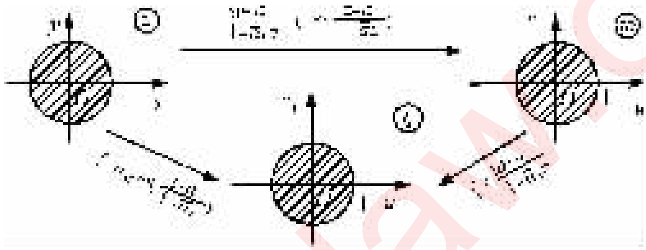

图 6－15

$\boxed{◎17.}$ 把点 $z=1,i,-i$ 分别映射成点 $w=1,0,-1$ 的分式线性映射把单位圆 $|z|<1$ 映射成什么？并求出这个映射.

分析　已知两图，求出分式线性映射后，再分析此映射会把 $|z|<1$ 映射成什么.

解　将 $\begin{cases} z_1=1 \\ w_1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} z_2=i \\ w_2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z_3=-i \\ w_3=-1 \end{cases}$ 代入

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

得　$$\frac{w-1}{w-0}\cdot\frac{-1-0}{-1-1}=\frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{-i-i}{-i-1}$$

整理得　$$w=\frac{(1+i)(z-i)}{(1+z)+3i(1-z)}$$

因为 $|z|=1$ 上的点 $z=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$ 被 w 映射成 ∞，所以 $|z|=1$ 被 w 映射成直线，并由 $z=1,i,-i$ 分别映射成 $w=1,0,-1$ 可知，$|z|=1$ 映射成实轴的负向.

因为 $z=0$ 被 w 映射成 $w=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

所以 $|z|<1$ 反映成下半平面，见图 6－16.

○ 18. 求出一个把右半面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的映射.

解 任取 $\mathrm{Re}(z)>0$ 内的一点 α，作映射 w 使之对应 $w=0$，则根据分式线性映射的保对称点的性质，点 α 关于虚轴的对称点 $-\bar{\alpha}$ 应对应 $w=0$ 关于单位圆周的对称点 ∞，

因此 w 应具有形式：

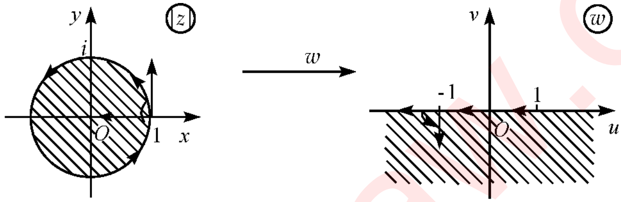

图 6－16

$w=k\dfrac{z-\alpha}{z-(-\bar{\alpha})}=k\dfrac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}$，其中 k 为常数

因为 $z=0$ 对应着 $|w|=1$ 上的一点

所以由 $|w|=|k|\cdot\left|\dfrac{0-\alpha}{0+\bar{\alpha}}\right|=|k|\cdot\left|\dfrac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right|=1$

可知 $|k|=1$，可以令 $k=\mathrm{e}^{i\theta}(\theta\in R)\Rightarrow w=\mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}$

○19. 把图 6－17(a)～(j) 中阴影部分所示(边界为直线段或圆弧)的域共形地且互为单值地映射成上半平面，求出实现各映射的任一个函数：

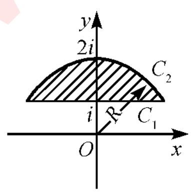

图 6－17(a)

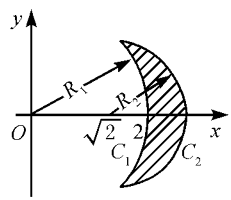

图 6－17(b)

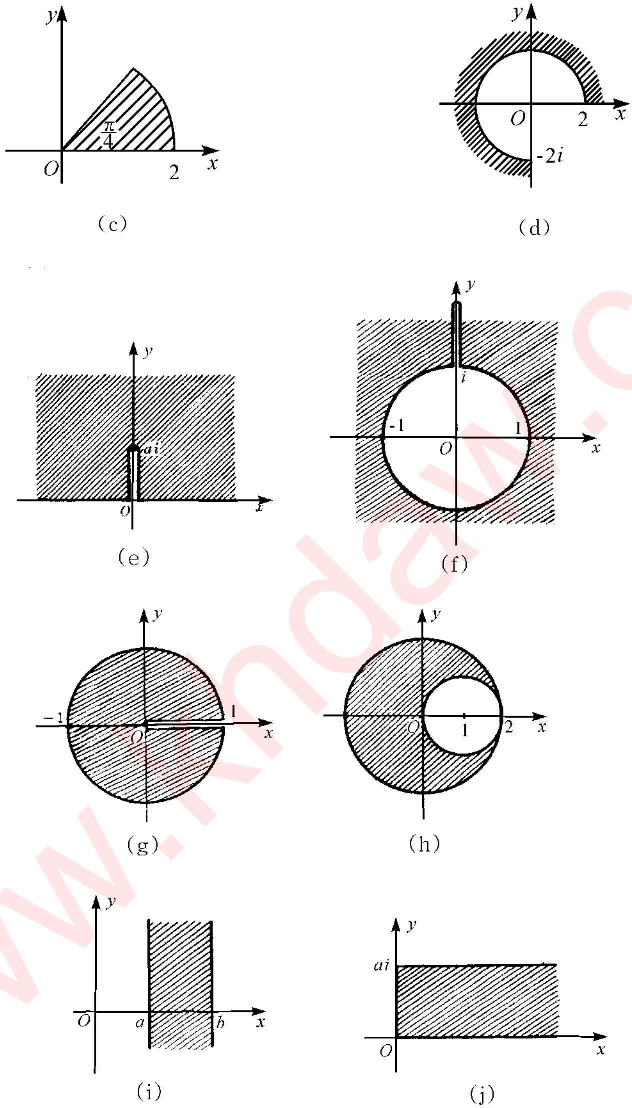

图 6－17

1) $\operatorname{Im}(z) > 1$，$|z| < 2$；

2) $|z| > 2$，$|z-\sqrt{2}| < \sqrt{2}$；

3) $|z|>2$,$0<\mathrm{Arg}z<\frac{\pi}{4}$;

4) $|z|>2$,$0<\mathrm{Arg}z<\frac{3\pi}{2}$;

5) 沿连结点 $z=0$ 和 $z=ai$ 的线段有割痕上半平面;

6) 单位圆的外部,且沿虚轴由 i 到 ∞ 有割痕;

7) 单位圆的内部,且沿由 0 到 1 的半径有割痕的域;

8) $|z|<2$, $|z-1|>1$;

9) $a<\mathrm{Re}(z)<b$;

10) $\mathrm{Re}(z)>0$,$0<\mathrm{Im}(z)<a$.

解 (1) 如图 6—18(a) 所示,由已知可解出 C_1 与 C_2 的交角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 先将 C_1 与 C_2 交点$(-\sqrt{3},i)$,$(\sqrt{3},i)$ 分别映射成 ξ 平面中的 $\xi=0$ 与 $\xi=\infty$,并使所围区域映射成角形域 $0<\mathrm{Arg}\xi<\frac{\pi}{3}$,可得

$$\xi=k\left[\frac{z-(-\sqrt{3}+i)}{z-(\sqrt{3}+i)}\right],k\text{ 为常数}$$

ξ 应把 C_1 上的 $z=i$ 映射到实轴的正半轴上,

故 $\xi=k\left[\frac{i-(-\sqrt{3}+i)}{i-(\sqrt{3}+i)}\right]=-k$,取 $k=-1$ 使 $\xi=1$ 落在实轴的正半轴上.

再通过 $w=\xi^3$ 将角形域 $0<\mathrm{Arg}\xi<\frac{\pi}{3}$ 映成上半平面,故所求映射为

$$w=-\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3$$

2) 如图 6—18(b) 所示,由已知可解得 C_1 与 C_2 交点是$(\sqrt{2},-\sqrt{2}i)$,$(\sqrt{2},\sqrt{2}i)$. 在$(\sqrt{2},-\sqrt{2}i)$,C_1 与 C_2 交角为$\frac{\pi}{4}$,

作映射 $\xi=k\left[\frac{z-(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{z-(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}\right]$

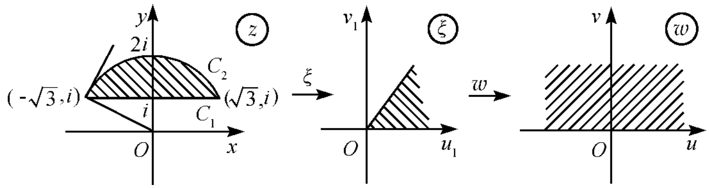

图 6－18(a)

$$= k\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}, (k \text{ 为常数})$$

该映射将 z 平面上的 $(\sqrt{2},-\sqrt{2}i)$，$(\sqrt{2},\sqrt{2}i)$ 分别映到 ξ 平面上的 $0,\infty$，将所围区域映射到角形域 $0<\text{Arg}\xi<\frac{\pi}{4}$，则 C_2 上的点于 $z=2\sqrt{2}$ 应映射成

$\xi = k\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(1-i)}{\sqrt{2}-\sqrt{2}(1+i)} = ki$ 应落在正实轴上，故取 $k=-i$，

再通过 $w=\xi^4$ 将角形域 $0<\text{Arg}\xi<\frac{\pi}{4}$ 映射成上半平面，最终得到

$$w=\xi^4=\left[-i\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right]^4=\left[\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right]^4$$

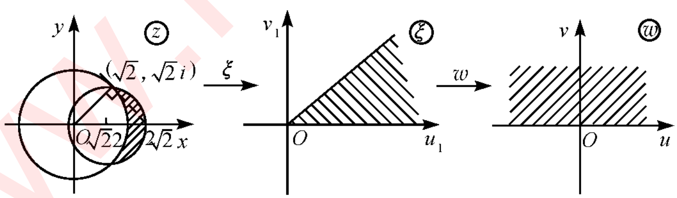

图 6－18(b)

3）如图 6－18(c) 所示，先作映射 $\xi=z^4$ 将扇形域变成上半圆域，再作 $\zeta=k\frac{\xi+16}{\xi-16}$ 将 C_1，C_2 的交点 $(-16,0)$，$(16,0)$ 分别映射成 ζ 平面上的 $0,\infty$，把上半圆域映射成角形域 0

$< \operatorname{Arg} \zeta < \frac{\pi}{2}$.

ζ 应将 C_1 上的点 $\xi = 0$ 映射成：

$\zeta = k\frac{0+16}{0-16} = -k$ 正实轴上一点，故可取 $k = -1$

最后作 $w = \zeta^2$ 将角形域 $0 < \operatorname{Arg} \zeta < \frac{\pi}{2}$ 映射为上半平面.

所以所求映射为

$$w = \zeta^2 = \left(-\frac{\xi+16}{\xi-16}\right)^2 = \left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2$$

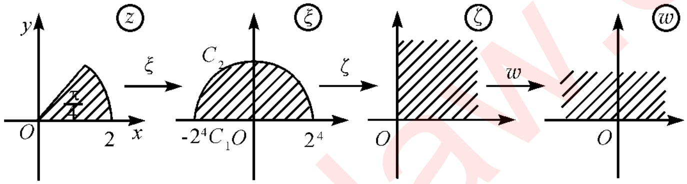

图 6－18(c)

4）如图 6－18(d) 所示，先作映射 $\xi = z^{\frac{2}{3}}$. 将区域 $|z| > 2$，$0 < \operatorname{Arg} z < \frac{3}{2}\pi$ 映射成上半圆的外域 $|\xi| > 2^{\frac{2}{3}}$，$0 < \operatorname{Arg} \xi < \pi$，再作映射 $\eta = k\frac{\xi + 2^{\frac{2}{3}}}{\xi - 2^{\frac{2}{3}}}$，$k$ 为常数，将 C_1 与 C_2 的交点 $\xi_1 = -2^{\frac{2}{3}}$，$\xi_2 = 2^{\frac{2}{3}}$ 分别映射成 η 面上的 $0, \infty$. 把上半圆的外域映射成角形域 $0 < \operatorname{Arg}\eta < \frac{\pi}{2}$

把 C_1 上的点 $2^{\frac{2}{3}}i$ 映射成 η 面上正实轴上一点，则

$\eta = k\frac{2^{\frac{2}{3}}i + 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}i - 2^{\frac{2}{3}}}$　　　取 $k = i$ 使 $\eta = 1$

最后作映射 $w = \eta^2$ 将角形域 $0 < \operatorname{Arg}\eta < \frac{\pi}{2}$ 映射成上半平面. 故所求映射为

$$w=\eta^2=-\left(\frac{\xi+2^{\frac{2}{3}}}{\xi-2^{\frac{2}{3}}}\right)^2=-\left(\frac{z^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{2}{3}}}\right)^2$$

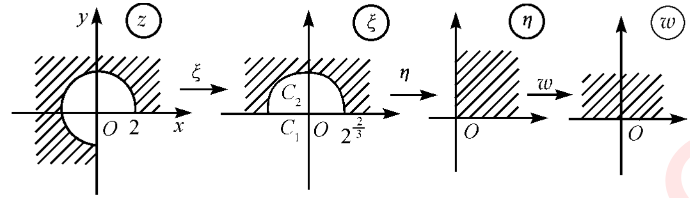

图 6－18(d)

5) 如图 6－18(e) 所示，先应用映射 $\xi=z^2$，便得到一个具有割痕 $-a^2\leqslant \mathrm{Re}(\xi)<+\infty,\mathrm{Im}(\xi)=0$ 的 ξ 平面，再把 ξ 平面向右作一距离为 a^2 的平移：$\zeta=\xi+a^2$，便得到了去掉正实轴的 ζ 平面，最后通过映射 $w=\sqrt{\zeta}$，便得到上半 w 平面.

故所求映射为　$w=\sqrt{\zeta}=\sqrt{\xi+a^2}=\sqrt{z^2+a^2}$

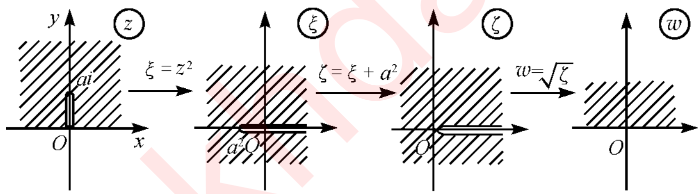

图 6－18(e)

6) 如图 6－18(f) 所示，首先，通过映射 $z_1=i\dfrac{z-i}{z+i}$ 将已知区域映射成一个具有割痕 $\mathrm{Re}(z_1)=0,0\leqslant \mathrm{Im}(z_1)\leqslant 1$ 的上半平面，再应用映射 $z_2=z_1^2$，便得到一个具有割痕 $-1\leqslant \mathrm{Re}(z_2)<+\infty,\mathrm{Im}(z_2)=0$ 的 z_2 平面，把 z_2 平面向右作一距离为 1 的平移：$z_3=z_2+1$，便得到去掉了正实轴的 z_3 平面，最后通过 $z_4=\sqrt{z_3}$，便得到上半 z_4 平面.

故所求映射为

$$z_4=\sqrt{z_3}=\sqrt{1+z_2}=\sqrt{1+z_1^2}=\sqrt{1-\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2}$$

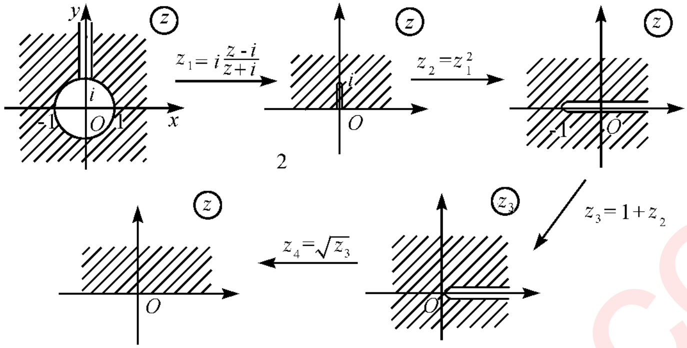

图 6—18(f)

7) 如图 6—18(g) 所示，首先通过 $z_1=z^{\frac{1}{2}}$ 将已知域映射成 z_1 平面上的上半单位圆，再应用 $z_2=-\dfrac{z_1+1}{z_1-1}$ 将上半单位圆映射成角形域 $0<\operatorname{Arg}z_2<\dfrac{\pi}{2}$，最后用 $z_3=z_2^2$ 将角形域 $0<\operatorname{Arg}z_2<\dfrac{\pi}{2}$ 映射成上半平面，故所求映射为

$$w=z_3=z_2^2=\left(-\frac{z_1+1}{z_1-1}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$$

8) 如图 6—18(h) 所示，① 应用 $z_1=\dfrac{1}{z-2}$ 将切点 $z=2$，$z=0$，$z=-2$ 分别映射成 ∞，$-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{4}$，则 $|z|<2$，$|z-1|<1$ 映射成带形域 $-\dfrac{1}{2}<\operatorname{Re}(z)<-\dfrac{1}{4}$；

② 平移：$z_2=z_1+\dfrac{1}{2}$；

③ 旋转：$z_3=e^{\frac{\pi}{2}i}z_2=iz_2$；

④ 放大：$z_4=4\pi z_3$；

⑤ 应用 $z_5=e^{z_4}$ 将水平带形域 $0<\operatorname{Im}(z_4)<\pi$ 映射成角形域 $0<\operatorname{Arg}(z_5)<\pi$ 即上半平面.

综上得

$$z_5 = e^{z_4} = e^{4\pi z_3} = e^{4\pi i z_2} = e^{4\pi i\left(z_1+\frac{1}{2}\right)} = e^{4\pi i\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2}\right)} = e^{2\pi i\left(\frac{z}{z-2}\right)}$$

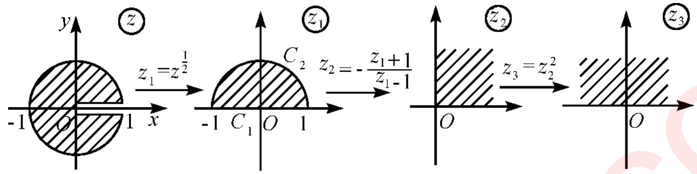

图 6－18(g)

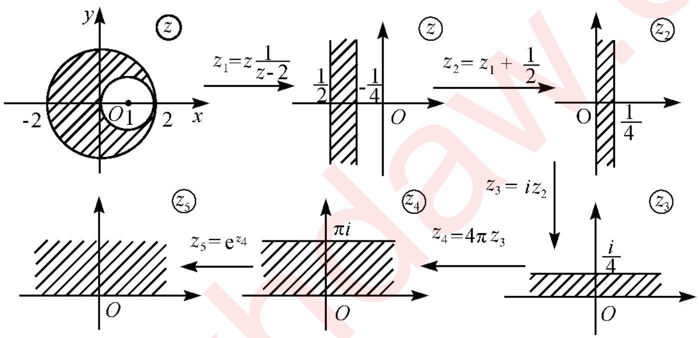

图 6－18(h)

9) 如图 6－18(i) 所示，① 向左平移 a 个单位：$z_1 = z - a$；

② 旋转：$z_2 = iz_1$；

③ 放大(缩小)：$z_3 = \dfrac{\pi}{b-a} z_2$；

④ 应用 $z_4 = e^{z_3}$ 将水平带形域：$0 < \mathrm{Im}(z_3) < \pi$ 映射成上半平面.

综上可得　$z_4 = e^{z_3} = e^{\frac{\pi}{b-a}z_2} = e^{\frac{\pi}{b-a}iz_1} = e^{\frac{\pi i(z-a)}{b-a}}$

10) 如图 6－18(j) 所示，① 放缩：$z_1 = \dfrac{\pi}{a} z$；

② $z_2 = -e^{-z_1}$ 将 $\mathrm{Re}(z_1) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z_1) < \pi$ 映射成上半单位圆；

③ 应用 $z_3 = -\dfrac{z_2+1}{z_2-1}$ 便得到角形域 $0 < \mathrm{Arg} z_3 < \dfrac{\pi}{2}$；

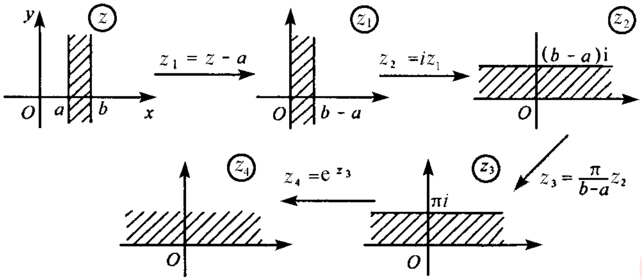

图 6—18(i)

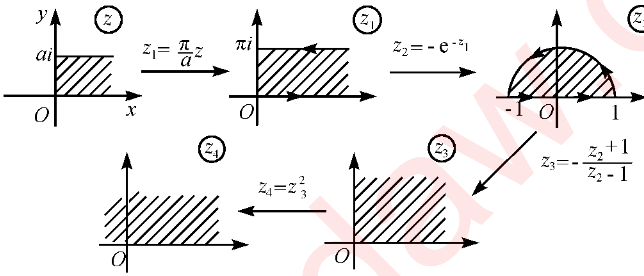

图 6—18(j)

④ **应用** $z_4 = z_3^2$ **便得到上半平面.**

综上得 $z_4 = z_3^2 = \left(-\dfrac{z_2+1}{z_2-1}\right)^2 = \left(\dfrac{e^{-\frac{\pi}{a}z}-1}{e^{-\frac{\pi}{a}z}+1}\right)^2$

● *20. **求把上半** z **平面映射成** w **平面中如图** 6—19(a) **所示的阴影部分的映射,并使** $x = 0$ **对应于** A **点,**$x = -1$ **对应于** B **点.**

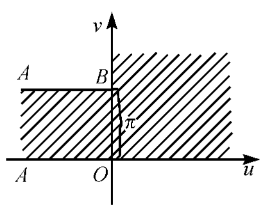

图 6—19(a)

分析 **先根据要求列表,然后计算出映射后的图形,再求解.**

解 **作** z_i **与** w_i **的对应如表** 6—1:

表 6－1

i	z_i	w_i	α_i
1	0	∞	0
2	x_2	0	π
3	∞	∞	$-\dfrac{\pi}{2}$
4	-1	πi	$\dfrac{3}{2}\pi$

因此

$$w=k\int(z-0)^{\frac{0}{\pi}-1}\cdot(z-x_2)^{\frac{\pi}{\pi}-1}\times(z+1)^{\frac{\frac{3}{2}\pi}{\pi}-1}\mathrm{d}z+c$$

$$=k\int\frac{1}{z}(z+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z+c=k\left[2\sqrt{z+1}+\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right]+c$$

$$=k\left[2\sqrt{z+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|+\mathrm{iArg}\left(\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right)\right]+c$$

为了确定常数 k 与 c，把上式改写成

$$u+iv=(k_1+ik_2)\left\{2\sqrt[4]{(x+1)^2+y^2}\cdot\right.$$

$$\left[\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)\right]+$$

$$\left.\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|+i\mathrm{Arg}\left[\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right]\right\}+c_1$$

$$+ic_2\quad(j=0,1)$$

即 $u=c_1+2\cdot\sqrt[4]{(x+1)^2+y^2}\cdot$

$$\left[k_1\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)-k_2\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)\right]+$$

$$k_1\ln\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|-k_2\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right)\quad(j=0,1)$$

$v=c_2+2\cdot$

$$\sqrt[4]{(x+1)^2+y^2}\left[k_1\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)+k_2\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)\right]$$

$$+k_2\ln\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|+k_1\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right)\ (j=0,1)$$

当 w 沿实轴上的 $OC\to\infty$ 时，z 沿 $OC'\to\infty$，$\mathrm{Arg}z=0$，$y=0$，得到

$$v=0=c_2$$

$$+\lim_{x\to\infty}\left\{2\sqrt[4]{(x+1)^2+0^2}\left[k_1\sin\left(\frac{2j\pi}{2}\right)+k_2\cos\left(\frac{2j\pi}{2}\right)\right]\right.$$

$$\left.+k_2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+k_1\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\right\}$$

$$=c_2+\infty\cdot k_2+0\cdot k_2+k_1\cdot 0\cdot\infty+k_1\cdot 0$$

$$=c_2+\infty\cdot k_2$$

所以 $c_2=k_2=0$

当 w 沿 $CB\to\pi i$ 时，z 沿 $C'B'\to-1$，$\mathrm{Arg}z=\pi$，$y=0$

$$u=0=c_1+\lim_{x\to-1^-}\left\{2\sqrt[4]{(x+1)^2+0^2}\left[k_1\cos\left(\frac{\pi+2j\pi}{2}\right)\right.\right.$$

$$\left.-k_2\sin\left(\frac{\pi+2j\pi}{2}\right)\right]+k_1\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|$$

$$\left.-k_2\mathrm{Arg}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right]\right\}$$

$$=c_1-k_2\pi=c_1$$

$v=\pi=c_2+k_1\pi=k_1\pi$，即 $\quad k_1=1$

所以 $\qquad k=1, c=0$

所求映射为 $\qquad w=2\sqrt{z+1}+\ln\dfrac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}$

见图 6－19(b).

小结 求点点对应的映射，要掌握求解步骤.

● *21. 求把图 6－20(a) 所示的阴影部分映射成上半平面的映射，

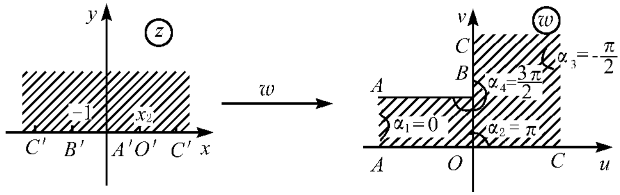

图 6－19(b)

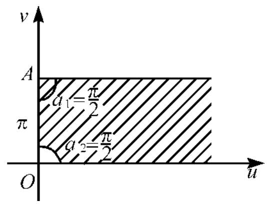

图 6－20(a)

并使 A 点对应 $x=-1$，O 点对应于 $x=1$.

分析　先根据题目要求列出对应的表再求出映射.

解　作 z_i 与 w_i 的对应如表 6－2：

故可得

$$w=k\int(z+1)^{\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}-1}(z-1)^{\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}-1}\mathrm{d}z+c=k\int\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\mathrm{d}z+c$$

$$=k\ln(z+\sqrt{z^2-1})+c$$

$$=k\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|+ik\operatorname{Arg}(z+\sqrt{z^2-1})+c$$

表 6－2

i	z_i	w_i	α_i
1	-1	πi	$\frac{\pi}{2}$
2	1	0	$\frac{\pi}{2}$
3	∞	∞	0

为确定常数 k 与 c 将上式改写成

$$u+iv=(k_1+k_2 i)\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|+$$
$$i(k_1+ik_2)\mathrm{Arg}(z+\sqrt{z^2-1})+c_1+ic_2$$

即 $u=c_1+k_1\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|-k_2\mathrm{Arg}(z+\sqrt{z^2-1})$

$v=c_2+k_2\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|+k_1\mathrm{Arg}(z+\sqrt{z^2-1})$

当 w **沿** $BA\to\pi i$，z **沿** $B'A'\to-1$，$\mathrm{Arg}z=\pi$，$y=0$

所以

$$u=0$$
$$=\lim_{x\to-1^-}\left\{c_1+k_1\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-k_2\mathrm{Arg}(x+\sqrt{x^2-1})\right\}$$
$$=c_1+k_1\ln1-k_2\pi=c_1-k_2\pi$$
$$v=\pi$$
$$=\lim_{x\to-1^-}\left\{c_2+k_2\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+k_1\mathrm{Arg}(x+\sqrt{x^2-1})\right\}$$
$$=c_2+k_2\cdot\ln1+k_1\pi=c_2+k_1\pi$$

再考虑，当 w **从** A **向** O **移动时，**z **从** -1 **向** 1 **逼近，**$y=0$，$x\to1^-$，**于是，**$u=0=\lim\limits_{x\to1^-}\{c_1+k_1\ln|x+\sqrt{x^2-1}-k_2Arg(x+\sqrt{x^2+1})\}$

$$=c_1+k_1\cdot0-k_2\cdot0=c_1$$

$v=0=\lim\limits_{x\to1^-}\{c_2+k_2\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+k_1\mathrm{Arg}(x+\sqrt{x^2-1})\}$

$$=c_2+k_2\cdot0+k_1\cdot0=c_2$$

即 $c_1=c_2=0$，**故** $c=0$. **代回刚才得到的两个式子，可得** $k_1=1$，$k_2=0$，**即** $k=1$.

所以 $w=\ln(z+\sqrt{z^2-1})$

由上式整理得 $z+\sqrt{z^2-1}=e^w$

$$z^2-1=\mathrm{e}^{2w}+z^2-2\mathrm{e}^w z$$
$$z=\frac{1+\mathrm{e}^{2w}}{2\mathrm{e}^w}=\frac{\mathrm{e}^w+\mathrm{e}^{-w}}{2}=\mathrm{ch}w$$

见图 $6-20$(b).

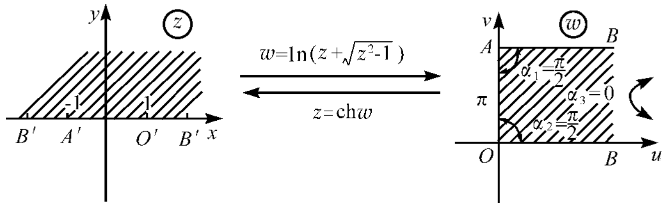

图 6－20(b)

小结　此类题目的方法步骤比较重要，主要是掌握方法.

○ ＊22. 求出附录中 6，9 与 12 三个关于区域变换的映射

1)6.　$w=\sin z$；　　2)9.　$w=\dfrac{i-z}{i+z}$；

3)12.　$w=\ln\dfrac{z-1}{z+1}$.

解　1) ① 旋转：$z_1=(-i)z$，得到区域 $\mathrm{Re}(z_i)>0,-\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Im}(z_i)<\dfrac{\pi}{2}$；

② 上移：$z_2=z_1+\dfrac{\pi}{2}i$ 得到区域 $\mathrm{Re}(z_2)>0,0<\mathrm{Im}(z_2)<\pi$；

③ 由上题知 $w=\mathrm{ch}z_2$，将区域 $\mathrm{Re}(z_2)>0,0<\mathrm{Im}(z_2)<\pi$ 映射成上半平面.

综上得　$$w=\mathrm{ch}z_2=\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}=\frac{e^{z_1}\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{-z_1}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2}$$
$$=\frac{e^{-z_1}-e^{z_1}}{2i}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z$$

见图 6－21(a).

2) 将上半平面映射成单位圆内部的映射的一般形式为

$$w=e^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right),\theta\in\mathrm{R}$$

将 $\begin{cases}z_1=\infty\\w_1=-1\end{cases}$　$\begin{cases}z_2=0\\w_2=1\end{cases}$　$\begin{cases}z_3=1\\w_3=i\end{cases}$　分别代入上式可得

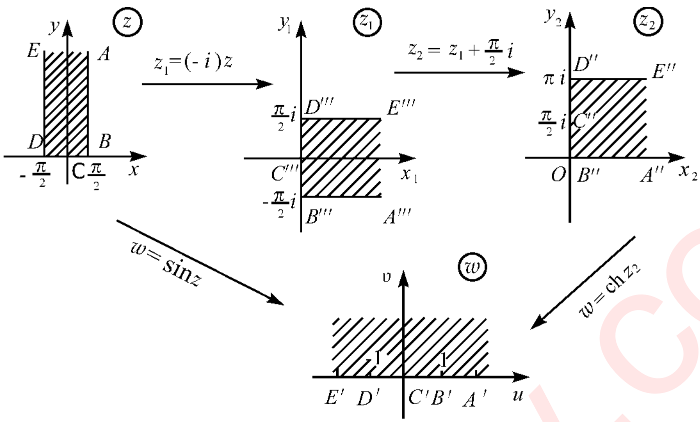

图 6－21(a)

$$-1=e^{i\theta}\left(\frac{\infty-\lambda}{\infty-\bar{\lambda}}\right)=e^{i\theta} \qquad ①$$

$$1=e^{i\theta}\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)=\frac{-\lambda}{\bar{\lambda}} \qquad ②$$

$$i=e^{i\theta}\left(\frac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}\right)=-\frac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}} \qquad ③$$

设 $\lambda=x+iy$，由式②可得 $x-iy=-(x+iy)$

即 $x=0,\lambda=iy$

将 $\lambda=iy$ 代入式③得 $\qquad i=-\dfrac{1-iy}{1+iy}$

即 $$i-y=-1+iy$$

即 $$y=1,\lambda=i$$

所以所求映射为 $\qquad w=(-1)\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{i-z}{i+z}$

见图 6－21(b).

(3) 作 z_i 与 w_i 对应如表 6－3：

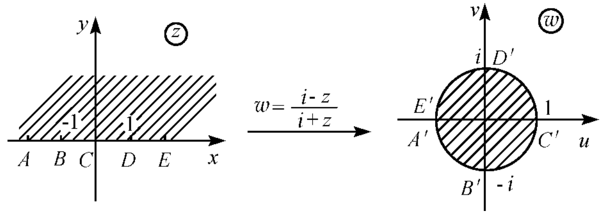

图 6－21(b)

表 6－3

i	z_i	w_i	α_i
1	∞	0	π
2	-1	∞	0
3	1	∞	0

所以
$$w=k\int(z+1)^{\frac{0}{\pi}-1}\cdot(z-1)^{\frac{0}{\pi}-1}\mathrm{d}z+c$$
$$=k\int\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z+c=\frac{k}{2}\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+c$$
$$=\frac{k}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+i\,\frac{k}{2}\mathrm{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+c$$

$w=0$ **时**，$z=\infty$，

因此 $0=\dfrac{k}{2}\ln\left|\dfrac{\infty-1}{\infty+1}\right|+i\,\dfrac{k}{2}\mathrm{Arg}\left(\dfrac{\infty-1}{\infty+1}\right)+c$
$$=\frac{k}{2}\ln1+i\,\frac{k}{2}\mathrm{Arg}1+c=c$$

$w=\pi i$ **时**，$z=0$，**因此**
$$\pi i=\frac{k}{2}\ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right|+i\,\frac{k}{2}\mathrm{Arg}\left(\frac{0-1}{0+1}\right)+c$$
$$=\frac{k}{2}\ln1+i\,\frac{k}{2}\mathrm{Arg}(-1)+0$$
$$=i\,\frac{k}{2}\pi$$

所以，$k=2$，$w=\ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$

见图 6－21(c).

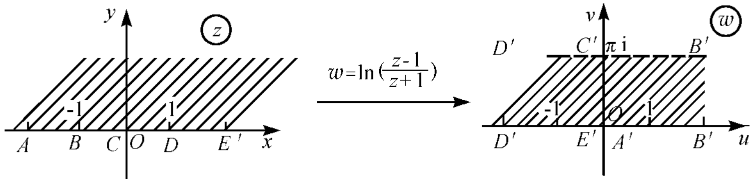

图 6—21(c)

◎ *23. 求出在 w 平面中第一象限外部的等温线方程. 已知在正实轴上的温度 $T=100$℃,在正虚轴上的温度 $T=0$℃(图 6—22).

分析 应用实例,求解 w 平面中第一象限外的等温线方程,应用等温方程的性质分别给出映射前的图与映射后的图,然后再求出映射即得 w 平面的等温线方程.

解 所求的等温方程必满足拉普拉斯方程:$\dfrac{\partial^2 T}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial v^2}=0$,满足二、三、四象限边界上的条件. 为便于求解,用 $z=e^{-\frac{\pi}{3}i}w^{\frac{2}{3}}$ 将 w 平面的二、三、四象限变为 z 平面中的上半平面,这使问题变为在 z 平面中的上半平面内,按新的边界条件解拉普拉斯方程.

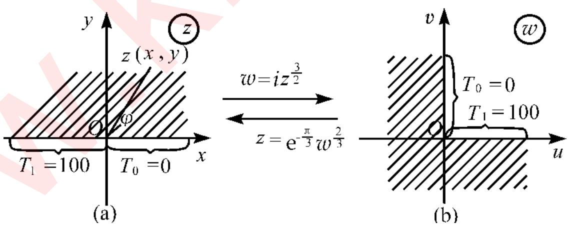

图 6—22

由图 6—22(a) 可知,z 的极角 φ 满足 $0<\varphi<\pi$,不难看出

$$T=T_0+\frac{1}{\pi}(T_1-T_0)\varphi \qquad ①$$

当 z 取实数值时,显然取得边值 ,它可看做是函数

$$iT_0+\frac{1}{\pi}(T_1-T_0)\ln w \qquad ②$$

的虚部，而这函数在上半平面是处处解析的，所以由 ① 得

$$T = 0 + \frac{1}{\pi}(100 - 0)\varphi = \frac{100}{\pi}\varphi \tag{③}$$

这里 $0 < \varphi < \pi$，为了回到 w 平面，设 $w = re^{i\theta}$，由 $z = e^{\frac{\pi}{3}i}w^{\frac{2}{3}}$ 可知，$\varphi = \frac{4}{3}k\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{2\theta}{3}$，注意到 $0 < \varphi < \pi$ 和 $-\frac{3}{2}\pi < \theta < 0$，故 k 应取 1. 将之代入 ③ 整理得

$T = \frac{100}{\pi}(\frac{2}{3}\theta + \pi)$　　θ 是 w 的极角，$-\frac{3}{2}\pi < \theta < 0$