第 1 章　数值计算引论

1．1　内容提要

一、误差的来源

数值计算主要研究以下两类误差。

1．截断误差

数学模型的准确解与用数值方法求得的解的差称为截断误差，又称为方法误差。这种误差常常是由用有限过程代替无穷过程时产生的误差。例如，要计算级数

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

的值，当用计算机计算时，用前 n 项（有限项）的和

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

来代替无穷项之和，即舍弃了 n 项后边的无穷多项，因而产生了截断误差

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

2．舍入误差

由于计算机字长为有限位，原始数据和四则运算过程中进行舍入所产生的误差称为舍入误差。例如，用 3.141 59 表示圆周率 π 时产生的误差 0.000 002 6⋯,用 0.333 33 表示 1÷3 的运算结果时所产生的误差 1÷3-0.333 33 = 0.000 003 3⋯都是舍入误差。

二．近似数的误差表示

1．绝对误差

设 x^* 是准值 x 的一个近似值，称

$$e(x^*)=x-x^*$$

为近似值 x^* 的绝对误差，简称误差。

令 $|e(x^*)|$ 的一个上界为 ε^*，即

$$|e(x^*)|=|x-x^*|\le\varepsilon^*$$

把 ε^* 称为近似数 x^* 的绝对误差限，简称误差限。

2． 相对误差

设x^*是精确值x的一个近似值，称

$$\frac{e(x^*)}{x}=\frac{x-x^*}{x}$$

为近似值x^*的相对误差。在实际应用中常取

$$e_r(x^*)=\frac{x-x^*}{x^*}$$

为x^*的相对误差。

令相对误差绝对值 $|e_r(x^*)|$的一个上界为ε_r^*，即

$$|e_r(x^*)|=\frac{|x-x^*|}{|x^*|}\le\varepsilon_r^*$$

把ε_r^*称为近似数x^*的相对误差限。

3． 有效数字

对有多位数字的准确值四舍五入原则得到其前若干位的近似值时，该近似值的绝对误差不超过末位的半个单位。

设数x的近似值$x^*=\pm 0.x_1x_2\cdots x_n\times 10^m$，其中，$x_i$是0~9之间的任一个数，但$x_i\neq 0$，

$i=1,2,\cdots n$ 是正整数，m是整数，若

$$|x-x^*|\le\frac{1}{2}\times 10^{m-n}$$

则称x^*为x的具有n位有效数字的近似值，x^*准确到第n位，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是x^*的有效数字。

有效数字位数越多，绝对误差越小。

4． 有效数字和相对误差

若近似值$x^*=\pm 0.x_1x_2\cdots x_n\times 10^m$ 具有n位有效数字，则其相对误差

$$|e_r^*|\le\frac{1}{2x_1}\times 10^{-(n-1)}$$

有效数字位数越多，相对误差越小。

若近似值$x^*=\pm 0.x_1x_2\cdots x_n\times 10^m$ 的相对误差

$$|e_r^*| \le \frac{1}{2(x_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$$

则该近似数 x^* 至少有 n 位有效数字。

三．数值计算误差分析

1． 函数运算误差

设一元函数 $f(x)$，自变量 x 的近似值为 x^*，函数 $f(x)$ 的近似值为 $f(x^*)$，则函数 $f(x)$ 的绝对误差限

$$\varepsilon[f(x^*)] \approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$$

相对误差限

$$\varepsilon_r[f(x^*)] \approx \left|\frac{f'(x^*)}{f(x^*)}\right|\varepsilon(x^*)$$

设多元函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的近似值为 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$，函数 y 的近似值为 $y^* = f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$，则函数 y 的绝对误差限

$$\varepsilon(y^*) = \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^*\right| \varepsilon(x^*)$$

相对误差限

$$\varepsilon(y^*) = \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^*\right| \frac{\varepsilon(x^*)}{y^*}$$

上二式中

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^* = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_i}$$

2． 算术运算误差

以 x_1, x_2 两数为例，设 x_1^*, x_2^* 分别为准确值 x_1, x_2 的近似值，其误差限分别为 $\varepsilon(x_1^*), \varepsilon(x_2^*)$，则

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) \approx \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^*) \approx |x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) \approx \frac{|x_1^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_2^*|\varepsilon(x_1^*)}{(x_2^*)^2}, x_2^* \neq 0$$

三．数值稳定性和减小运算误差

1．数值稳定性

在数值计算过程中，舍入误差在一定条件下能得到控制，或者说是舍入误差的增长不影响产生可靠的结果，则该计算是数值稳定的，否则是数值不稳定。在实际计算时，要选用数值稳定的方法，不稳定的数值方法不能使用。

2．减小运算误差

（1）避免相近的数相减，防止有效数字位数损失。

（2）防止大数“吃掉”小数，保护重要的物理参数。

（3）绝对值小的数不宜做除数。

（4）简化计算步骤，减少运算次数。

1．2 习题及解答

1．已知π =3.141 592 654S，问：

（1）若其近似值取 5 位有效数字，则该近似值是多少？其误差限是多少？

（2）若其近似值精确到小数点后面 4 位，则该近似值是什么？其误差限是什么？

（3）若其近似值的绝对误差限为0.5×10^{-5}，则该近似值是什么？

解 （1）近似值 π^* = 3.141 6，误差限$\varepsilon^* = \frac{1}{2}\times10^{-4}$。

（2）和（1）相同，π^* = 3.141 6，$\varepsilon^* = \frac{1}{2}\times10^{-4}$。

（3）π^* = 3.141 59。

2．下列各数都是经过四舍五入得到的近似值，求各数的绝对误差限、相对误差限和有效数字的位数。

（1）3 580

解 绝对误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2}\times10^{0} = 0.5$。

相对误差限$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \frac{0.5}{3580} = 1.4\times10^{-4} = 0.014\%$。

经过四舍五入得到的近似值 3 580，其各位都是有效数字，故有 4 位有效数字。

（2）0.047 6

解 绝对误差限$\varepsilon^* = \frac{1}{2}\times10^{-4} = 0.5\times10^{-4}$。

相对误差限$\varepsilon_r^* = \dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \dfrac{0.5\times10^{-4}}{0.0476} \approx 0.00105 \approx 0.11\%$ 。

经过四舍五入得到的近似值 **0.047 6**，其各位都是有效数字，故有效数字的位数为 **3** 位。

（**3**）**30.120**

解 绝对误差限$\varepsilon^* = \dfrac{1}{2}\times10^{-3} = 0.0005$

相对误差限$\varepsilon_r^* = \dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \dfrac{0.0005}{30.120} \approx 0.0017\ \%$

经过四舍五入得到的近似值 **30.120**，其各位都是有效数字，故有效数字的位数为 **5** 位。

（**4**）$0.3012\ \times10^{-5}$

解 绝对误差限$\varepsilon^* = \dfrac{1}{2}\times10^{-4}\times10^{-5} = 0.5\times10^{-9}$

相对误差限$\varepsilon_r^* = \dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \dfrac{0.5\times10^{-9}}{0.3012\ \times10^{-5}} \approx 0.017\ \%$

经过四舍五入得到的近似值$0.3012\ \times10^{-5}$，其各位都是有效数字，故有效数字的位数为 **4** 位。

1. 确定圆周率π如下近似值的绝对误差限、相对误差限，并求其有效数字的位数。

（**1**）$\dfrac{22}{7}$

解 $\dfrac{22}{7}$ **= 3.142 857⋯**，π **=3.141 592⋯**。

| π **-** $\dfrac{22}{7}$ **| = | 3.141 592⋯ － 3.142 857⋯** | = 0. 001 264⋯，取绝对误差e^*=0. 001 3，则相对误差

$$e_r^* = \frac{e^*}{|x^*|} = \frac{0.0013}{\pi} = 0.04138\ \%$$

或取绝对误差限$\varepsilon^* = 0.005 = \dfrac{1}{2}\times10^{-2}$。因为 m=1，m−n=−2，所以 n=3，有 3 位有效数字。此时相对误差限$\varepsilon_r^* = \dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \dfrac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{0.314} = 0.159\,\%$ 。又解，相对误差限$\varepsilon_r^* = \dfrac{1}{2\times3}\times10^{-(3-1)} = 0.17\%$。前者比后者更精确。

（2）$\dfrac{223}{71}$

解 $\frac{223}{71}$=3.140 84…，π =3.141 59…。

$|\pi-\frac{223}{71}|=|3.141\ 59\cdots-3.140\ 84\cdots|=0.000\ 75\cdots$，取绝对误差 e^*=0.000 76，则相对误差

$$e_r^*=\frac{e^*}{|x^*|}=\frac{0.00076}{\pi}=0.02419\ \%$$

或取绝对误差限 $\varepsilon^*=0.005=\frac{1}{2}\times10^{-2}$。因为 m=1，m−n=−2，所以 n=3，有 3 位有效数字。此时相对误差限 $\varepsilon_r^*=\frac{\varepsilon^*}{|x^*|}=\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{0.314}=0.159\%$ 。

又解，相对误差限 $\varepsilon_r^*=\frac{1}{2\times3}\times10^{-(3-1)}=0.17\%$ 。前者比后者更精确。

（3）$\frac{355}{113}$

解 $\frac{355}{113}$=3.141 592 92…，π =3.141 59…。

$|\pi-\frac{355}{113}|=|3.141\ 592\ 654\cdots-3.141\ 592\ 920\cdots|=0.000\ 000\ 266\cdots$，取绝对误差 e^* =0.000 000 267，

则相对误差 $e_r^*=\frac{e^*}{|x^*|}=\frac{0.000000267}{\pi}=0.0000085\ \%$

或取绝对误差限 $\varepsilon^*=0.0000005=\frac{1}{2}\times10^{-6}$。因为 m=1，m−n=−6，所以 n=7，有 7 位有效数字。此时相对误差限 $\varepsilon_r^*=\frac{\varepsilon^*}{|x^*|}=\frac{\frac{1}{2}\times10^{-6}}{0.314}=0.0000159\ \%$ 。

又解，相对误差限 $\varepsilon_r^*=\frac{1}{2\times3}\times10^{-(7-1)}=0.000017\ \%$ 。前者比后者更精确。

设 $x=108.57\ln t$，其近似值 x^* 的相对误差 $e(x^*)\le0.1$，证明 t^* 的相对误差

$$e_r(t^*)<0.1\%\ 。$$

证 $e(x^*)=108.57(\ln t-\ln t^*)=108.57\ln(\frac{t}{t^*})\le0.1$

$$0<\frac{t}{t^*}\le e^{\frac{0.1}{108.57}}$$

$$e_r(t^*) = \frac{t - t^*}{t^*} = \frac{t}{t^*} - 1 \le e^{\frac{0.1}{108.57}} - 1 \approx 9.21 \times 10^{-4} < 0.1\%$$ 。

1. 要使 $\sqrt{6}$ 近似值的相对误差限小于 **0.1%**，需取几位有效数字？

解 方法 **1**：因为 $\sqrt{6}$ =**2.449 4⋯**，有 x_1=2，设近似值 x^* 有 n 位有效数字，由定理

$$\varepsilon_r^* = \frac{1}{2x_1} \times 10^{-(n-1)}$$

有

$$\frac{1}{2 \times 2} \times 10^{-(n-1)} < 0.1\%$$

$$\frac{1}{4} \times 10^{-(n-1)} < 1 \times 10^{-3}$$

比较不等式 $\frac{1}{4} < 1$，所以 **n-1=3**，**n=4**，故取 **4** 位有效数字，x^*=**2.449**。

方法 **2**：根据相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$，有 $\varepsilon^* = \varepsilon_r^* |x^*|$，所以

$$\frac{1}{2} \times 10^{-3} \times 2.449 \cdots = 0.0012247 \cdots < 0.0005 = \frac{1}{2} \times 10^{-3} = \varepsilon^*$$

即 **m-n=-3**，由于 **m=1**，所以 **n=4**，故取 x^*=**2.449**。

方法 3：解法 **1** 和解法 **2** 的结果都是偏于保守的。在解法 **1** 中，对定理所有具有 **n** 位有效数字的近似值都正确，故对误差估计偏大；在解法 **2** 中，取绝对误差限确定有效数字 **n** 位是偏大的。对于本例题，根据上述的结论，试取 **3** 位有效数字 **2.45** 进行试算，其相对误差

$$\frac{|\sqrt{6} - 2.45|}{2.45} = 0.000208 < 0.1\%$$

实际已满足要求。

1. 已知近似数 x^* 的相对误差限为 **0.3%**，问 x^* 至少有几位有效数字？

解 由 ε_r^*=**0.3%**，根据定理，有

$$0.3\% = \frac{1}{2(x_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)}$$

x_1 的取值范围是 **1~9**，由于 x_1 未给出，取 x_1=**1**，**n=2.92**；取 x_1=**9**，**n=2.22**，按量不利的情况，x^* 至少有 **2** 位有效数字。

2. 设 **x > 0**，其近似数 x^* 的相对误差限对 δ，求 $\ln x^*$ 的绝对误差和相对误差。

解 由函数运算的误差限$\varepsilon[f(x^*)]\approx|f'(x^*)|\varepsilon^*$，并考虑到x>0，有

$$\varepsilon(\ln(x^*))\approx(\ln x^*)'\varepsilon^*=\frac{\varepsilon^*}{x^*}=\delta$$

或解

$$\varepsilon(\ln x^*)=|\ln x-\ln x^*|=|\ln\frac{x}{x^*}|=|\ln\frac{x-x^*+x^*}{x^*}|$$

$$=|\ln\frac{x-x^*}{x^*}+1|=|\ln(\delta+1)|\approx\delta$$

由函数运算的相对误差限$\varepsilon_r[f(x^*)]\approx|\frac{f'(x^*)}{f(x^*)}|\varepsilon^*$，有

$$\varepsilon_r(\ln x^*)\approx|\frac{(\ln x^*)'}{\ln x^*}|\varepsilon^*=\frac{\varepsilon^*}{x^*}|\frac{1}{\ln x^*}|=\frac{\delta}{|\ln x^*|}$$

8. 计算球体积$V=\frac{4}{3}\pi r^3$时，为使V的相对误差不超过**0.3%**，问半径**r**的相对误差允许是多少？

解 设**r**的近似值为r^*，V的近似值为V^*

解法**1**：根据定义 $$e_r(V^*)=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{4}{3}\pi r^{*3}}{\frac{4}{3}\pi r^{*3}}=\frac{r^3-r^{*3}}{r^{*3}}$$

$$=\frac{r-r^*}{r^*}\frac{r^2+rr^*+r^{*2}}{r^{*2}}$$

注意到$r\approx r^{*2}$，有

$$e_r(V^*)\approx e_r(r^*)\frac{3r^{*2}}{r^{*2}}=3e_r(r^*)$$

令$|e_r(V^*)|\approx|3e_r(r^*)|\le 0.3\%$，可知半径**r** 允许的相对误差$e_r(V^*)|\le 0.1\%$ 。

解法**2**：利用数值运算误差估计公式（下面公式用**r**和**V**表示也可）

$$\varepsilon(V)\approx(\frac{4}{3}\pi r^3)\varepsilon(r)=4\pi r^2\varepsilon(r)$$

$$|\varepsilon_r(V)|=|\frac{\varepsilon(V)}{V}|\approx\frac{4\pi r^2\varepsilon(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3}=3|\varepsilon_r(r)|\le 0.3\%$$

可得半径 r 的允许相对误差为

$$|\varepsilon_r(r)| \le \frac{0.3\%}{3} = 0.1\%$$

9. 真空中自由落体运动距离 s 和时间 t 的关系 $s=\frac{1}{2}gt^2$，并设重力加速度 g 是准确的。而对 t 的测量有 ± 0.1 s 的误差，证明当 t 增加时，距离 s 的绝对误差增加，而相对误差却减少。

解 由 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 得 ds=gtdt，因而

$$e(s^*) \approx gte(t^*)$$

$$e_r(s^*) \approx \frac{gte(t^*)}{\frac{1}{2}gt} = \frac{2}{t}e(t^*)$$

于是

$$|e(s^*)| \approx gt\,|e(t^*)|$$

$$|e_r(s^*)| \approx \frac{2}{t}|e(t^*)|$$

可见，当 $|e(t)|$ 固定时，$|e(s^*)|$ 随着 t 的增加而增加，而 $|e_r(t)|$ 却随着 t 的增加而减少。

10. 求积分值 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}dx, n = 0,1,\cdots,8$。

解 由

$$I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1}}{x+5}dx = \int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n}$$

可得两个递推计算方法。

方法 1： $$I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1}, n = 1,2,\cdots,8$$

方法 2： $$I_{n-1} = \frac{1}{5}(\frac{1}{n} - I_n), n = 8,7,\cdots,1$$

方法 1 的初值

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}dx = \ln 1.2 = 0.1823$$

方法 2 的初值，利用广义积分中值定理

$$I_n = \frac{1}{\xi+5}\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{\xi+5}\frac{1}{n+5}, \xi \in [0,1]$$

所以

$$\frac{1}{6(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{5(n+1)}$$

取

$$I_8 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{54} + \frac{1}{45}\right) = 0.02037$$

取 **4** 位有效数字进行计算，其结果如表 **1-1** 所示。

表 1-1 计 算 结 果

I_n	方法 1	方法 2	准确值	I_n	方法 1	方法 2	准确值
I_0	**0.182 3**	**0.182 3**	**0.182 3**	I_5	**0.095 75**	**0.028 46**	**0.028 47**
I_1	**0.088 50**	**0.088 39**	**0.088 39**	I_6	**-0.312 1**	**0.024 39**	**0.024 33**
I_2	**0.057 50**	**0.058 04**	**0.058 04**	I_7	**-1.703**	**0.020 93**	**0.021 23**
I_3	**0.045 83**	**0.043 14**	**0.043 14**	I_8	**-8.392**	**0.020 37**	**0.018 84**
I_4	**0.020 85**	**0.034 31**	**0.034 31**				

从计算结果可以看出，方法 **1** 在 I_6 时已为负值，显然与 I_n **>0** 矛盾，事实上 I_4 和准确值相比已经连 **1** 位有效数字也没有了，这时因为当 I_0 带有 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$ 的误差时，这个初始数据的误差在以后的每次计算时顺次乘以 5^1，5^2，…而传播到 I_n 中，使得算到 I_4 就完全不准确了。方法 **2** 在初始值 I_8 时 **1** 位有效数字也没有，但倒推计算到 I_4，I_3，…，I_0 时各位都是有效数字，这是因为递推公式的误差是按 $\frac{1}{5^n}$ 减少的，是稳定的计算公式。

9. 设 **a=1 000**，取 **4** 位有效数字用如下两个等价的式子

$$x = \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \quad 和 \quad x = \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

进行计算，求 x 的近似值 x^*，并将结果与准确值 **x=0.015 807 437S** 比较，各有多少位有效数字。

解 将 **a=1 000** 代入，取 **4** 位有效数字，有

$$x^* = \sqrt{a+1} - \sqrt{a} = \sqrt{1000+1} - \sqrt{1000} = 31.64 - 31.62 = 0.02$$

$$x^* = \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{1000\ +1}+\sqrt{1000}} = \frac{1}{31.64+31.62} = 0.01581$$

与准确值 **x=0.015 807 437**⋯比较，因前者出现相近似数相减，计算结果只有 **1** 位有效数字，后者没有相近数相减，有 **4** 位有效数字。

10. 计算 $f = (\sqrt{2}-1)^6$，取 $\sqrt{2} \approx 1.4$，利用下列等价的式子计算，得到的哪一个结果最好？

（**1**）$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$；（**2**）$(3-2\sqrt{2})^3$；（**3**）$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$；（**4**）$99-70\sqrt{2}$

解 第(4)式和第(2)式出现相似数相减，且第（**2**）式计算量比第（**4**）式大，二者都不可能得到好的运算结果。第（**1**）式和第（**3**）式均不出现相近数相减，但第（**1**）式乘法运算次数比第（**3**）式多，而二都除法运算次数相同，故第（**1**）式的计算量比第（**3**）式大，第次乘除法运算都可能引入新的舍入误差，故只有第（**3**）式能给出好的运算结果。

13. 利用四位数学用表求 $1-\cos 2^\circ$，比较不同方法计算所得结果的误差。

$$1-\cos 2^\circ \approx 1-0.9994 = 0.0006$$

只有 **1** 位有效数字。

改用其它方法计算

$$1-\cos 2^\circ = \frac{\sin^2 2^\circ}{1+\cos 2^\circ} \approx \frac{0.03490^2}{1.9994} \approx 6.092\times 10^{-4}$$

具有 **4** 位有效数字。

$$1-\cos 2^\circ = 2\sin^2 1^\circ \approx 6.09\times 10^{-4}$$

具有位为有效数字。

准确值 $1-\cos 2^\circ = 6.0917\cdots\times 10^{-4}$，故以上三种计算方法的误差限分别是 0.1×10^{-4}，0.0003×10^{-4}，0.002×10^{-4}。

14.用消元法解线性方程组。

$$\begin{cases} x+10^{15}y = 10^{15} \\ x+y = 2 \end{cases}$$

若只用 **3** 位数计算，结果是否可靠？

解 用方程组的上式，得

$$(10^{15}-1)y = 10^{15}-2$$

即

$$y = \frac{10^{15}-2}{10^{15}-1}$$

再将方程组的下式乘以10^{15}，减去上式，可得

$$(10^{15}-1)x = 10^{15}$$

从面有

$$x = \frac{10^{15}}{10^{15}-1}$$

假定只用 **3** 位计算，则通过上述消元过程分别得到的方程组是

$$\begin{cases} 10^{15}y = 10^{15} \\ 10^{15}x = 10^{15} \end{cases}$$

从而得到原方程的解为

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

这个结果显然不可靠，因为在消元过程中发生了大数“吃掉”小数的现象。

15. 对反双曲线正弦函数 $f(x) = \ln(x-\sqrt{x^2-1})$，求 $f(30)$ 的值。若开平方用 **6** 位函数表，问求对数时误差有多大。若改用另一等价公式 $\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 计算，问求对数误差有多大。

解 对于反曲线正弦函数 $f(30) = \ln(30-\sqrt{30-1})$，记 $a = 30-\sqrt{899}$，若用 **6** 位的开平方函数表，则有

$$a* = 30 - 29.9833 = 0.0167$$

故有绝对误差

$$\varepsilon(a*) = \frac{1}{2}\times 10^{-4}，而 f(30) \approx 0.0167$$

于是有

$$\varepsilon[f(30)] = \varepsilon(\ln a*) \approx \left|\frac{1}{a^*}\right|\varepsilon(a^*) = \frac{0.5}{0.0167}\times 10^{-4} \approx 0.003$$

对于等价公式有

$$f(30) = -\ln(30+\sqrt{30^2-1})$$

记 $b = 30+\sqrt{899}$，若用同样的 **6** 位的开平方函数表，有

$$b^* = 30 + 29.9833 = 59.9833$$

进而得到绝对误差

$$\varepsilon(b^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

而 $f(30) \approx \ln b^*$，使用误差传播公式

$$\varepsilon[f(30)] = \varepsilon(\ln b^*) \approx \left|\frac{1}{b^*}\right| \varepsilon(b^*) = \frac{0.5}{59.9833} \times 10^{-4} \approx 0.834 \times 10^{-6}$$

16. 利用公式 $\sqrt{783} \approx 27.982$（有 **5** 位有效数字），求方程 $x^2 - 56x - 1 = 0$ 的两个根，使其至少具有 **4** 位有效数字。

解 求根公式 $x_{1,2} = \dfrac{56 \pm \sqrt{56^2 - 4}}{2} = 28 \pm \sqrt{783}$

解出 $x_1 = 57.98$

$$x_2 = 28 - \sqrt{783} = \frac{28^2 - 783}{28 + \sqrt{783}} \approx \frac{1}{55.98} = 0.01786$$

或 $x_2 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{55.98} = 0.01786$

17. 用秦九韵算法计算

$$p(x) = x^3 - 3x - 1$$

在 $x = 2$ 处的值。

解 秦九韵算法

$$\begin{cases} v_0 = a_n \\ v_k = v_{k-1}x + a_{n-k}, \end{cases} \quad k = 1,2\ldots,n$$

由已知，$n = 3$

k=1 时，$v_0 = a_3 = 1, v_1 = v_0 x + a_2 = 1 \times 2 + 0 = 2$

k=2 时，$v_2 = v_1 x + a_1 = 2 \times 2 + (-3) = 1$

k=3 时，$v_3 = v_2 x + a_0 = 1 \times 2 + (-1) = 1$

所以，$p(2) = 1$。

或写成紧凑形式

$$\begin{array}{c|cccc} x=2 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ & & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 1=p(2) \end{array}$$

。

3 同步练习题及解答

1. 下列各数的是经四舍五入得到的近似值，试指出它们各有几位有效数字，并给出其差限与相对差限。

$$x_1^* = 4.7021 , x_2^* = 0.067 , x_3^* = 280.20$$

解 x_1^*有 **5** 位有效数字，其误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-4}}{4.7021}$

0.0010634%。

x_2^*有 **2** 位有效数字，其误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$，相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-3}}{0.067}$ **0.746%**。

x_3^*有 **5** 位有效数字，其误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$，相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-2}}{280.20}$ **=001784%**。

2. 设下列各对近似值均为有效数字，问它们是否一样，若不一样有何区别。

（**1**）**45800** 和 **458**$\times 10^2$

解 不一样，二者的有效数字和误差限均不同。

45800 的误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2}$，有效数字的位数为 **5** 位。

458×10^2 的误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^2$，有效数字的位数为 **3** 位。

(2) **0.00438** 和 **0.04380**$\times 10^{-1}$

解 不一样，二者的有效数字和误差限均不同。

0.00438 的误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{-5}$, 有效数字的位数为 **3** 位。

0.04380$\times 10^{-1}$的误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{-6}$，有效数字的位数为 **4** 位。

(3) **0.4015**$\times 10^2$ 和 **0.04015**$\times 10^3$

解 一样，二者的有效数字和误差限均相同。

0.4015$\times 10^{2}$和$0.04015\ \times 10^{3}$的误差限均为，$\varepsilon^{*}=\frac{1}{2}\times 10^{-2}$，有效数字位数均为**4**位。

(4)9800和98×10^{2}

解 不一样，二者的有效数字和误差限均不相同。

9800的误差限，$\varepsilon^{*}=\frac{1}{2}$，有效数字的位数为**4**位。

98×10^{2}的误差限$\varepsilon^{*}=\frac{1}{2}\times 10^{2}$，有效数字的位数为**2**位。

（**5**）**0.8070**和**0.807**

解 不一样，二者的有效数字和误差限均不相同。

0.8070的误差限$\varepsilon^{*}=\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，有效数字的位数为**4**位。

0.807的误差限$\varepsilon^{*}=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$，有效数字的位数为**3**位。

3. 求$\sqrt{10}$的有效近似值吗，是相对误差不超过**0.1%**。

解 方法**1**：$\sqrt{10}\approx 3.1622776\ \cdots, x_1=3$，当有 **n** 位有效数字时。

$$\varepsilon_r^{*}=\frac{1}{2x_1}\times 10^{-(n-1)}=\frac{1}{2\times 3}\times 10^{-(n-1)}$$

$$\frac{1}{2\times 3}\times 10^{-(n-1)}\le 10^{-3}$$

比较上不等式有$-(n-1)=-3$，因此，$n=4$，所以取$x^{*}=3.162$。

方法**2**：根据相对误差$\varepsilon_r^{*}=\frac{\varepsilon^{*}}{\left|x^{*}\right|}$，有$x^{*}=x_r^{*}\left|x^{*}\right|$，所以

$$\frac{1}{2}\times 10^{-3}\times 3.162\cdots=0.0012247\ \cdots$$

为确定有效数字的位数**n**，取$\varepsilon^{*}=0.0005\ =\frac{1}{2}\times 10^{-3}$，即$m-n=-3$，由于**m=1**，所以**n=4**。

故取$x^{*}=3.162$。

方法**3**：解法**1**和解法**2**的结果都是偏于保守的。在解法**1**中，定理对所具有**n**位有效数字的近似值都正确，故对误差估计偏大。在解法**2**中，取绝对误差限确定有效数字的位数**n**也是偏大的。对于本例题，根据上述的结论试取**3**位有效数字**2.45**进行试算，其相对误差

$$\frac{\left|\sqrt{10}-3.16\right|}{3.16}=0.000721 \prec 0.1\%$$

实际已满足要求。

4. 已测得某房间长 $l^*=4.32\,\mathrm{m}$，宽 $d^*=3.12\,\mathrm{m}$，已 $\left|l-l^*\right|\le 0.01\mathrm{m}, \left|d-d^*\right|$ $\le 0.01\,\mathrm{m}$，求房间的面积 $s=ld$ 的误差限与相对误差限。

解 因 $s=ld$，故 $\frac{as}{al}=d, \frac{as}{ad}=l$。由函数计算的误差估计，有

$$\varepsilon(s^*)\approx\left|\left(\left|\frac{as}{al}\right|\right)\right|\varepsilon(l^*)+\left|\left(\frac{as}{ad}\right)^*\right|\varepsilon(d^*)$$

其中，$\left(\frac{as}{al}\right)^*=d^*=3.12, \left(\frac{as}{ad}\right)=l^*=4.32, \varepsilon\left(l^*\right)=\varepsilon(d^*)=0.01$。于是误差限

$$\varepsilon(s^*)=(3.12+4.32)\times 0.01\mathrm{m}^2=0.0744\ \mathrm{m}^2$$

相对误差限

$$\varepsilon_r(s^*)=\frac{\varepsilon(s^*)}{\left|s^*\right|}=\frac{\varepsilon(s^*)}{l^*d^*}=\frac{0.0744}{13.4784}\approx 0.55\%$$

序列 $\left|y_n\right|$ 满足递推关系

$$y_n=10\,y_{n-1},\quad n=1,2,\cdots$$

若 $y_0=\sqrt{2}, y_0=1.14$，而

$$\left|y_0-y_0^*\right|=\left|\sqrt{2}-1.41\right|\prec\frac{1}{2}\times 10^{-2}=\varepsilon^*$$

于是有

$$\left|y_1-y_1^*\right|=\left|10\,y_0-1-10\,y_0^*+1\right|=10\left|y_0-y_0^*\right|\le 10\,\varepsilon^*$$

$$\left|y_2-y_2^*\right|=\left|10\,y_1-1-10\,y_1^*+1\right|=10\left|y_1-y_1^*\right|\le 10^2\,\varepsilon^*$$

类推之，有

$$\left|y_{10}-y_{10}^*\right|\le 10\,\varepsilon^*$$

即计算到 y_{10}，其误差限为$10^{10}\,\varepsilon^*$，即若 y^0 处有误差限为 ε^*，则 y_{10} 的误差限将扩大10^{10}，可见这个计算过程是不无能定的。

6. 如何计算下列函数值才比较精确？

（1）$\frac{1}{1+2x}-\frac{1}{1+x}$ 对$|x|\ll 1$

解 要是计算精确，应该避免两近似数相减，故变换所给公式

$$\frac{1}{1+2x}-\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)-(1+2x)}{(1+2x)(1+x)}=\frac{-x}{(1+2x)(1+x)}$$

（2）$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}$ 对$|x|\gg 1$

解 要是计算精确，应该避免两近似数相减，故变换所给公式

$$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{(x+\frac{1}{x})-(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}=\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}=\frac{2}{\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)}$$

（3）$\int_n^{n+1}\frac{1}{1+x^2}dx$，当 n 充当大时

解 要是计算精确，应该避免两近似数相减，故变换所给公式

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(N+1)-\arctan N=\arctan\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}=\arctan\frac{1}{1+(n+1)n}$$

（4）$\frac{e^{2x}-1}{2}$对$|x|\ll 1$

解 要是计算精确，应该避免两近似数相减，故变换所给公式

$$\frac{e^{2x}-1}{2}=\frac{e^{x}(e^{2x}-e^{-2x})}{2(e^{x}-e^{-x})}$$

第 2 章 非线性方程的数值解法

2.1 类容提要

一．初始近似值的搜索

1. 方程的根

对于一元非线性方程 $f(x)=o$，若 $f(x)$ 为代数多项式，则称 $f(x)=o$ 为代数方程；

是否称为超越方程。

（1）若存在 x^* 使 $f(x^*)=o$，则称 x^* 是方程的解或根，也称 x^* 是还是函数 $f(x)$ 的零点或根。

（2）若函数 $f(x)$ 可分解为

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x), g(x^*)\neq 0$$

其中，**m** 是正整数；则称 x^* 是方程 $f(x)=o$ 的 **m** 重根。当 **m=1** 时，称 x^* 是方程 $f(x)=o$ 的单根。

（3）设函数 $f(x)$ 有 **m** 阶连续导数，方程 $f(x)$ **=0** 有 **m** 重根 x^* 的充要条件是

$$f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0,\quad f^{(m)}(x^*)\neq 0$$

（4）若方程 $f(x)$ **=0** 在区间 $[a,b]$ 内至少有一个根，则称 $[a,b]$ 为有根区间。

定理 2-1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)\prec 0$，则方程 $f(x)$ **=0** 在 $[a,b]$ 上至少有一个根。

（5）若在区间 $[a,b]$ 上只有方程 $f(x)$ **=0** 一个根，则称 $[a,b]$ 为隔根区间

定理 2-2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调连续，且 $f(a)f(b)\prec 0$，则方程 $f(x)$ **=0** 在 $[a,b]$ 上有且仅有一个根。

2．区间二分法

通过计算隔根区间的中点，逐步缩小根区间，从而得到方程的近似根。

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一个实根 x^*，通过中点 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 将区间 $[a,b]$ 二等分，得到新的有根区间 $[a_1,b_1]$ 是原区间 $[a,b]$ 之半，重复以上过程有

$$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}$$

去区间 $[a_k,b_k]$ 的中点 $x_k=\dfrac{a_k=b_k}{2^k}$ 作为方程 $f(x)$ **=0** 的根 x^* 的近似值，此时有

$$\left|x^*-x_k\right|\leq\frac{b_k-a_k}{2}=\frac{b-a}{2^{k+1}}$$

上式即为第 k 次近似值的误差估计式，当误差ε给定时可用上式确定二分的次数 k，即用

$$\frac{b-a}{2^{k+1}} \prec \varepsilon$$

求二分次数 K。

二、**迭代法**

1.迭代原理

将方程 f(x)=0 改写成等价方程

$$x=\phi(x)$$

其中 $\phi(x)$称为迭代函数。若 $x^*=\phi(x^*)$,则称 x^*是 $\phi(x)$的不动点，也是方程 f(x)=0 的根。构造迭代格式

$X_{k+1}=\phi(x_k)$,k=0，1，•••

当有初值 x_0时，可求出 x_1,x_2, •••，若 x_k

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

则称 x^*是方程 f(x)=0 的根。

2.迭代的收敛性

定理 2-3 设函数 $\phi(x)$在[a,b]上具有连续一阶导数，且满足

① 对任意 $x\in[a,b]$,有 $\phi(x)\in[a,b]$;

② 存在 0<L<1,使对任意 $x\in[a,b]$，有

$|\phi'(x)|\leq L<1$

则方程 $x=\phi(x)$在[a,b]上唯一的根 x^*，即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

推论 2-1 在定理的条件下，有误差估计式

$|x^*-x_k|\leq \frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$

$|x^*-x_k|\leq \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$

定义 2-1 若存在 x^*的某个邻域Δ：$|x-x^*|\leq\delta$, δ是任意指定的正数，使迭代过程 $x_{k+1}=\phi(x_k)$对任意初值 $x_0\in\Delta$均收敛，则称迭代过程 $x_{k+1}=\phi(x_k)$在根 x^*邻域具有局部收敛性。

定理 2-4 设 $\phi(x)$在 $x=\phi(x)$的根 x^*邻域有连续的一阶导数，且

$|\phi'(x^*)|<1$

则迭代过程 $x_{k+1}=\phi(x_k)$局部收敛。

3.迭代的收敛速度

定义 2-2 设迭代过程 $x_{k+1}=\phi(x_k)$收敛于 $x=\phi(x)$的根，令迭代误差 $e_k=x_k-x^*$,若存在常数 $p(p\geq1)$和 $c(c>0)$,使

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=c$$

则称序列$\{x_k\}$是 p 阶收敛的，c 称渐进误差常数。

定理 2-5 对迭代过程 $x_{k+1}=\phi(x_k)$,若 $\phi^{(p)}(x)$在所求根 x^*的邻域连续，且

$\phi'(x^*)=\phi''(x^*)=\cdots=\phi^{(p-1)}(x^*)=0,\ \phi^{p}(x^*)\neq 0$

则迭代过程 $x_{k+1}=\phi(x_k)$在 x^*邻域 p 阶收敛，且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

4.迭代的加速

（1）加权法

设 x_k 是 x^*的某个近似值，在$[x_k,\ x^*]$上φ'（x）变化不大，其估计值为 c 时，有加权法加速公式

$$X_{k+1}=\frac{1}{1-c}[\varphi(x_k)-cx_k]$$

（2）埃特金加速和斯蒂文森迭代法

设$\overline{x}_{k+1}=\phi(x_k)$，$\tilde{x}_{k+1}=\phi(\overline{x}_{k+1})$，则有

$$X_{k+1}=x_k-\frac{(\overline{x}_{k+1}-x_k)^2}{\tilde{x}_{k+1}-2\overline{x}_{k+1}+x_k},\quad k=0,1\cdots$$

上述方法称为埃特金加速法。

当$\{x_k\}$是由不动点迭代产生时，即 $y_k=\phi(x_k)$，$z_k=\phi(y_k)$时，则有斯蒂文森迭代法

$$X_{k+1}=x_k-\frac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k}$$

三、牛顿迭代法

1.迭代公式

$$X_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1\cdots$$

牛顿迭代法是将非线性方程 f(x)=0 逐步线性化，从而将非线性方程近似的转化为线性方程得到迭代序列的方法。

牛顿迭代法的几何意义是作曲线 y=f(x)在点（x_k，$f(x_k)$）的切线方程

$y-f(x_k)=f'(x_k)(x-x_k)$

该方程与 x 轴交点的横坐标就是根 x^*的新的近似值 x_{k+1}，所以牛顿迭代法又称牛顿切线法。

2.收敛速度

定理 2-6 设函数 f(x)满足 $f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0$,且 $f''(x)$在 x^*领域连续，则牛顿迭代法在 x^*局部收敛，且至少二阶收敛。并有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

3．牛顿迭代法的修正

（1）简化牛顿法

为了避免每次迭代求导数，将牛顿迭代法修正为

$$X_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{c}$$

其中，c 为某一常数，其几何意义是用各点 x_k 处的斜率均为 c 的平行弦代替相应点的切线，因此通常称为平行弦法。

（2）牛顿下山法

牛顿切线法是一种局部收敛方法，要求初值 x_0 在 x^* 领域时迭代方法才收敛，为防止迭代发散或迭代值偏离所求的根，对迭代过程附加下山条件

$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$

并将牛顿迭代法和下山法结合得到迭代公式

$$X_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

其中，λ称为下山因子，取值 $0<\lambda\le1$，通常选$\lambda=1$，然后逐次减半，直至使下山条件成立，从而得到使迭代过程有局部收敛的初值 x_0。

（3）若 $f'(x^*)=0, f(x)=(x-x^*)^m g(x)$，且 $g(x^*)\neq0$，当 $m>1$ 时，x^*为 m 重根，此时牛顿迭代法只有线性收敛。为使重根时迭代仍至少有二阶收敛可用如下修正公式，当重根数 m 已知时，修正牛顿公式

$$X_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k=0,1\cdots$$

当重根数未知时，修正牛顿公式

$X_{k+1}=x_k\frac{f'(x_k)f(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}$，$k=0,1\cdots$

四、截弦法

用差商$\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$和$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$代替牛顿迭代公式中的导数 $f'(x_k)$即得弦截法，前者是单点弦法，后者是双点弦法（又称快速弦法），其几何意义是用过两个点的弦代替牛顿迭代法的切线，双点弦法的收敛速度仅稍慢于牛顿迭代法，远快于不动点迭代法，是超线性收敛。

2.2 习题及解答

1.求方程 $x^3-1.8x^2+0.15x+0.65=0$ 的有根区间。

解：设连续函数 $f(x)=x^3-1.8x^2+0.15x+0.65$，由于 $f(-1)<0$，$f(2)>0$，f(x)在区间[-1，2]上至少有一个实根。

取 $h=\frac{2-(-1)}{4}=0.75$ 为步长，从 x=0 出发，向右进行根的搜索，结果列表如下：

x	-1	-0.25	0.5	1.25	2
f(x)	-2.3	0.484	0.55	-0.0219	1.75

可以看出，在[-1，-0.25]，[0.5,1.25]，[1.25,2]各区间内至少有一个实根。

2.用区间二分法求方程 $x^5+3x-1=0$ 的最小正根，要求误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-2}$。

解 记 $f(x)=x^5+3x-1$，则 $f(0)=-1<0$，$f(0.5)=0.531>0$，所以最小正根 $x^*\epsilon[0,0.5]$。

用区间二分法求解，要使 $|x_k-x^*|\le\frac{1}{2}\times 10^{-2}$，只要

$$\frac{1}{2^{k+1}}(0.5\text{-}0)\le\frac{1}{2}\times 10^{-2}$$

解得 $k\ge\frac{2}{\lg 2}\text{-}1=5.64$，取 k=6，只要二分 6 次，即可求的满足精度要求的最小正根，计算过程如表 2-1 所示，取 $x^*\approx x_6=0.33$。

表 2-1 计算过程

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	0	0.5	0.25	-
1	0.25	0.5	0.375	+
2	0.25	0.375	0.312 5	-
3	0.312 5	0.375	0.343 75	+
4	0.312 5	0.343 75	0.328 125	-
5	0.328 125	0.343 75	0.335 937 5	+
6	0.328 125	0.335 937 5	0.332 031 25	

3.用区间二分法求方程 $x^3\text{-}x\text{-}1=0$ 在[1，2]的近似根，误差小于 10^{-3} 至少要二分多少次？

解 设连续函数 $f(x)=x^3\text{-}x\text{-}1$，则 $f'(3x^2\text{-}1)$，在区间[1，2]上 $f'(x)>0$ 单调连续，且 $f(1)=-1<0$，$f(2)=5>0$，所以 f(x)在区间[1,2]上只有一个根。

由二分法误差估计式 $|x^*-x_n|\le\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)<10^{-3}$，其中 a=1，b=2，则

$n>\frac{\lg(b\text{-}a)+3}{\lg 2}\text{-}1=\frac{3}{\lg 2}\text{-}1=8.966$

即误差小于 10^{-3} 至少要二分 9 次。

计算过程如表 2-2 所示，取 $x^*=1.325$。

表 2-2 计算过程

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$
0	1.000 0	—	2.000 0	+	1.500 0	+
1			1.500 0	+	1.250 0	—
2	1.250 0	—			1.375 0	+
3			1.375 0	+	1.312 5	—
4	1.312 5	—			1.343 8	+
5			1.343 8	+	1.328 2	+
6			1.328 2	+	1.320 4	—
7	1.320 4	—			1.324 3	+
8			1.328 2	+	1.326 3	—
9	1.324 2	—			1.325 3	—

4.给定函数 f(x)，对任意 x，$f'(x)$存在，且 $0<m\le f'(x)\le M$，证明对 $0<\lambda<\frac{2}{M}$的任意常数λ，

迭代过程 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 均收敛于 $f(x_k)=0$ 的根。

证 $f(x)=0$ 的等价方程

$$X=x-\lambda f(x)$$

迭代函数

$$\phi(x)=X-\gamma f(x)$$
$$|\phi'(x)|=|1-\gamma f'(x)|$$

已知 $0<m\leqslant f'(X)\leqslant M$ 和 $0<\gamma<2/M$, 有

$$0<\gamma m\leqslant \gamma f'(x)\leqslant \gamma M<2$$
$$-2<-\gamma f'(x)<0$$
$$-1<1-\gamma f'(x)<1$$

即 $|1-\gamma f'(x)|<1$

所以 $x_{k+1}=\phi(x_k)$ 收敛于 $f(x)=0$ 的根。

5. 已知 $x=\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个实根，且当 $x\in[a,b]$ 时，$|\phi'(X)|\geqslant L>1$（L 为常数），问如何将 $x=\phi(x)$ 化为适合于迭代的形式。

解 由已知 $x=\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个实根，故其反函数 $x=\psi(x)$ 存在，又

$\phi'(x)=1/\psi'(x)$

当 $x\in[a,b]$ 时，$|\phi'(x)|\geqslant L>1$（L 为常数），所以有

$|\psi'(x)|=1/|\phi'(x)|<1$

因此 $x=\psi(x)$ 收敛。

6. 方程 $x^3-x^2-1=0$ 在区间 $[1.3,1.6]$ 上有一个根，把方程写成 4 种不同的形式：

（1）$x=1+1/x^2$，对应迭代格式 $x_{k+1}=1+1/x_k^2$；

（2）$x^3=1+x^2$，对应迭代格式 $x_{k+1}=3\sqrt{1+x_k^2}$；

（3）$x^2=1/x-1$，对应迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt{1/x_k-1}$；

(4) $x=\sqrt{x^3-1}$，对应迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt{x_k^3-1}$。

判断迭代格式的收敛性，选一种迭代格式求 $x_0=1.5$ 附近的根到 4 位数有效数字。

解 方法一：用全局收敛定理，在区间 $[1.3,1.6]$ 上判断收敛性。

（1） $\phi(x)=1+1/x^2$，当 $x>0$ 时，$\phi(x)$ 单调递减，且 $\phi(1.3)=1.591715967$，$\phi(1.6)=1.390625$，因此，当 $x\in[1.3,1.6]$ 时，$\phi(x)\in[1.3,1.6]$，又当 $x\in[1.3,1.6]$ 时，有

$$|\phi'(x)|=|-2/x^3|\leqslant 2/(1.3)^3=0.92<1$$

由收敛定理知，对任意初值 $x_0\in[1.3,1.6]$，迭代格式 $x_{k+1}=1+1/x_k^2\ (k=0,1,2\cdots\cdots)$ 收敛。

（2） $\phi(x)=3\sqrt{1+x_k^2}$，当 $x>0$ 时，$\phi(x)$ 单调递增，且 $\phi(1.3)=1.390755416$，ϕ

(1.6)=1.526921344，因此，当 $x\in[1.3,1.6]$时，$\phi(x)\in[1.3,1.6]$。
又当 $x\in[1.3,1.6]$时，有

$$|\varphi'(x)|=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\le\frac{3.2}{3\sqrt[3]{(2.69)^2}}=0.552<1$$

，

故由收敛定理知，对任意初值 $x0\in[1.3,1.6]$迭代格式$x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^{\,2}}(k=0,1,2\cdots)$收敛

（3）$\varphi(x)=\sqrt{\frac{1}{x_k\text{-}1}}$，当 $x\in[1.3,1.6]$时，有

$$|\varphi'(x)|=\left|\frac{1}{2\sqrt{(x\text{-}1)^3}}\right|\ge\frac{1}{2\sqrt{0.216}}=1.075828706>1$$

故迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt{1/(x_k-1)}$ (k=0, 1, 2 ••••)不满足收敛定理。
（4）$\phi(x)=\sqrt{(x_k^3-1)}$，当 $x\in[1.3,1.6]$时，有
$|\phi'(x)|=3x^2/2\sqrt{(x^3-1)^3}\geqslant7.68/2\sqrt{3.096}=2.2>1$
迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt{(x_k^3-1)}$ (k=0, 1, 2 ••••)不满足收敛定理。
由上所述，第（1）和第（2）两种迭代格式都满足$|\phi'(x)|<1$，但第（2）种迭代格式中对应的$|\phi'(x)|$小于第（1）种迭代格式，故第（2）收敛的比第（1）快，取第（2）种迭代格式。
$\phi(x)=\sqrt[3]{(1+x_k^2)}$，k=0, 1, 2 •••，
并用初值 x0=1.5 计算，结果如表 2-3 所示。

表 2-3 计算结果

k	x_k	k	x_k
0	1.5	5	1.46624
1	1.48124	6	1.46588
2	1.47271	7	1.46571
3	1.46882	8	1.46563
4	1.46705	9	1.46560

因$|x9-x8|=0.000039<1/2\cdot10^{-3}$，故取 $x^*\approx1.466$。
方法 2：用局部收敛定理判断收敛性。判断初值 x0=1.5 附近的收敛性。

（1）$x=1+1/x^2$，$\phi'(x)=-2/x^3$，$\phi'(1.5)=-2/1.5^3$
=-0.5926，$|\phi'(1.5)|<1$，迭代格式 $x_{k+1}=1+1/x_k^2$(k=0, 1, 2 ••••)局部收敛。
（2）$x^3=1+x^2$，$\phi'(x)=2x/3(1+x^2)^{2/3}$，$\phi'(1.5)=0.4558$，
$|\phi'(1.5)|<1$，迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt[3]{(1+x_k^2)}$ (k=0, 1, 2 ••••)局部收敛。

（3）$x^2=1/(x-1)$，$\phi'(x)=-1/2(x-1)^{2/3}$，$\phi'(1.5)=1.4142>1$，迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt{1/(x_{k-1})}$ (k=0, 1, 2 ••••)不满足收敛定理。

(4) $x=\sqrt{x^3-1}$ ，$\varphi'(x)=\frac{3}{2}x^2(x^3-1)^{-\frac{1}{2}}$，$\varphi'(1.5)=2.120$,$|\varphi'(1.5)|>1$,迭代格式$x_{k+1}=\sqrt{x_k^{\ 3}-1}(k=1,2,3\cdots)$不满足收敛定理，由上所述第（1）与第（2）两种迭代格式都满足收敛定理，但第（2）种迭代格中对应的$|\varphi'(x)|$小于第（1）种迭代格式，故第（2）收敛比（1）快，取第（2）种，

$$\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x_k^{\ 2}}\ ,\ k=1.2.3\cdots$$

并用最初的$x_0=1.5$计算，结果如表2-3所示。

7 证明对任意初始值$x_0\in R$,由迭代公式 $x_{k+1}=\cos x_k$，$k=1.2.3\cdots$

所产生的序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$都收敛于方程$x=\cos x$的根。

解 设$\varphi(x)=\cos x$,则$\varphi'(x)=-\sin x$

1,先考虑区间$[-1,1]$,当$x\in[-1,1]$时，$\varphi(x)=\cos x\in[-1,1]$,$|\varphi'(x)|\le\sin 1<1$,故对任意初始值$x_0\in[-1,1]$，由迭代公式$x_{k+1}=\cos x_k$产生的序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$都收敛与$x=\cos x$的根。

2，对任意初始值$x_0\in R$，有$x_1=\cos x_0\in[-1,1]$，将x_1看成新的迭代初值，则由1知由迭代公式$x_{k+1}=\cos x_k$产生的序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$都收敛与$x=\cos x$的根。

8，设方程$12-3x+2\cos x=0$的迭代法$x_{k+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_k$

(1) 证明对$\forall x_0\in R$，均有$\lim_{k\to\infty}x_k=x^*$,其中x^*为方程的根。

(2) 取$x_0=4$,求此迭代法的近似根，使误差不超过10^{-3}，并列出各项迭代值。

(3) 证明此迭代法的收敛性。

证 (1) 迭代法$x_{k+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_k$，迭代函数$\varphi(x)=4+\frac{2}{3}\cos x$是连续函数，又

$$4-\frac{2}{3}\le 4+\frac{2}{3}\cos x\le 4+\frac{2}{3},\ x\in(+\infty,\ -\infty)$$

$$\varphi(x)\in[4-\frac{2}{3},4+\frac{2}{3}]\in(+\infty,\ -\infty)$$

$$\max_{x\in R}|\varphi'(x)|=|-\frac{2}{3}\sin x|<1$$

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x^*$$

(2)选初始值$x_0=4$，计算结果如表2-4

k	x_k	$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$	k	x_k	$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$
0	4	___	4	3.3483	0.0058
1	3.5642	0.4358	5	3.3475	0.0008
2	3.3920	0.1722	6	3.3474	0.0001
3	3.3541	0.0379	7	3.3474	0.0000

取近似根 $x^*\approx x_7=3.3474$

(3)取$x^*=3.3474$,则$\varphi'(x^*)|3.3474=-\frac{2}{3}\sin(3.3474)\approx 0.13624\neq 0$，所以迭代法1阶收敛（线性收敛）。

9，对方程$x^3-x^2-0.8=0$在初值$x_0=1.5$附近建立收敛的迭代格式，并求解使之有4位有效数字。

解 对方程$x^3-x^2-0.8=0$建立等价方程$x=\sqrt[3]{x^2+0.8}$,则有迭代函数$\varphi(x)=\sqrt[3]{x^2+0.8}$,可得

$\varphi'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+0.8)^2}}$,$|\varphi'(1.5)|=0.4755<1$,所以迭代格式

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k^2+0.8},\quad k=0,1\cdots$$

局部收敛。取x_0=1.5进行计算如表2-5，取 $x^*\approx 1.405$。

表2-5 计算结果

k	x_k	k	x_k
0	1.5	5	1.4075
1	1.4502	6	1.4063
2	1.4265	7	1.4057
3	1.4153	8	1.4054
4	1.4100		

10,能否用迭代法求解下列方程？若不能将方程改写成能用迭代法求解的形式。

（1） $x=\frac{\cos x+\sin x}{4}$

（2） $x=4-2^x$

解 （1） $\varphi(x)=\frac{\cos x+\sin x}{4}$,对所有的x有,$|\varphi'(x)|=|-\frac{\cos x+\sin x}{4}|\le\frac{2}{4}=\frac{1}{2}<1$

显然迭代函数$\varphi(x)$满足收敛定理，故可以用迭代法求根。

（2）方程 $x-4+2^x=0$，设$f(x)=x-4+2^x$,则$f(1)<0$, $f(2)>0$,故方程$f(x)=0$在区间

$x\in(1,2)$时,$|\varphi(x)|=|-2^x\ln 2|>2\ln 2>1$,故不能用$x_{k+1}=4-2^{x_k}$迭代求根。将原方程改写成

$x=\ln(4-x)\frac{1}{\ln 2}$,此时$\varphi(x)=\ln(4-x)\frac{1}{\ln 2}$因而有

1 当$x\in[1,2]$时，$\varphi(x)\in[1,\frac{\ln 3}{\ln 2}]\subset[1,2]$

2 对任意$x\in(1,2)$，有$|\varphi'(x)|=|-\frac{1}{4-x}\frac{1}{\ln 2}|<\frac{1}{4-2}\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{2\ln 2}<1$

故而可用迭代公式 $x_{k+1}=\ln(4-x_k)\frac{1}{\ln 2}$ 来求解方程在区间（1,2）内唯一根。

11.用不动点迭代法求函数$f(x)=x-\ln x-2$在区间（2，∞）内的零点，并用蒂芬森迭代加速

解 设$f(x)=x-\ln x-2=0$,取迭代函数$\varphi(x)=\ln x+2$，此时

$\varphi'(x)=\frac{1}{x}$， $\max\limits_{2<x<+\infty}|\varphi'(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{2}<1$

所以迭代过程 $x_{k+1}=\ln x+2$ 局部收敛，取初值 $x_0=3$，计算结果如表 2-6 所示。

表 2-6 计 算 结 果

k	x_k	k	x_k
0	3	4	3.144648781
1	3.098612289	5	3.145702209
2	3.130954363	6	3.146037143
3	3.141337866		

不动点迭代法不加速时，取 x_6=3.146，有 4 位有效数字。

用斯蒂芬森迭代法加速

$$y_k=\ln x+2,\quad z_k=\ln y_k+2$$

$$x_{k+1}=z_k-\frac{(z_k-y_k)^2}{z_k-2y_k+x_k}$$

计算结果如表 2-7 所示。

表 2-7 计 算 结 果

k	x_k	y_k	z_k
0	3	3.098612289	3.130954363
1	3.146738373	3.146366479	3.146248288
2	3.146193227	3.146193233	3.1462932213
3	3.146193227		

用斯蒂芬森迭代法加速后，x_3=3.146193227，有 10 位有效数字。加速效果明显。

12.设 x^* 是方程 f(x)=0 的单根，$x=\varphi(x)$ 是 f(x)=0 的等价方程。若 $\varphi(x)=x-m(x)f(x)$,

证明当 m（x^*）$\neq\frac{1}{f'(x^*)}$ 时，$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 至多是一阶收敛的；当 m（x^*）$=\frac{1}{f'(x^*)}$ 时，

$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 至少是二阶收敛的。

证　由 x^* 是 f(x)=0 的单根，有 $f(x^*)=0$，有 $f'(x^*)\neq 0$

由 $\varphi(x)=x-m(x)f(x)$，有

$\varphi'(x)=1-m'(x)f(x)-m(x)f'(x)$

$\varphi'(x^*)=1-m'(x^*)f(x^*)-m(x^*)f'(x^*)=1-m(x^*)f'(x^*)$

当 $m(x^*)\neq\frac{1}{f'(x^*)}$ 时，$m(x^*)f'(x^*)\neq 1$，从而 $\varphi'(x)\neq 0$，此时若 $|\varphi'(x^*)|<1$，迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 的一阶收敛；当 $|\varphi'(x^*)|<1$ 不满足时，没有一阶收敛，故至多为一阶收敛；当 $m(x^*)=\frac{1}{f'(x^*)}$ 时，$\varphi'(x)=0$，

迭代至少是二阶收敛的。

13．确定常数 p,q,r,使迭代过程

$$x_{k+1} = px_k + q\frac{a}{x_k^5} + r\frac{a^2}{x_k^5}$$

产生的序列$\{x_k\}$收敛到$\sqrt[3]{a}$，并使其收敛阶尽可能高。

解　使迭代过程 $x_{k+1} = px_k + q\frac{a}{x_k^5} + r\frac{a^2}{x_k^5}$ 收敛到解$x^* = \sqrt[3]{a}$，并有尽可能高的收敛阶时，使$\varphi(x^*)$有尽可能高阶的导数值为 **0.** 因有 **p,q,r** 三个常数，应由$x^* = \varphi(x^*), \varphi'(x^*) = 0, \varphi''(x^*) = 0$确定。

由$x^* = \varphi(x^*)$得

$$\sqrt[3]{a} = p\sqrt[3]{a} + q\frac{a}{\sqrt[3]{a^5}} + r\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$$

$$p + q + r = 1$$

由$\varphi'(x^*) = 0$

$$\varphi'(\sqrt[3]{a}) = p - 2q\frac{a}{(\sqrt[3]{a})^3} - 5r\frac{a^2}{(\sqrt[3]{a})^6} = 0$$

$$p - 2q - 5r = 0$$

由$\varphi''(x^*) = 0$

$$\varphi''\sqrt[3]{a} = 6q\frac{a}{(\sqrt[3]{a})^4} + 30r\frac{a^2}{(\sqrt[3]{a})^7} = 0$$

解之

$$p = q = \frac{5}{9}, r = -\frac{1}{9}$$

此时$\varphi^{(3)}(\sqrt[3]{a}) \neq 0$，故迭代公式只有 **3** 阶收敛。

14.　利用适当的迭代格式证明

$$\lim_{k\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k个2} = 2$$

证　考虑迭代格式

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{k+1} = \sqrt{2+x_k}, k = 0,1,2\cdots \end{cases}$$

则

$$x_1 = \sqrt{2}$$

$$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\vdots$$

$$x_k = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k个2}$$

$$\vdots$$

记$\varphi(x) = \sqrt{2+x}$,则$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$,当$x \in [0,2]$时

$$\varphi(x)\in[\varphi(0),\varphi(2)]=[\sqrt{2},2]\subset[0,2]$$

$$|\varphi'(x)|\le\varphi'(0)=\frac{1}{2\sqrt{2}}<1$$

因此迭代格式产生的序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$收敛于方程 $x=\sqrt{2+x}$在$[0,2]$内的惟一根 2，即

$$\lim_{k\to\infty}x_k=2$$

15 设函数 **f(x)-=(x³-a)²**，写出解 **f(x)=0** 的牛顿迭代格式，并证明此格式的收敛阶。

解 将 $f(x)=(x^3-a)^2$, $f'(x)=6(x^3-a)x^2$, 代入牛顿迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(x_k^3-a)^2}{6(x_k^3-a)x_k^2}=\frac{5}{6}x_k+\frac{a}{6x_k^2}$$

迭代函数

$\phi(x)=\frac{5}{6}x+\frac{a}{6x^2}$, $\phi'(x)=\frac{5}{6}-\frac{a}{3x^3}$, 又已知 $x^*=\sqrt[3]{a}$, $\varphi'(\sqrt[3]{a})=0.5<1\ne0$, 所以牛顿为线性收敛。

由于 $x^*=\sqrt[3]{a}$ 是所给方程的二重根，用重根时的修正牛顿法

$$x_{k+1}=x_k-2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

将 $f(x)=(x^3-a)^2$, $f'(x)=6(x^3-a)x^2$代入

$$x_{k+1}=x_k-2\frac{(x_k^3-a)^2}{6(x_k^3-a)x_k^2}=\frac{2}{3}x_k+\frac{a}{3x_k^2}$$

此时修正牛顿法

$$x_{k+}=\frac{2}{3}x_K+\frac{a}{3x_k^2}$$

迭代函数$\varphi(x)=\frac{2}{3}x+\frac{a}{3x^2}$, $\varphi'(x)=\frac{2}{3}-\frac{2a}{3x^2}$, 又已知 $x^*=\sqrt[3]{a}$, $\varphi'(\sqrt[3]{a})=0$，所以重根时的修正牛顿法为平方收敛。

16.导出计算$\frac{1}{\sqrt{a}}$(其中 $a>0$)的牛顿迭代公式，要求该迭代公式既无开方又无除法运算。

解 计算$\frac{1}{\sqrt{a}}$(其中 $a>0$)，令$x=\frac{1}{\sqrt{a}}(a>0)$，即等价于求方程$\frac{1}{x^2}=a$ 的正根，取

$f(x)=\frac{1}{x^2}-a=0$, $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$, 有

$$x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{\frac{1}{x^2}-a}{-\frac{2}{x^3}}=1.5x-0.5ax^3$$

牛顿迭代公式为$x_{k+1}=1.5x_k-0.5ax_k^3, k=0,1,2,\cdots$ 。

17.分别用牛顿迭代法和求重根的修正牛顿迭代法求方程$2x^2+2x+1-e^{2x}=0$,在$x^*=0$的近似值，取初值　$x_0=0.5$,精确到$\left|f(x_k)\right|\le10^{-4}$。

解　取
$$
\begin{array}{ll}
f(x)=e^{2x}-1-2x-2x^2 & f(0)=0 \\
f'(x)=2e^{2x}-2-4x & f'(0)=0 \\
f''(x)=4e^{2x}-4 & f''(0)=0 \\
f'''(x)=8e^{2x} & f'''(0)=8\ne0
\end{array}
$$
因而$x^*=0$是$f(x)=0$的三重根。

牛顿迭代公式
$$x_{k+1}=x_k-\frac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{2e^{2x}-2-4x},k=0,1,\cdots$$
计算结果如表 **2-8** 所示。

表 **2-8**　计 算 结 果

k	x_k	$f(x_k)$	**k**	x_k	$f(x_k)$
0	**0.5**	**0.21828**	**4**	**0.10993**	1.837×10^{-3}
1	**0.34805**	**0.067537**	**5**	**0.074659**	5.7621×10^{-4}
2	**0.23905**	**0.020617**	**6**	**0.050085**	1.7180×10^{-4}
3	**0.16264**	**6.2347**$\times10^{3}$	**7**	**0.033530**	5.1116×10^{-5}

求重根牛顿迭代公式
$$x_{k+1}=x_k-3\frac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{2e^{2x}-2-4x},k=0,1,\cdots$$
计算结果如表 2 - 9 所示.

表 2 - 9　　计 算 结 果

k	x_k	$f(x_k)$	**k**	x_k	$f(x_k)$
0	**0.5**	**0.21828**	**2**	**0.00032687**	3.12006×10^{-10}
1	**0.044161**	1.1741×10^{-4}			

容易看出，后者比前者收敛快得多。

18.设　x^*是方程 $f(x)=0$的m(其中 $m\ge2$)的重根，即 $f(x)=(x-x^*)^m q(x),q(x^{*\ne0})$
证明牛顿法
$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
仅为线性收敛，是一阶方法，而改进的牛顿法$x_{k+1}=x_k-m\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$则是二阶方法。

证　方法 **1**：　由牛顿迭代法$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，有迭代函数
$$\varphi(x)=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$\varphi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$$
由于x^*是$f(x)=0$的$m(m\ge2)$重根，有

$$f(x) = (x-x^*)^m q(x),\ q(x^*) \neq 0$$

$$f'(x) = m(x-x^*)^{m-1} q(x) + (x-x^*)^m q'(x)$$

$$f''(x) = (m-1)(x-x^*)^{m-2}[mq(x) + (x-x^*)q'(x)]$$
$$+(x-x^*)^{m-1}[mq'(x) + (x-x^*)q''(x)]$$

代入

$$\varphi'(x) = \frac{(x-x^*)^m q(x)\{(m-1)(x-x^*)^{m-2}[mq(x) + (x-x^*)q'(x)] + (x-x^*)^{m-1}[mq'(x) + (x-x^*)q''(x)]\}}{[m(x-x^*)^{m-1}q(x) + (x-x^*)^m q'(x)]^2}$$
$$= \frac{q(x)[m(m-1)q(x) + 2m(x-x^*)q'(x) + (x-x^*)q''(x)]}{[mq(x) + (x-x^*)q'(x)]^2}$$

从而有

$$\varphi'(x^*) = \frac{m(m-1)[q(x^*)]^2}{[mq(x^*)]^2} = 1-\frac{1}{m}$$

当 m≥ 2时，$\varphi'(x) \neq 0$，但有$|\varphi'(x^*)| < 1$，这时牛顿法仅为线性收敛。

方法 2：由牛顿迭代法$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，有

$$x_{k+1}-x^* = x_k-x^* - \frac{(x_k-x^*)^m q(x_k)}{(x_k-x^*)^{m-1}[mq(x_k) + (x_k-x^*)q'(x_k)]}$$

$$= x_k-x^* - \frac{(x-x^*)q(x_k)}{mq(x_k) + (x-x^*)q'(x_k)}$$
$$= (x-x^*)\left[1-\frac{q(x_k)}{mq(x_k) + (x-x^*)q'(x_k)}\right]$$
$$\frac{e_{k+1}}{e_k} = 1-\frac{q(x_k)}{mq(x_k) + (x-x^*)q'(x_k)}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k} = 1-\frac{q(x^*)}{mq(x^*)} = 1-\frac{1}{m}$$

当 $m \geq 2$ 时，$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k} = 1-\frac{1}{m} \neq 0$，牛顿法重根时仅为线性收敛。

下面证明重根时的修正牛顿法

$$x_{k-1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

平方收敛。修正牛顿迭代法$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$的迭代函数

$$\varphi(x) = x - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\varphi'(x) = 1-m + m\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

利用上面的结果有$\varphi'(x^*) = 1-m + m\left(1-\frac{1}{m}\right) = 0$

故修正牛顿法平方收敛。

19.设非线性方程$f(x)=\left(x^3-3x^2+3x-1\right)(x+3)=0$的根$x_1=-3$，$x_2=1$。写出求$x_1$和$x_2$的近似值时，具有二阶局部收敛的牛顿迭代公式。

解 $x=-3$是非线性方程$f(x)=\left(x^3-3x^2+3x-1\right)(x+3)=\left(x-1\right)^3(x+3)=0$的单根，具有二阶局部收敛的牛顿迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{(x_k-1)^3(x_k+3)}{4({x_k}^3-3x_k+2)}=x_k-\frac{(x_k-1)^3(x_k+3)}{4(x_k-1)^2(x_k+2)}$$

$$=x_k-\frac{(x_k-1)(x_k+3)}{4(x_k+2)}$$

x=1 是非线性方程$f(x)=\left(x^3-3x^2+3x-1\right)(x+3)=0$三重根，具有二阶局部收敛的牛顿迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-3\frac{(x_k-1)(x_k+3)}{4(x_k+2)}$$

20.设$f(x)\in C^2[a,b]$，且$x^*\in(a,b)$是$f(x)=0$的单根，证明单点弦法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_0)}(x_k-x_0)，k=1，2，3，\ldots$$

局部收敛。

证 因为x^*是$f(x)=0$的单根，所以$f'(x^*)\neq 0$。记

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f(x)-f(x_0)}(x-x_0)$$

则有

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)-f\left(x^*\right)}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

又$\varphi\left(x^*\right)=x^*$，所以

$$\frac{\varphi(x)-\varphi\left(x^*\right)}{x-x^*}=\frac{1}{x-x^*}\left[x-\frac{f(x)-f\left(x^*\right)}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}-x^*\right]$$

$$=1-\frac{f'(\xi)}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

其中，ξ介于 x 与x^*之间，因而

$$\lim_{x\to x^*}\frac{\varphi(x)-\varphi\left(x^*\right)}{x-x^*}=1-\frac{f'\left(x^*\right)}{\frac{f\left(x^*\right)-f(x_0)}{x^*-x_0}}\varphi'\left(x^*\right)$$

当x_0靠近x^*时，$\left|\varphi'\left(x^*\right)\right|<1$，单点弦法局部收敛。

21.用单点弦法和双点弦法，求 Leonardo 方程$x^3+2x^2+10x-20=0$ 在$x_0=1.5$附近的根。

解 设$f(x)=x^3+2x^2+10x-20$

对单点弦法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$，其中 $x_0 = 1.5$，$f(1.5) = 2.875$，所以

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2.875}(x_k - 1.5)$$，$k = 1, 2, \cdots$

$x_0 = 1.5$，在选取 $x_1 = 1.4$，迭代结果如表 2-10 所示。

表 2-10　迭代结果

k	x_k	f(x)	k	x_k	f(x)
0	1.5	2.875	3	1.36885143	0.00091388
1	1.4	0.664	4	1.36880972	0.00003414
2	1.36996834	0.02448464	5	1.36880817	0.00000127

取方程在 1.5 附近的根 $x^* \approx 1.368\,808$。

双点线法 $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$，$k = 1, 2, \cdots$。$x_0 = 1.5$，在选取 $x_1 = 1.4$ 迭代结果如表 2-11 所示。

表 2-11　迭代结果

k	x_k	$f(x_k)$	k	x_k	$f(x_k)$
0	1.5	2.875	3	1.368 818 541	0.000 220 10
1	1.4	0.664	4	1.368 808 111	0.000 000 07
2	1.369 968 34	0.024 484 641			

取方程在 1.5 附近的根 $x^* \approx 1.368\,808$。

22. 用劈因子法求方程 $x^4 + 7x^3 + 24x^2 + 25x - 15 = 0$ 的二次因式（精确到10^{-4}）。

解　取尾部二次式

$x^2 + 1.0417x - 0.625$

作为初始近似二次因式，按劈因子法迭代，计算过程如表 2-12 所示。

表 2-12　计算过程

k	p_k	q_k	b_i(上行)　c_j(下行)	Δp_k	Δq_k	δ_k
0	1.041 7	-0.0625	1 , 5. 958 3, 18. 418 2, 9. 537 7, -13. 424		-0.311	250. 004 2

			1, 4. 916 6, 13. 921 6, -1.819 6	1	5	
1	1.836 8	-0.936 5	1, 5. 163 2, 15. 452 7, 1. 4518, -3. 195 2 1, 3.326 4, 10. 297 0, -14. 313 5	0.161 6	-0.063 0	158. 099 5
2	1.998 4	-0.999 5	1, 5. 001 6, 15. 004 3, 0. 0145, -0. 032 2- 1, 3.003 2, 10.002 2, -16.972 2	0.001 1	-0.000 5	151. 058 5
3	1.999 5	-1.000 0	1, 5. 000 5, 15. 001 5, 0. 005 0, -0. 008 5 1, 3.001 0, 10. 001 0, -16. 991 0	0.000 5	0.000 0	151. 025 0
4	2.000	-1.000 0	1, 5. 000 0, 15. 000 0, 0. 000 0, 0. 000 0 1, 3. 000 0 , 10. 000 0, -17. 000 0	0.000 0	0.000 0	

因此得多项式

$$x^4+7x^3+24x^2+25x-15$$

的二次因式

x^2+2x-1

2.3 同步练习题及解答

1.用二分法求方程 $x^3-2x^2-4x-7=0$ 在 $[3,4]$ 的近似根，要求精度 $\left|x^*-x_n\right|<10^{-3}$ 。

解 令 $f(x)=x^3-2x^2-4x-7$ ， $f(x)$ 为连续函数；在区间 $[3,4]$ 上， $f'(x)=3x^2-4x-4>0$ ， $f(x)$ 为单调递增函数，且 $f(x)<3$ ， $f(x)>4$ ，所以， $f(x)$ 在区间 $[3,4]$ 上只有一个根。

用二分法计算过程如表 2-13 所示。

表 2-13 计算过程

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$
0	3.000 0	-	4. 000 0	+	3. 500 0	-
1	3.500 0				3.750 0	+
2			3.750 0		3. 625 0	-
3	3.625 0				3.687 5	+
4			3.687 5		3.656 3	+
5			3.656 3		3.640 6	+
6			3.640 6		3.632 8	+
7			3.632 8		3.628 9	-
8	3.628 9				3.630 9	-
9	3.630 9				3.631 9	-

按给定误差确定二分法二分次数时，常用事前误差估计和事后误差估两种方法。事前误差估计是先计算二分次数，再二分，令

$$\left|x^*-x_n\right| \le \frac{1}{2^{n+1}}(b-a) \le \varepsilon$$

解出n，即求出满足误差要求最小二分的次数。
事后误差估计是先二分，再判断满足

$$\frac{1}{2}\left|b_n-a_n\right| \le \varepsilon\, f(x)[1,1.5]\varphi(x)$$

$$\varphi'(x)=\frac{-1}{20x^2}\left(1+\frac{0.2}{x}\right)^{-\frac{3}{4}}\left|\varphi'(1.2)\right|<1$$

$$x_0=1.2$$

时，用 x_{n+1} 作为根 x^* 的近似值。本题采用这种方法。$\frac{1}{2}\left|3.6328-3.6319\right| \le 10^{-3}$ 所以，所求近似根

$$x^* \approx x_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{3.6309+3.6328}{2}=3.63185 \approx 3.632$$

1.用迭代法求方程 $x^5-x-0.2=0$ 的正根，精确到 10^{-5}

解 试凑正根所在区间

x	0	1	1.5
f(x)	**-0.2**	**-0.2**	**5．893 75**

取正根所在区间为 $[1,1.5]$，取初始值 $x_0=$ **1.2**。

取迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt[4]{1+\frac{0.2}{x_k}}$，迭代函数 $\varphi(x)=\sqrt[4]{1+\frac{0.2}{x}}$，$\varphi'(x)=\frac{-1}{20x^2}\left(1+\frac{0.2}{x}\right)^{-\frac{3}{4}}$ 且

$\left|\varphi'(1.2)\right|<1$，所以在附近 $x_0=1.2$ 附近，迭代格式 $x=\varphi(x)$ 收敛。

取初值 $x_0=1.2$ 进行迭代，结果如表 **2-14** 所示。

表 2-14　计算结果

k	x_k	k	x_k	k	x_k
0	**1.2**	**2**	**1.044 982**	**4**	**1.044 762**
1	**1.039 290**	**3**	**1.044 753**	**5**	**1.044 762**

精确到 10^{-5} 时，取方程的根 $x^* \approx$ **1. 044 76**。

1.已知 $x=\varphi(x)$ 的 $\varphi'(x)$ 满足 $\left|\varphi'(x)-3\right|<1$，如何利用 $\varphi(x)$ 构造一个迭代函数 $\psi(x)$，使

迭代过程$x_{k+1}=\psi(x_k)(k=0,1,2,\cdots)$收敛。

解 由$x=\varphi(x)$可得

$x-3x=\varphi(x)-3x$，$-2x=\varphi(x)-3x$，$x=-0.5[\varphi(x)-3x]=\psi(x)$

由$\psi'(x)=-0.5[\varphi'(x)-3]$，有

$|\psi'(x)|=0.5[\varphi'(x)-3]<0.5<1$

故$x_{k+1}=-0.5[\varphi(x_k)-3x_k]=\psi(x_k)\quad(k=0,1,2,\cdots)$收敛。

1.给定函数$f(x)$，设迭代过程$x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$，选取$\lambda$值，使在$f(x)=0$的单根附近收敛。

解 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$，$\varphi(x)=x-\lambda f(x)$，$|\varphi'(x)|=|1-\lambda f'(x)|<1$时，迭代过程收敛。解之

$-1<1-\lambda f'(x)<1$，$-2<-\lambda f'(x)<0$，$0<\lambda f'(x)<2$

在$f(x)=0$的单根附近，$f'(x)\neq 0$且$f'(x)$连续，取$M=\max\limits_{x=x^*}|f'(x)|$，得$0<|\lambda|<\dfrac{2}{M}$

5. 已知$\sqrt{2}$的一个近似值$x_0=1.414$，用牛顿迭代法

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{2}{x_0}\right)$$

计算x_1（保留**6**位小数），并与精确值$\sqrt{2}=1.414\,213\,562\,373\cdots$比较。

解 牛顿迭代法$x_1=\dfrac{1}{2}\left(x_0+\dfrac{2}{x_0}\right)$，当$x_0$=**1.414**时，得

$x_1=1.414\,214$

和准确值$\sqrt{2}=1.414\,213\,562\,373\cdots$相比较可知，经过一次迭代就可得到**7**位有效数字。

4位有效数字的近似值x_0=**1.414**，用牛顿迭代法进一步迭代，取**6**位小数进行计算得到**7**位有效数字的近似值。

6． 证明计算$\sqrt[3]{a}$的牛顿迭代公式为$x_{k+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_k+\dfrac{411.7910}{x_k^2}\right)$，并用此迭代公式计算$\sqrt[3]{411.7910}$，精确到$10^{-6}$。

证明： 因计算 $\sqrt[3]{a}$，令 $x=\sqrt[3]{a}$，即求等价方程 $x^3-a=0$ 的根，取 $f(x)=x^3-a$，则 $f'(x)=3x^2$，代入牛顿迭代公式，有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}=\frac{3x_k^3-x_k^3-a}{3x_k^2}=\frac{1}{3}\left(2x_k+\frac{a}{x_k^2}\right)$$

故计算 $\sqrt[3]{a}$ 的牛顿迭代公式为 $x_{k+1}=\frac{1}{3}\left(2x_k+\frac{a}{x_k^2}\right)$。

计算 $\sqrt[3]{411.7910}$ 时，由于 $f(7)<0$，$f(8)>0$，所以 $x^*\in[7,8]$，取 $x_0=7$，用牛顿迭代公式 $x_{k+1}=\frac{1}{3}\left(2x_k+\frac{411.7910}{x_k^2}\right)$ 进行计算，计算结果如表 2-15 所示。

表 2-15 计算结果

k	x_k	k	x_k	k	x_k
0	7	2	7.4398668	4	7.4397604
1	7.4679660	3	7.4397604		

可以看出 $\sqrt[3]{411.7910}$，精确到 10^{-6} 的值为 7. 439 760 。

7． 造倒数表。不用除法运算，求 $\frac{1}{c}(c>1)$ 的值，并计算 $\frac{1}{1.2345}$。

解 令 $x=\frac{1}{c}$，取 $f(x)=x-\frac{1}{c}$，$f'(x)=1$，则

$$x=x-\frac{x-\frac{1}{c}}{1}=x$$

再令 $\frac{1}{x}=c$，取 $f(x)=\frac{1}{x}-c$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，则

$$x=x-\frac{\frac{1}{x}-c}{-\frac{1}{x^2}}=2x-cx^2$$

所以有求倒数的牛顿迭代公式

$$x_{k+1}=2x_k-cx_k^2$$

取 $x_0=\frac{1.2345}{2}=0.617\,25$，迭代结果如表 2-16 所示。

表 2-16 迭代结果

k	x_k	$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$	k	x_k	$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$

0	0.61725		3	0.810036	0.002591
1	0.764159	0.146909	4	0.810045	0.000009
2	0.807445	0.043286	5	0.810045	0.000000

式中，ω 为松弛因子，当$1<\omega<2$ 时为超松弛法。

8.设 x^* 是 $f(x)=0$ 的根，用牛顿迭代法证明$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{k+1}-x_k}{(x_k-x_{k+1})^2}=-\dfrac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$

证明： 方法 **1**：牛顿迭代法$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$， $x_{k+1}-x_k=-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{(x_k-x_{k+1})^2}=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)(x_k-x_{k+1})^2} \qquad (1)$$

$$f(x_k)=f(x_{k+1})+f'(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x_k-x_{k-1})^2 \qquad (2)$$

其中$\xi\in[x_k,x_{k-1}]$。

将$x_k=x_{k-1}-\dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$代入式（**2**）右端的中间项，得

$$f(x_k)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x_k-x_{k-1})^2$$

将上式代入式（**1**），得 $\dfrac{x_{k+1}-x_k}{(x_k-x_{k-1})^2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(\xi)}{f'(x_k)}$

即 $$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x_k}{(x_k-x_{k-1})^2}=-\frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{f'(x_k)}$$

方法 **2**： 牛顿迭代式$x_{k+1}-x_k=-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{(x_k-x_{k-1})^2}=-\frac{-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}}{\dfrac{[f(x_{k-1})]^2}{[f'(x_{k-1})]^2}}=-\frac{f(x_k)[f'(x_{k-1})]^2}{[f'(x_{k-1})]^2f'(x_k)} \quad [\text{又 } f(x^*)=0]$$

$$=-\frac{[f(x_k)-f(x^*)][f'(x_{k-1})]^2}{[f(x_{k-1})-f(x^*)]^2f'(x_k)}=-\frac{f'(\xi_k)(x_k-x^*)[f'(x_{k-1})]^2}{[f'(\xi_{k-1})(x_{k-1}-x^*)]^2f'(x_k)}$$

$$=-\frac{f'(\xi_k)e_k[f'(x_{k-1})]^2}{[f'(\xi_{k-1})e_{k-1}]^2f'(x_k)}$$

其中$\xi_k \in \left[x_k, x^*\right]$， $\xi_{k-1} \in \left[x_{k-1}, x^*\right]$。有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}-x_k}{\left(x_k - x_{k-1}\right)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{e_k}{e_{k-1}}$$

由定理得
$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}-x_k}{\left(x_k - x_{k-1}\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{f''\left(x^*\right)}{f'\left(x_k\right)}$$

9.用双点弦法求方程$x^3+3x^2-x-9=0$在区间$\left[1,2\right]$内的一个实根，精确至 5 位有效数字。

解：记$f\left(x\right)=x^3+3x^2-x-9=0$

双点弦法公式
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f\left(x_k\right)}{f\left(x_k\right)-f\left(x_{k-1}\right)}\left(x_k - x_{k-1}\right), k=1,2,\cdots$$

取$x_0=1.4$， $x_1=1.6$，计算结果如表 **2-17** 所示。

表 2-17 计算结果

K	x_k	$f\left(x_k\right)$	k	x_k	$f\left(x_k\right)$
0	1.4	-2.168	4	1.52417	-0.0140976
1	1.6	1.176	5	1.52511	1.17173×10^{-4}
2	1.52967	0.0692609	6	1.52510	-3.41118×10^{-5}
3	1.51069	-0.216464			

所以取$x^*\approx1.5251$。

10. 设函数$\varphi\left(x\right)$连续可微，若迭代式$x_{k+1}=\varphi\left(x_k\right)$ 局部线性收敛，对于$c\in R$，构造加权迭代格式$x_{k+1}=\psi\left(x_k\right)$，其中$\psi\left(x_k\right)=\frac{1}{1-c}\varphi\left(x_k\right)-\frac{c}{1-c}x_k$，问如何选取 **c** 使得加权迭代格式有更高的收敛阶。

解：设x^*满足$x=\varphi\left(x\right)$，则x^*是$\varphi\left(x\right)$上午不动点，将x^*代入加权迭代格式，并注意$x^*=\varphi\left(x^*\right)$，则有

$$\psi\left(x^*\right)=x^*$$

即x^*也是$\varphi\left(x_k\right)$的不动点。对于$\varphi\left(x_k\right)$求导，有

$$\psi'\left(x\right)=\frac{1}{1-c}\varphi'\left(x\right)-\frac{c}{1-c}$$

要使加权迭代格式具有比线性更高的收敛阶，需要$\psi'(x^*) = 0$，即

$$\frac{1}{1-c}\varphi'(x^*) - \frac{c}{1-c} = 0$$

有 $$c = \varphi'(x^*)$$

再对$\psi(x)$求二阶导数，有

$$\psi''(x^*) = \frac{1}{1-c}\varphi''(x^*)$$

一 般 情 况 下 $\psi''(x^*) = \frac{1}{1-c}\varphi''(x^*) \neq 0$ ， 因 此 选 择 $c = \varphi'(x^*)$ 时 加 权 迭 代 格 式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 二阶收敛。

第 3 章　线性代数方程组的数值解法

3.1 内容提要

一、高斯消去法

1.顺序高斯消去法

（1） 基本思想

利用线性方程组初等变换中的两种变换：用非零常数乘某方程或用一个非零常数乘一个方程后加至；另一个方程，消去方程组系数矩阵主对角线以下的元素，使方程组化为等价的上三角方程组，再通过回代求出方程组的解。

（2）计算步骤

当用 k 表示消元过程的次序时，有

消元过程

设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，对 $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 计算

$$\begin{cases} m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} a_k^{(k)} \end{cases}$$

$$i, j = k+1, k+2, \cdots, n$$

② 回代过程。

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}^{(i)}} \left(b_i^{(i)} - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j \right) \end{cases}$$

$$i = n-1, \cdots, 2, 1$$

（3） 使用条件

定理 3-1 线性方程组系数矩阵的顺序主子式全部为零，则顺序高斯消去法能实现线性方程组求解。

定义 3-1 设矩阵 $A=(a_{ij})_n$ 每一行对角元素的绝对值都大于同行其他元素绝对值之和

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1,2,\cdots,n$$

则称 A 为严格（行）对角占优矩阵。本书只讨论这种情况，故简称为严格对角占优矩阵。

定理 3-2 设线性方程组 $Ax=b$，若 A 为严格对角占优矩阵，则用顺序高斯消去法时，$a_{kk}^{(k)}$ 全部为零。

（4）计算量

定理 3-3 高斯消去法求解 n 阶线性方程组共需乘除法次数近似为$\frac{1}{3}n^3$。

2. 列主元高斯消去法

（1） 数值稳定性

对于线性方程组只要系数矩阵非奇异就存在惟一解，但系数矩阵非奇异可能出现主元素 $a_{kk}^{(k)}=0$，从而消元过程无法进行，或者即使 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$，当其绝对值很小时，用它作除数也将会导致其他元素的数量级急剧增大和使误差扩大，严重影响计算结果的精度。

（2）列选主元技术

列选主元是当消元到第 k 步时，从 k 列的 a_{kk} 以下（包括 a_{kk}）的各元素中选出绝对值最大的，通过行交换将其交换到 a_{kk} 得位置上，然后再进行消元过程。

定理 2-4 线性方程组系数矩阵 $A=(a_{ij})_n$ 对称且严格对角占优，则 $a_{kk}^{(k)}\ (k=1,2,\cdots,n-1)$ 全是列主元。

（3） 计算矩阵行列式

设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

用高斯消去法将其化为上三角矩阵，其对角线元素为 $a_{11}^{(1)}$，$a_{22}^{(2)}$，$\cdots a_{nn}^{(n)}$，于是行列式

$$\det A = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)},\cdots a_{nn}^{(n)}$$

用列主元消去法将其化为上三角形矩阵，对角线元素为 $a_{11}^{(1)}$，$a_{22}^{(2)}$，$\cdots a_{nn}^{(n)}$，于是行列式

$$\det A = (-1)^m a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)},\cdots a_{nn}^{(n)}$$

其中 m 为所进行的行交换次数。

3.高斯-约当消去法

每次消元时利用主元将其所在列的其余元素全部消为零，即在第 k 次消元时，不要把 k 列中（k,k）位置以下元素消为零，而且同时把（k,k）位置以上元素也消为零，这样经过 n 次消元后系数矩阵化为对角阵，这时不需回代可直接得到方程组的解。

当高斯-约当消去法消元的每一步都先用主元法去除其所在行的各元素（也包括常数项），然后再进行消元，这样方程组系数化为单位阵，对应的常数项即为方程组的解。这时称为归一化的高斯-约当消去法。

为减小误差，高斯-约当消去法还常采用列选主元技术。

归一化的高斯-约当消去法的计算量近似为$\frac{1}{2}n^3$，显然比高斯消去法计算量大。但用这种方法求矩阵的逆比较方便。

二、矩阵三角分解法

1. 高斯消去法的矩阵描述

高斯消去法的实质是将系数矩阵分解为一个下三角矩阵和一个上三角矩阵相乘。

2.矩阵的直接三角分解

定义 3-2 将矩阵 A 分解成一个下三角矩阵 L 和一个上三角矩阵 U 的乘积

A = LU

称为对矩阵 A 的三角分解或 LU 分解。当 L 是单位下三角矩阵时称为杜里特尔分解，当 U 是单位上三角矩阵时称为克洛特分解。

定理 3-5 矩阵 A 的各阶主子式不为零，则可惟一地进行杜里特尔分解（或克洛特分解）。

杜里特尔分解的步骤为：设 A = LU 为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ri} & \vdots \\ \cdots & a_{ir} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

由此，有

$$u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{ki}, \qquad i = r, r+1, \cdots,$$

$$l_{ir} = \left(a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}\right)\frac{1}{u_{rr}}, \qquad i = r+1, r+2, \cdots \quad ,$$

对 $r = 1, 2, \cdots, n$ 交替使用上两式，即从 U 的第一行与 L 的第一列开始，计算共分 n 步，每步先计算一行 U ，再计算一列 L ，最后得出 L 和 U 的全部元素。

对杜里特尔分别可写成

$$\begin{array}{ll|ll|ll}
(a_{11}) & u_{11} & (a_{12}) & u_{12} & \cdots & (a_{1n}) \quad u_{1n} \\
\hline
(a_{21}) & l_{21} & (a_{22}) & l_{22} & \cdots & (a_{2n}) \quad u_{2n} \\
\cline{5-6}
(a_{31}) & l_{31} & (a_{32}) & l_{32} & \cdots & (a_{3n}) \quad u_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \quad \vdots \\
\cline{6-6}
 & & & & & (a_{nn}) \quad u_{nn}
\end{array}$$

3.用矩阵三角分解法解线性方程组

由 $Ax = b$ 有 $LUx = b$ ，分成

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

先解下三角方程组 $Ly = b$ 求出 y ，再解上三角方程组 $Ux = y$ 求出方程组的解 x 。

用矩阵三角分解法解线性方程组系（定义见教材）可以求矩阵的逆。

4．追赶法

三对角方程 $Ax = f$ 或写成

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

其中系数矩阵 A 是三对角矩阵，对其进行克洛特分解 $A = LU$ ，从而

$$
\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & & & \\ a_2 & l_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_n & l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_1 & & & \\ & 1 & u_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & u_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}
$$

由矩阵乘法可得

$$
\begin{cases} l_1 = b_1 \\ u_i = c_i / l_i \\ l_{i+1} = b_{i+1} - a_{i+1} u_i \end{cases}
$$

$$
i = 1, 2, \cdots, n-1
$$

按上式可依次计算 $l_1 \to u_1 \to l_2 \to u_2 \to \cdots l_n$

定理 3-6 设三对角矩阵 A 满足

① $|b_1| > |c_1| > 0$

② $|b_i| \ge |a_i| + |c_i|$，且 $a_i c_i \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$ $\begin{cases} l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik} \right) \dfrac{1}{l_{ii}} \end{cases}$

③ $|b_n| > |a_n| > 0$

则有唯一的克洛特分解，即 $l_i \neq 0$。

求解方程组 $Ax = f$ 时，有 $LUx = f$，分成

$$
\begin{cases} Ly = f \\ Ux = y \end{cases}
$$

先解下三对角方程组 $Ly = b$ 求出 y，再解上三对角方程组 $Ux = y$ 求出方程组的解 x。

三、 平方根法

定理 3-7 实对称矩阵 A 正定的充要条件是 A 的所有顺序主子式为正。

定理 3-8 对称正定矩阵 A 存在惟一的单位下三角矩阵 L 和对角矩阵 L，使 $A = LDL^T$

定理 3-9 对称正定矩阵 A 存在惟一的对角元均为正数的下三角矩阵 L，使 $A = LL^T$

由矩阵乘法可得计算公式，对 $i = 1, 2, \cdots, n$

$$
\begin{cases}
l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik} \right) \dfrac{1}{l_{ii}}
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} \right) \dfrac{1}{d_j} \\
d_i = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k l_{ik}^2 \right)
\end{cases},
\qquad j=i+1,i+2\ldots n
$$

求解方程组 $Ax = b$ 时，有 $LL^T x = b$，分成

$$
\begin{cases}
Ly = b \\
L^T x = y
\end{cases}
$$

先解下三角方程组 $Ly = b$，求出 y，再解上三对角方程组 $L^T x = y$，求出方程组的解 x。

改进平方根法是将对称正定矩阵 A 进行 LDL^T 分解，其中 $D = \mathrm{diag}(d_i)$，$d_i > 0$，L 为单位下三角矩阵。对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有

$$
\begin{cases}
l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} \right) \dfrac{1}{d_j} \\
d_i = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k l_{ik}^2 \right)
\end{cases},
\qquad j = 1, 2, \cdots, i-1
$$

为避免重复计算，作如下变换

$A = LDL^T = TL^T$

其中 $T = LD$，即有辅助变量

$$t_{ij} = l_{ij} d_j$$

因此，对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 计算

$$
\begin{cases}
t_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{ik} l_{jk},\ j = 1, 2, \cdots, i-1 \\
l_{ij} = \dfrac{t_{ij}}{d_j},\ j = 1, 2, \cdots, i-1 \\
d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} l_{ik}
\end{cases}
$$

四、 向量和矩阵的范数

1. 向量范数

定义 3-3 设向量 $x \in R^n$，其范数 $\|x\|$ 是一个实数，且满足：

① $\|x\| \ge 0$，当且仅当 $x = 0$ 时 $\|x\| = 0$

② 对任意实数 λ，有 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

③ 对任意向量 $y \in R^n$，有 $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$ 的三种常用范数

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

定理 3-10 设 R^n 上的任意两种范数 $\|x\|_a$ 和 $\|x\|_b$ 都存在与 x 无关的正常数 c_1，c_2 使得

$$c_1 \|x\|_a \le \|x\|_b \le c_2 \|x\|_a$$

称满足不等式的两种范数 $\|x\|_a$ 和 $\|x\|_b$ 是等价的。

定义 3-4 设 $\{x^{(k)}\}$ 是 R^n 中的向量序列，若存在 $x^* \in R^n$，使

$$\lim_{k \to \infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$$

则称向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛到向量 x^*，记为 $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^*$。

定理 3-11 $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^*$ 的充要条件是

$$\lim_{k \to \infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$$

其中，$\|\bullet\|$ 为向量中的任一种范数。

2． 矩阵范数

定义 3-5 设 $A \in R^{n \times n}$， $x \in R^n$，矩阵 A 范数

$$\|A\| = \max_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

相容性条件 $\|Ax\| \le \|A\| \|x\|$

矩阵范数的性质 ：

① $\|A\| \ge 0$，当且仅当 $A = 0$ 时 $\|A\| = 0$

② 对任意实数 λ，有 $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

③ 对同维方阵 B，有

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|, \|AB\| \le \|A\| \|B\|$$

定理 3-12 对n阶方阵 $A=\left(a_{ij}\right)_n$，有

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{max}\left(A^T A\right)}$$

其中 $\lambda_{max}\left(A^T A\right)$ 表示矩阵 $A^T A$ 的最大特征值。

五、 方程组的性态和误差分析

1． 方程组的性态和矩阵的条件数

定义 3-6 A或b 的微小变化引起方程组 $Ax=b$ 的解 x 有巨大变化，则称方程组 $Ax=b$ 为病态方程组，矩阵 A 称为病态矩阵，否则方程组是良态方程组，矩阵 A 是良态矩 阵。

定理 3-13 设 A 非奇异，$Ax-b=0$，且

$$A\left(x+\delta x\right)=b+\delta b$$

则

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le\|A\|\left\|A^{-1}\right\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

定理 3-14 设 A 非奇异，$Ax-b=0$，且

$$\left(A+\delta A\right)\left(x+\delta x\right)=b$$

若 $\left\|A^{-1}\right\|\|\delta A\|<1$，则

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le\frac{\left\|A^{-1}\right\|\|A\|\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\left\|A^{-1}\right\|\|A\|\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

定义 3-7 设矩阵 A 非奇异，定义 $cond\left(A\right)=\left\|A^{-1}\right\|\|A\|$ 为矩阵 A 的条件数。

常用矩阵的条件数为

$$cond_\infty\left(A\right)=\|A\|_\infty\left\|A^{-1}\right\|_\infty$$

$$cond_1\left(A\right)=\|A\|_1\left\|A^{-1}\right\|_1$$

$$cond_2\left(A\right)=\|A\|_2\left\|A^{-1}\right\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{max}\left(A^T A\right)}{\lambda_{min}\left(A^T A\right)}}$$

其中 $\lambda_{max}\left(A^T A\right)$ 和 $\lambda_{min}\left(A^T A\right)$ 分别是半正定阵 $A^T A$ 的最大和最小特征值，当 A 对称时，

$\mathrm{cond}_2(A)=\dfrac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|}$； 当 A 对称正定时， $\mathrm{cond}_2(A)=\dfrac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$ 。

条件数有以下性质：

① $\mathrm{cond}(A)\ge 1$， $\mathrm{cond}(A)=\mathrm{cond}(A^{-1})$

② $\mathrm{cond}(\alpha A)=\mathrm{cond}(A)$， 其中 α 为非零常数

③ $\mathrm{cond}(AB)\le \mathrm{cond}(A)\,\mathrm{cond}(B)$

定理 3-15 当方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 和常数项 b 同时又扰动时，在 $\|A^{-1}\delta A\|\le\|A^{-1}\|\|\delta A\|<1$ 的条件下，有 $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le\dfrac{\mathrm{cond}(A)}{1-\mathrm{cond}(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$

2．直接法的误差分析

定理 3-16 设 $\bar{x}$ 是方程组 $Ax=b$ 的一个近似解，其精确解记为 x^*，r 为 $\bar{x}$ 的余量，则有

$$\frac{\|x^*-\bar{x}\|}{\|x^*\|}\le \mathrm{cond}(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

六、 迭代法

1．迭代原理

定义 3-8 对线性方程组 $Ax=b$ 用等价方程 $x=Bx+f$ 建立迭代格式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f\ (k=0,1,\cdots)$，逐步求解的方法叫迭代法。若 $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$ 则称迭代法收敛，x^* 即方程组的解，否则称此迭代法发散。

2．雅可比迭代

线性方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的雅可比迭代公式

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right),\quad i=1,2,\cdots,n$$

3．高斯-赛德尔迭代

线性方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的高斯-赛德尔迭代公式

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right),\quad i=1,2,\cdots,n$$

4．超松弛法 $$x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_j^{(k)}+\frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right),\qquad i=1,2,\cdots,n$$

式中，ω 为松弛因子，当$1<\omega<2$ 时为超松弛法。

5.迭代公式的矩阵表示

雅可比迭代 $x^{(k+1)}=Jx^{(k)}+f$ ，其中 $J=I-D^{-1}A$ 或

$$J=\begin{bmatrix}0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots -\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots -\frac{a_{2n}}{a_{22}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

高斯-塞得尔迭代 $x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$ ，其中 $G=(D-L)^{-1}U$ 。

超松弛法 $x^{(k+1)}=L_\omega x^{(k)}+f$ ，其中 $L_\omega=(D-\omega L)^{-1}\cdot[(1-\omega)D+\omega U]$。

七、迭代的收敛性

1.收敛的基本定理

定义 3-9 矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 的所有特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的模的最大值称为矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)$，即 $\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$

定理 3-17 矩阵 Ade 谱半径不超过矩阵 A 的任一种范数$\|A\|$。

定理 3-18 若迭代矩阵 B 满足$\|B\|<1$时，则迭代过程 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 对任意初值 $x^{(0)}$ 均收敛于 $x=Bx+f$ 的根 x^*，且有

$$\|x^*-x^{(k)}\|\le\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$$

$$\|x^*-x^{(k)}\|\le\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

定理 3-20 若雅可比迭代矩阵 J 满足

$$\|J\|<1$$

则相应的高斯-赛德尔迭代也收敛。

3. 系数矩阵法

定理 3-21 严格对角占优方程组的雅可比迭代公式和高斯-塞得尔迭代公式均收敛。

4. 松弛法的收敛性

定理 3-22 解线性方程组 $Ax = b$ 的松弛法的必要条件是 $0 < \varpi < 2$ 。

定理 3-23 设 A 对称正定，且 $0 < \varpi < 2$ ，则解方程组 $Ax = b$ 的松弛法收敛。

3.2 习题及解答

1. 用高斯消去法解下列线性方程组。

（1） $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

解 **n=3**，对线性方程组第 **1** 次消元，$a_{11} = 2 \neq 0$, 确定乘数 $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2} = 0.5, m_{31} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2} = 0.5$ ，则有

$$\begin{array}{r} \\ (2) - m_{21} \times (1) \\ (2) - m_{21} \times (1) \end{array} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 0x_1 + 2.5x_2 + 1.5x_3 = 4 \\ 0x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 = 3 \end{cases}$$

第 **2** 次消元，$a_{22} = 2.5 \neq 0$, 确定乘数 $m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{1.5}{2.5} = 0.6$,则有

$$(3) - m_{32} \times (2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 0x_1 + 2.5x_2 + 1.5x_3 = 4 \\ 0x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 = 3 \end{cases}$$

回代

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

(2) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 8 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 13 \end{bmatrix}$

解对线性方程组$\begin{cases} 3x_1+2x_2-7x_3=-4 \\ 8x_1+2x_2-3x_3=-5 \\ 4x_1+6x_2-3x_3=-13 \end{cases}$ 第 **1** 次消元，确定乘数$m_{21}=\frac{8}{3}, m_{31}=\frac{4}{3}$, 则有

$$\begin{matrix} \\ (2)-m_{21}\times(1) \\ (2)-m_{21}\times(1) \end{matrix}\begin{cases} 3x_1+2x_2-7x_3=-4 \\ 0-10x_2+47x_3=17 \\ 0+10x_2+25x_3=55 \end{cases}$$

第 **2** 次消元，$a_{22}=-1$, 确定乘数$m_{32}=-1$,则有

$$(3)-m_{32}\times(2)\begin{cases} 3x_1+2x_2-7x_3=-4 \\ 0-10x_2+47x_3=17 \\ 0+0+72x_3=72 \end{cases}$$

回代，则有

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \\ x_3=1 \end{cases}$$

2. 用列主元消去法解下列线性方程组并求系数行列式

（1）$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-3x_3=10 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$

解用线性方程组的增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -3 & 10 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{列选主元}]{\text{交换1,2行}}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{消元}}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & -\frac{11}{3} & -1 & -\frac{10}{3} \\ 0 & -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{列选主元}]{\text{交换2,3行}}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 & 10 \\ 0 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{消元}}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 & 10 \\ 0 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{60}{18} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

回代

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

系数行列式 $\det A = (-1)^2 \times 3 \times (-6) \times \left(-\frac{60}{18}\right) = 60$

$$(2)\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 4 \\ -18 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

解消元过程用矩阵表示

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 4 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列选主元}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 4 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{消元}}$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & \frac{10}{3} & 5 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列选主元}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & \frac{10}{3} & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{消元}}$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{50}{27} & \frac{50}{27} & \frac{50}{9} \\ 0 & 0 & \frac{14}{9} & \frac{35}{9} & \frac{14}{9} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{50}{27} & \frac{8}{27} & \frac{50}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{91}{25} & 0 \end{bmatrix}$$

回代 $x_4 = 0, x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1$

系数行列式 $\det A = (-1)^2 \times (-18) \times \frac{3}{2} \times \frac{50}{27} \times \frac{91}{25} = -182$

3.给出搞死消去法和列选主元消去法计算机实现时的情况。

解计算机求解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

时，下面用增广矩阵各元素的位置代表计算机的存储单元，增广矩阵元素数值的变化代表存储单元所存放数据的变化，从而说明计算机实现高斯消去法时的实际计算情况。

放入初始数据 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$

第一次消元 $$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ m_{21} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ m_{31} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

第二次校园 $$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ m_{21} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ m_{31} & m_{32} & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

第一次回代 $$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ m_{21} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ m_{31} & m_{32} & a_{33}^{(2)} & x_3 \end{bmatrix}$$

第二次回代 $$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ m_{21} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & x_2 \\ m_{31} & m_{32} & a_{33}^{(2)} & x_3 \end{bmatrix}$$

第三次回代 $$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & x_1 \\ m_{21} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & x_2 \\ m_{31} & m_{32} & a_{33}^{(2)} & x_3 \end{bmatrix}$$

下面说明计算机实现列选主元高斯消去法求解下列方程组的实际情形。

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 = -1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}3&5&4&-1\\5&7&3&2\\4&4&2&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{选主元得}}\begin{bmatrix}5&7&3&2\\3&5&4&-1\\4&4&2&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{消元得}}\begin{bmatrix}5&7&3&2\\0.6&0.8&2.2&-2.2\\0.8&-1.6&-0.4&0.4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选主元得}}\begin{bmatrix}5&7&3&2\\0.6&-1.6&-0.4&0.4\\0.8&0.8&2.2&-2.2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{消元得}}\begin{bmatrix}5&7&3&2\\0.6&-1.6&-0.4&0.4\\0.8&-0.5&2&-2\end{bmatrix}$$

回代

$$\frac{b_3}{a_{33}}=\frac{-2}{2}=-1\longrightarrow b_3$$

$$\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{23}b_3)=\frac{-1}{1.6}[0.4-(-0.4)-1]=0\longrightarrow b_2$$

$$\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}b_2-a_{13}b_3)=\frac{1}{5}[2-7\times 0-3(-1)]=1\longrightarrow b_1$$

从而得到

$$x_3=-1, x_2=0, x_1=1$$

4. 分别用高斯消去法和列主元高斯消去法求解线性方程组，要求用 4 位有效数字

$$\begin{cases}0.002x_1+87.13x_2=87.15\\4.453x_1-7.26x_2=37.27\end{cases}$$

解用高斯消去法求解。用线性方程组的增广矩阵

$$\begin{bmatrix}0.002&87.13&87.15\\4.453&-7.26&37.27\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{列选主}]{\text{交换1,2行}}\begin{bmatrix}4.453&-7.26&37.27\\0.002&87.13&87.16\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{消元}}\begin{bmatrix}4.453&-7.26&37.27\\0&87.13&87.14\end{bmatrix}$$

回代

$$\begin{cases}x_2=1.000\\x_1=10.00\end{cases}$$

5.分别用高斯消去法和列主元消去法求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}10^{-8}&2&3\\-1&3.712&4.623\\-2&1.072&5.643\end{bmatrix}$$

的行列式 detA。

解高斯消去法

$$\begin{bmatrix}10^{-8} & 2 & 3\\ -1 & 3.712 & 4.623\\ -2 & 1.072 & 5.643\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{消元得}}\begin{bmatrix}10^{-8} & 2 & 3\\ 0 & 3.712+2\times10^{8} & 4.623+3\times10^{8}\\ 0 & 1.072+4\times10^{8} & 5.643+6\times10^{8}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{消元得}}\begin{bmatrix}10^{-8} & 2 & 3\\ 0 & 3.712+2\times10^{8} & 4.623+3\times10^{8}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

则 $\det A = 10^{-8}\times(3.712+2\times10^{8})\times 0 = 0$

列主元消去法

$$\begin{bmatrix}10^{-8} & 2 & 3\\ -1 & 3.712 & 4.623\\ -2 & 1.072 & 5.643\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{选主得}}\begin{bmatrix}-2 & 1.072 & 5.643\\ 0 & 3.712 & 4.623\\ 10^{-8} & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{消元得}}\begin{bmatrix}-2 & 1.072 & 5.643\\ 0 & 3.176 & 1.8015\\ 0 & 2-0.536\times10^{-8} & 3-2.8215\times10^{-8}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{消元得}}\begin{bmatrix}-2 & 1.072 & 5.643\\ 0 & 3.176 & 1.8015\\ 0 & 0 & 1.866\end{bmatrix}$$

系数行列式 $\det A=(-1)^{1}(-2)\times 3.176\times 1.866 \approx 11.85$

6.用高斯-约当法求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

解

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1\end{array}\right]\longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\text{的逆矩阵为}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

7.距离说明一个非奇异矩阵不一定存在 LU 分解。

解 令 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，则 $|\mathbf{A}|=-1\neq 0$，所以 $\mathbf{A}$是非奇异矩阵。

若 A 有 LU 分解，则存在 a,b,c,d 使

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & d\\ 0 & c\end{bmatrix}$$

比较等式两边的第一列元素得

$$b=0,ab=1$$

显然这两式不可能同时成立，因而 A 不存在 LU 分解。

8.用矩阵直接三角分解发解方程组并计算系数行列式

(1) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 1\\ 6 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 11\\ 13\end{bmatrix}$

解用分解公式

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 1\\ 6 & 1 & 5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & -7\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ & 1 & -3\\ & & -7\end{bmatrix}$$

由 $\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 11\\ 13\end{bmatrix}$顺代解得 $y=\begin{bmatrix}6\\ -1\\ -7\end{bmatrix}$

再由 $\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ & 1 & -3\\ & & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -1\\ -7\end{bmatrix}$回代解得 $x=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$

系数行列式

$$\det A = 2\times 1\times(-7) = -14$$

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$

解 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}=LU=\begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix}$

紧凑格式为

$$\begin{array}{|cc|cc|cccc} (2) & 2 & (2) & 2 & (3) & 3 & (3) & 3 \\ \cline{3-8} (4) & 2 & (7) & 3 & (7) & 1 & (1) & -5 \\ \cline{5-8} (-2) & -1 & (4) & 2 & \multicolumn{1}{|c}{(5)} & 6 & (7) & 6 \end{array}$$

所以

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} U=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ & 3 & 1 \\ & & 6 \end{bmatrix} y=\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

由 Ux=y，可得

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ & 3 & 1 \\ & & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

解得

$$x=\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

系数行列式

$$\det A = 2 \times 3 \times 6 = 36$$

9.用克洛特分解法求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

解对 A 和 b 组成的增广矩阵进行克洛特分解，写成紧凑形式

$$
\begin{array}{|ll|ll|ll|ll|ll}
(6) & 6 & (2) & \frac{1}{3} & (1) & \frac{1}{6} & (-1) & -\frac{1}{6} & (6) & 1 \\
(2) & 2 & (4) & \frac{10}{3} & (1) & \frac{1}{5} & (0) & \frac{1}{10} & (-1) & -\frac{9}{10} \\
(1) & 1 & (1) & \frac{2}{3} & (4) & \frac{37}{10} & (-1) & -\frac{9}{37} & (5) & \frac{46}{37} \\
(-1) & -1 & (0) & \frac{1}{3} & (-1) & -\frac{9}{10} & (3) & \frac{191}{74} & (-5) & -1
\end{array}
$$

求解上三角形方程组 Ux=y，自下而上回代可得

$$x_4 = -1, x_3 = 1, x_2 = -1, x_1 = 1$$

10.分别用杜里特尔和克洛特分解法求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 11 \end{cases}$$

解杜里特尔分解法：

$$
\begin{array}{|ll|ll|ll|ll}
(2) & 2 & (1) & 1 & (1) & 1 & (2) & 2 \\
(1) & 0.5 & (3) & 2.5 & (2) & 1.5 & (3) & 2 \\
(1) & 0.5 & (2) & 0.6 & (-3) & -4.4 & (11) & 8.8
\end{array}
$$

因此有

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.5 & 1 & \\ 0.5 & 0.6 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2.5 & 1.5 \\ & & -4.4 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8.8 \end{bmatrix}$$

求解

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2.5 & 1.5 \\ & & -4.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8.8 \end{bmatrix}$$

回代求解

$$x_3 = -2, x_2 = 2, x_1 = 1$$

克洛特分解法

$$
\begin{array}{|ll|ll|ll|ll}
(2) & 2 & (1) & 0.5 & (1) & 0.5 & (2) & 1 \\
(1) & 1 & (3) & 2.5 & (2) & 0.6 & (3) & 0.8 \\
(1) & 1 & (2) & 1.5 & (-3) & -4.4 & (11) & -2
\end{array}
$$

因此有

$$L=\begin{bmatrix}1 & & \\ 1 & 2.5 & \\ 1 & 1.5 & -4.4\end{bmatrix} U=\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0.5\\ & 1 & 0.6\\ & & 1\end{bmatrix} y=\begin{bmatrix}1\\0.8\\-2\end{bmatrix}$$

求解

$$\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0.5\\ & & 0.6\\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0.8\\-2\end{bmatrix}$$

回代求解

$$x_3=-2, x_2=2, x_1=1$$

克洛特分解法的紧凑格式和杜里特尔分解法的紧凑格式的区别是前者每行元素除以对角线上的元素，每列不除以对角线上的元素。后者却是每列元素除以对角线上的元素，每行不除以对角线上的元素，其余步骤完全一样。

11.用追赶法求解三角方程组

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1\\ & & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\0\end{bmatrix}$$

解

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1\\ & & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_1 & & & \\ a_2 & l_2 & & \\ & a_3 & l_3 & \\ & & a_4 & l_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & u_1 & & \\ & 1 & u_2 & \\ & & 1 & u_3\\ & & & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & & & \\ 1 & \frac{5}{2} & & \\ & 1 & \frac{3}{5} & \\ & & 1 & -\frac{7}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \frac{2}{5} & \\ & & 1 & \frac{5}{3}\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$l_1=b_1=2 \qquad u_1=\frac{c_1}{l_1}=\frac{1}{2}$$

$$l_2=b_2-a_2u_1=3-1\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \qquad u_2=\frac{c_2}{l_2}=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$$

$$l_3=b_3-a_3u_2=1-1\times\frac{2}{5}=\frac{3}{5} \qquad u_3=\frac{c_3}{l_3}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}$$

$$l_4=b_4-a_4u_3=1-2\times\frac{5}{3}=-\frac{7}{3}$$

Ly=f

即 $\begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & \frac{5}{2} & & \\ & 1 & \frac{3}{5} & \\ & & 2 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{f_1}{l_1} = \dfrac{1}{2} \\ y_2 = \dfrac{f_2 - a_2 y_1}{l_2} = \dfrac{2 - 1 \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{3}{5} \\ y_3 = \dfrac{f_3 - a_3 y_2}{l_3} = \dfrac{2 - 1 \times \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{7}{3} \\ y_4 = \dfrac{f_4 - a_4 y_3}{l_4} = \dfrac{0 - 2 \times \frac{7}{3}}{-\frac{7}{3}} = \dfrac{14}{7} = 2 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} x_4 = y_4 = 2 \\ x_3 = y_3 - u_3 x_4 = \dfrac{7}{3} - \dfrac{5}{3} \times 2 = -1 \\ x_2 = y_2 - u_2 x_3 = \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{5} \times (-1) = 1 \\ x_1 = y_1 - u_1 x_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times 1 = 0 \end{cases}$

12. 用改进平方根法和杜里特尔分解求解下列方程组并计算系数行列式

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 8 & -4 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

解利用改进平方根法公式

$$A=\begin{bmatrix}16&4&8\\4&5&-4\\8&-4&22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\l_{21}&1&\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&&\\&d_2&\\&&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&l_{21}&l_{31}\\&1&l_{32}\\&&1\end{bmatrix}$$

$$d_1=16, d_1l_{21}=4, l_{21}=\frac{1}{4}, d_1l_{31}=8, l_{31}=\frac{1}{2}$$

$$d_2=5-d_1l_{21}^2=4, d_2l_{32}=-4-d_1l_{21}l_{31}, l_{32}=-\frac{3}{2}, d_3=9$$

由 $Ly=b$ 可得

$$\begin{bmatrix}1&&\\\frac{1}{4}&1&\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\3\\10\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}-4\\4\\18\end{bmatrix}$$

由 $L^Tx=D^{-1}y$, 得

$$\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\&1&-\frac{3}{2}\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix}-\frac{9}{4}&4&2\end{bmatrix}^T$$

系数行列式 $\det A=16\times4\times19=576$

13. 用平方根法及改进平方根法解方程组

$$\begin{cases}4x_1-x_2+x_3=6\\-x_1+4.25x_2+2.7x_3=-0.5\\x_1+2.75x_2+3.5x_3=1.25\end{cases}$$

解因方程组系数矩阵对称且顺序主子式

$\Delta_1=4>0, \Delta_2=16>0, \Delta_3=16>0$

故方程组为正定方程组，按平方根法

$i=1 \quad l_{11}=(a_{11})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$

$$l_{21}=\frac{a_{21}}{l_{11}}=-\frac{1}{2}=-0.5$$

$$l_{31}=\frac{a_{31}}{l_{11}}=\frac{1}{2}=0.5$$

$$i=2 \quad l_{22}=\left(a_{22}-l_{21}^{2}\right)^{21}=\left[4.25-(-0.5)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}=2$$

$$l_{32}=(a_{32}-l_{31}l_{21})\frac{1}{l_{22}}=\left[2.75-0.5(-0.5)\right]\frac{1}{2}=1.5$$

$$i=3 \qquad l_{33}=\left(a_{33}-l_{31}^{2}-l_{32}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3.5-0.5^{2}-1.5^{2}\right)^{\frac{1}{2}}=1$$

因此，系数矩阵的 LL^{T} 分解为

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & & \\ -0.5 & 2 & \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ & 2 & 1.5 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

解 $Ly=b$ 得

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{b_1}{l_{11}}=\dfrac{6}{2}=3 \\ y_2=\dfrac{b_2-l_{21}y_1}{l_{22}}=\dfrac{-0.5-(-0.5)\times 3}{2}=0.5 \\ y_3=\dfrac{b_3-l_{31}y_1-l_{32}y_2}{l_{33}}=\dfrac{1.25-0.5\times 3-1.5\times 0.5}{1}=-1 \end{cases}$$

解 $L^{T}x=y$, 得

$$\begin{cases} x_3=\dfrac{y_3}{l_{33}}=\dfrac{-1}{1}=-1 \\ x_2=\dfrac{y_2-l_{22}x_3}{l_{22}}=\dfrac{0.5-1.5\times(-1)}{2}=1 \\ x_1=\dfrac{y_1-l_{22}x_2-l_{31}x_3}{l_{11}}=\dfrac{3-(-0.5)\times 1-0.5(-1)}{2}=2 \end{cases}$$

方程组的解 $x=[2,\ 1,\ -1]^{T}$

用改进平方根法

$i=1 \quad d_1=a_{11}=4$

$$i=2 \quad t_{21}=a_{21}=-1, \quad l_{21}=\frac{t_{21}}{d_1}=-\frac{1}{4}=-0.25$$

$$d_2 = a_{22} - t_{21}l_{21} = 4.25 - (-1)\times(-0.25) = 4$$

$$i = 3 \quad t_{31} = a_{31} = 1$$

$$t_{32} = a_{32} - t_{31}l_{21} = 2.75 - 1\times(-0.25) = 3$$

$$l_{31} = \frac{t_{31}}{d_1} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$l_{32} = \frac{t_{32}}{d_2} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$d_3 = a_{33} - t_{31}l_{31} - t_{32}l_{32} = 3.5 - 1\times 0.25 - 3\times 0.75 = 1$$

因此有

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -0.25 & 1 & \\ 0.25 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

由 $A = LDL^T$，解 $Ly = b$ 得

$$\begin{cases} y_1 = b_1 = 6 \\ y_2 = b_2 - l_{21}y_1 = -0.5 - (-0.25\times 6) = 1 \\ y_3 = b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 = 1.25 - 0.25\times 6 - 0.75\times 1 = -1 \end{cases}$$

解 $DL^Tx = y$ 得

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{y_3}{d_3} = \dfrac{-1}{1} = -1 \\ x_2 = \dfrac{y_2}{d_2} - l_{32}x_3 = \dfrac{1}{4} - 0.75(-1) = 1 \\ x_1 = \dfrac{y_1}{d_1} - l_{21}x_2 - l_{31}x_3 = \dfrac{6}{4} - (-0.25)\times 1 - 0.25(1) = 2 \end{cases}$$

14. 已知方程组 $Ax = f$，其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & b \\ -1 & 2 & a \\ b & -1 & 2 \end{bmatrix}$，$f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

（**1**）试问参数和满足什么条件式时，可选用平方根法求解该方程组？

解方程组系数矩阵 A 对称正定时，可用平方根法求解。

由 $A = A^T$，有 $a = -1$

A 的各阶主子式

$D_1 = 2 > 0$，$D_2 = 4 - 1 > 0$，

$$D_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & b \\ -1 & 2 & -1 \\ b & -1 & 2 \end{bmatrix} = 8 + 2b - 2b^2 - 4 = 4 - 2b - 2b^2 > 0,$$

$2\left[\frac{9}{4}-\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\right]>0,\quad \left|b-\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$, 即 $-1<b<2$

当 $a=-1,\ -1<b<2$ 时，方程组系数矩阵 A 对称正定可用平方根法求解。

(2) 取 $b=0,\ a=1$, 使用追赶法求解该方程组。

解

$$Ax=f=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & \\ -1 & 2 & 1\\ & -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & c_1 & \\ a_2 & b_2 & c_2\\ & a_3 & b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_1 & & \\ a_2 & l_2 & \\ & a_3 & l_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & u_1 & \\ & 1 & u_2\\ & & 1\end{bmatrix}$$

$$l_1=b_1=2 \qquad u_1=\frac{c_1}{l_1}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$l_2=b_2-a_2u_1=2-(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2} \qquad u_2=\frac{c_2}{l_2}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$l_3=b_3-a_3u_2=2-(-1)\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$Ly=f\quad \begin{bmatrix}2 & & \\ -1 & \frac{3}{2} & \\ & -1 & \frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\qquad y=\begin{bmatrix}0\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$Ux=y\quad \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \\ & 1 & \frac{2}{3}\\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}\qquad x=\begin{bmatrix}x_1=\frac{1}{2}\\ x_2=1\\ x_3=\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

15. 已知向量 $x=[2,\ -3,\ 4]^T$, 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}$, 求向量 x 和 A 的三种常用范数。

解向量 x 的范数

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| = \max\{|2|,|-3|,|4|\} = 4$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |2|+|-3|+|4| = 9$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2^2+(-3)^2+4^2} = \sqrt{29}$$

矩阵 A 的范数

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{1,\ 4,\ 8\} = 8$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{1,\ 6,\ 6\} = 6$$

又由于 $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, 而

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

从而 $\lambda_{\max}(A^T A) = 32$, 所以

$$\|A\|_2 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

16. 设向量 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ，问: $|x_1|+|2x_2|+|x_3|$ 是不是一种向量范数?

$|x_1+3x_2|+|x_3|$ 是不是一种向量范数?

解 记 $\|x\| = |x_1|+|2x_2|+|x_3|$, 显然 $\|x\| > 0$, $\forall x \in R^3$, 且 $\|x\|=0$, $x_1=x_2=x_3=0$ 即 $x = 0$.

对 $\forall x \in R$, $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)^T$, 从而有

$$\lambda\|x\| = |\lambda x_1| + |2\lambda x_2| + |\lambda x_3| = |\lambda|(|x_1|+|2x_2|+|x_3|) = |\lambda|\|x\|$$

对 $\forall x, y \in R$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T$, 有

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= |x_1+y_1| + |2(x_2+y_2)| + |x_3+y_3| \\ &\le |x_1|+|y_1|+|2x_2|+|2y_2|+|x_3|+|y_3| = \|x\|+\|y\| \end{aligned}$$

因此, $|x_1|+|3x_2|+|x_3|$ 是一种范数。

因为 $|x_1+3x_2|+|x_3|=0$, 有 $x_1+3x_2=0$, $x_3=0$, 但 $x_1=x_2=x_3=0$ 不成立, 例如 $x=(3,-1,0)^T \ne 0$, $|3+3(-1)|+|0|=0$, 故 $|x_1+3x_2|+|x_3|$ 不是一种范数。

17.证明对任意非奇异矩阵 A、B，有 $\|A^{-1}-B^{-1}\| \le \|A^{-1}\|\|B^{-1}\|\|A-B\|$。

证 $\|A^{-1}\|\|B^{-1}\|\|A-B\| = \|A^{-1}\|\|A-B\|\|B^{-1}\| \ge \|A^{-1}(A-B)B^{-1}\| = \|B^{-1}-A^{-1}\|$

$=||A^{-1}-B^{-1}||$

即 $$\|A^{-1}-B^{-1}\| \le \|A^{-1}\|\|B^{-1}\|\|A-B\|$$

18.证明对 n 阶非奇异矩阵 A 和 n 阶奇异矩阵 B，有 $\|A^{-1}\| \ge \dfrac{1}{\|A-B\|}$。

证由于 B 奇异，$\exists x \ne 0$, 使 $Bx=0$, 有 $Ax-Bx=Ax$

由于A非奇异，有 $x=A^{-1}(Ax-Bx)$

用相容性条件和乘积不等式，有 $\|x\| = \|A^{-1}(A-B)x\| \le \|A^{-1}\|\|A-B\|\|x\|$

则 $\|x\| \le \|A^{-1}\|\|A-B\|\|x\|$, 即 $\|A^{-1}\| \ge \dfrac{1}{\|A-B\|}$

19.求下列矩阵的条件数 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 10^{-10}\end{bmatrix}$

解由已知有 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 10^{10}\end{bmatrix}$

于是，有矩阵 A 的条件数

$$\mathrm{cond}(A)_1=||A||_1\,||A^{-1}||_1=1\times 10^{10}$$

20.已知方程组

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

的解 $x=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}^T$，如果右端有小扰动 $||\delta b||_\infty=\frac{1}{2}\times 10^{-6}$，估计由此引起的解的相对误差。

解 由于 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1.5\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$，从而 $\mathrm{cond}(A)_\infty=22.5$

由公式 $\dfrac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \mathrm{cond}(A)_\infty \dfrac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$，有

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le 22.5\times\frac{\frac{1}{2}\times10^{-6}}{\frac{2}{3}}=1.6875\times10^{-5}$$

21.方程组 $Ax=b$ ，其中 A 为 $m\times n$ 阶对称且非奇异矩阵。设 A 误差 δA ，则原方程组变化为（$A+\delta A$）（$x+\delta x$）$=b$ ，其中 δx 为解的误差向量。证明

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x+\delta x\|_2} \le \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right|\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}$$

其中 λ_1 和 λ_n 分别为 A 的按模最大和最小的特征值。

证 将（$A+\delta A$）（$x+\delta x$）$=b$ 两端减去 $Ax=b$ 得

$$A\delta x=-\delta A(x+\delta x)$$

$$\delta x=-A^{-1}\delta A(x+\delta x)$$

由相容性有

$$\|\delta x\|_2 \le \|A^{-1}\|_2\|\delta A\|_2\|x+\delta x\|_2$$

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x+\delta x\|_2} \le \|A^{-1}\|_2\|\delta A\|_2 = \mathrm{cond}(A)_2\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}$$

又，已知 $A^T=A$ 有 $\mathrm{cond}(A)_2=\dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}$

其中 λ_1 和 λ_n 分别为 **A** 按模最大和最小的特征值。

由此可得

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x+\delta x\|_2} \le \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right|\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}$$

22.用雅可比迭代法、高斯-赛德尔迭代法解下列方程组

（1）$\begin{cases} 10x_1-2x_2-2x_3=1 \\ -2x_1+10x_2-x_3=0.5 \\ -1x_1-2x_2+3x_3=1 \end{cases}$

解 设初值为 $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0$

雅可比迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0.2x_2^{(k)}+0.2x_3^{(k)}+0.1 \\ x_2^{(k+1)}=0.2x_1^{(k)}+0.1x_3^{(k)}+0.05 \\ x_3^{(k+1)}=0.3333x_1^{(k)}+0.6667x_2^{(k)}+0.3333 \end{cases}$$

计算结果如表 3-1 所示。

表 3-1　计　算　结　果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.000 000	0.000 000	0.000 000
1	0.100 000	0.050 000	0.333 300
2	0.176 667	0.103 333	0.400 000
3	0.200 667	0.125 333	0.461 111
4	0.217 280	0.136 239	0.483 736
5	0.223 995	0.141 830	0.496 550
6	0.007 676	0.144 454	0.502 516
7	0.229 394	0.145 787	0.505 492
8	0.230 256	0.146 428	0.506 953
9	0.230 676	0.146 747	0.507 668
10	0.230 883	0.146 902	0.508 090
11	0.230 998	0.146 986	0.508 193
12	0.231 036	0.147 019	0.508 330
13	0.231 064	0.147 037	0.508 322
14	0.231 072	0.147 045	0.508 343
15	0.231 078	0.147 049	0.508 351
16	0.231 080	0.147 051	0.508 356
17	0.231 081	0.147 052	0.508 359
18	0.231 082	0.147 052	0.508 359
19	0.231 082	0.147 052	0.508 359

高斯-赛德尔迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.1 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.05 \\ x_3^{(k+1)} = 0.3333x_1^{(k+1)} + 0.6667x_2^{(k+1)} + 0.3333 \end{cases}$$

计算结果如表 3-2 所示

表 3-2　计　算　结　果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.000 000	0.000 000	0.000 000
1	0.100 000	0.070 000	0.413 333
2	0.196 667	0.130 667	0.486 000
3	0.223 333	0.143 267	0.503 289
4	0.229 301	0.146 185	0.507 188
5	0.230 675	0.145 854	0.508 092
6	0.230 989	0.147 007	0.508 298

7	0.231 061	0.147 042	0.508 346
8	0.231 078	0.147 050	0.508 357
9	0.231 081	0.147 052	0.508 359
10	0.231 082	0.147 052	0.508 359
11	0.231 082	0.147 052	0.508 359

(2) $\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}$

解 雅可比迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} + \frac{3}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}x_1^{(k)} + \frac{1}{11}x_3^{(k)} - \frac{3}{11}x_4^{(k)} + \frac{25}{11} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{10}x_2^{(k)} + \frac{1}{10}x_4^{(k)} - \frac{11}{10} \\ x_4^{(k+1)} = -\frac{3}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{15}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} + 0.6 \\ x_2^{(k+1)} = 0.090909x_1^{(k)} + 0.090909x_3^{(k)} - 0.272727x_4^{(k)} + 2.272727 \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} + 0.1x_2^{(k)} + 0.1x_4^{(k)} - 1.1 \\ x_4^{(k+1)} = -0.375x_2^{(k)} + 0.125x_3^{(k)} + 1.875 \end{cases}$$

设初值为 $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$，取精度 $\frac{\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \|_\infty}{\| \mathbf{x}^{(k+1)} \|_\infty} \le 10^{-3}$，计算结果如表 3-3 所示。

表 3-3 计 算 结 果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
1	0.600 0	2.272 7	-1.100 0	1.875 0
2	1.047 3	1.715 9	-0.805 2	0.885 2
3	0.932 6	2.053 3	-1.049 3	1.130 9
4	1.015 2	1.953 7	-0.968 1	0.973 9
5	0.989 0	2.011 4	-1.010 3	1.021 4
6	1.003 2	1.992 2	-0.994 5	0.994 4
7	1.998 1	2.002 3	-1.002 0	1.003 6
8	1.000 6	1.998 7	-0.999 0	0.998 9
9	0.999 7	2.000 4	-1.000 4	1.000 6
10	1.000 1	1.999 8	-0.999 8	0.999 8

当$\dfrac{\|x^{(10)}-x^{(9)}\|_\infty}{\|x^{(10)}\|_\infty}=\dfrac{8.0\times10^{-4}}{1.9998}\prec 10^{-3}$，迭代**10**次后所得近似解满足精度要求。

高斯-赛德尔迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0.1x_2^{(k)}-0.2x_3^{(k)}+0.6 \\ x_2^{(k+1)}=0.0909x_1^{(k+1)}+0.0909x_3^{(k)}-0.2727x_4^{(k)}+2.2727 \\ x_3^{(k+1)}=-0.2x_1^{(k+1)}+0.1x_2^{(k+1)}+0.1x_4^{(k)}-1.1 \\ x_4^{(k+1)}=-0.375x_2^{(k+1)}+0.125x_3^{(k+1)}+1.875 \end{cases}$$

设初值为$x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=x_4^{(0)}=0$，取精度$\dfrac{\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty}{\|x^{(k+1)}\|_\infty}\le 10^{-3}$，计算结果如表**3-4**所示。

表3-4 计 算 结 果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
1	0.600 0	2.327 2	-0.987 3	0.878 9
2	1.030 0	2.037 0	-1.014 0	0.984 4
3	1.006 5	2.003 6	-1.002 5	0.998 3
4	1.000 9	2.000 3	-1.000 3	0.999 9
5	1.000 1	2.000 0	-1.000 0	1.000 0

当$\dfrac{\|x^{(10)}-x^{(9)}\|_\infty}{\|x^{(10)}\|_\infty}=\dfrac{8.0\times10^{-4}}{2}\prec 10^{-3}$，迭代**5**次后所得近似解满足精度要求。

与精度解$x^*=(1,2,-1,1)^T$比较，高斯-赛德尔迭代比雅可比迭代精度高，或者说收敛快，但这不是一般性的结论，也有这样的线性方程组，使用雅可比迭代收敛，使用高斯-赛德尔迭代不收敛。不过，当二者均收敛时，高斯-赛德尔迭代法要比雅可比迭代收敛快，本题就属于这种情形。

上述计算例子是在没有肯定迭代法收敛情况下进行的。事实上，对大型线性方程组，使用某种迭代法是否收敛，在迭代过程中就能发现，一般都不作事先讨论。

实际计算总是用迭代法的分量形式，迭代法的矩阵形式则用于研究收敛性理论。

23.取初试向量$x^{(0)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$，用雅可比迭代法解下列方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ 2x_1+2x_2+x_3=5 \end{cases}$$

解 雅可比迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = -x_1^{(k)} - x_3^{(k)} + 3 \\ x_3^{(k+1)} = -2x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} + 5 \end{cases}$$

取 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$，计算结果表示如表 3-5 所示。

表 3-5 计 算 结 果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
1	1.000 0	3.000 0	5.000 0
2	5.000 0	-3.000 0	-3.000 0
3	1.000 0	1.000 0	1.000 0
4	1.000 0	1.000 0	1.000 0

故取 $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$。

24.用雅可比迭代法高斯-赛德尔迭代法和逐次超松弛方法（取 $\omega = 1.8$ 和 $\omega = 1.22$），解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

解 设初值 $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$。

雅可比迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 0.75x_2^{(k)} + 6 \\ x_2^{(k+1)} = 0.75x_1^{(k)} + 0.25x_3^{(k)} + 7.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.25x_2^{(k)} - 6 \end{cases}$$

计算结果表示如表 3-6 所示。

表 3-6 计 算 结 果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	5.250 000	7.000 000	-5.750 000
2	0.750 000	2.125 000	-4.250 000
3	4.406 250	5.875 000	-5.468 750
4	1.593 750	2.828 125	-5.531 250

⋮	⋮	⋮	⋮
57	3.000 004	4.000 006	-5.000 001
58	2.999 996	3.999 996	-4.999 999

高斯-赛德尔迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.75x_2^{(k)} + 6 \\ x_2^{(k+1)} = 0.75x_1^{(k+1)} + 0.25x_3^{(k)} + 7.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.25x_2^{(k+1)} - 6 \end{cases}$$

计算结果表示如表 3-7 所示。

表 3-7 计 算 结 果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	5.250 000	3.812 500	-5.046 875
2	3.140 625	3.882 813	-5.029 297
3	3.087 891	3.926 758	-5.018 311
4	3.054 932	3.954 224	-5.011 444
⋮	⋮	⋮	⋮
21	3.000 019	3.999 985	-5.000 004
22	3.000 011	3.999 998	-5.000 002

逐次超松弛方法

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{4}(-3x_2^{(k+1)} + 24) \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega) + \dfrac{\omega}{4}(-35x_1^{(k+1)} - 4x_3^{(k)} + 30) \\ x_1^{(k+1)} = (1-\omega) + \dfrac{\omega}{4}(x_2^{(k+1)} - 24) \end{cases}$$

由已知 $\omega = 1.8$ 时，计算结果表示如表 3-8 所示。

表 3-8 计 算 结 果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	8.650 000	1.472 500	-10.937 37
2	1.892 126	4.845 811	0.130 513 5
3	2.744 454	5.997 064	-8.214 729
4	0.535 393 2	4.298 935	-2.293 696

⋮	⋮	⋮	⋮
64	3.000 001	3.999 999	-4.999 996
65	3.000 001	4.000 000	-5.000 002

由已知$\omega = 1.22$时，计算结果表示如表 3-9 所示。

表 3-9 计 算 结 果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	6.185 000	3.575 725	-6.449 404
2	2.687 512	3.937 199	-4.700 285
3	3.126 210	3.989 747	-5.069 064
4	2.981 615	3.998 013	-4.985 412
⋮	⋮	⋮	⋮
10	3.000 000	3.999 998	-4.999 999
11	3.000 002	4.000 000	-5.000 000

此题的计算结果表明，不同的迭代法的收敛速度不同。

逐次超松弛方法的收敛速度与松弛因子有关，在相同初值及相同误差要求下，当$\omega = 1.8$时，逐次超松弛方法迭代次数比雅可比迭代次数还多，而当$\omega = 1.22$时，逐次超松弛方法显示了明显的优越性。

25.用逐次超松弛方法取$\omega = 1.46$，$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$，解下列线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解 超松弛法的迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{2}(x_2^{(k)} + 1) \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \dfrac{\omega}{2}(x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \dfrac{\omega}{2}(x_2^{(k)} + x_4^{(k)} + 1) \\ x_4^{(k+1)} = (1-\omega)x_4^{(k)} + \dfrac{\omega}{2}(x_3^{(k)}) \end{cases}$$

由已知$\omega = 1.46$，$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$，由已知$\omega = 1.22$时，计算结果表示如表 3-10 所示。

表 3-10 计 算 结 果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	1.000 00	1.000 00	1.000 00	1.000 00
1	1.000 00	1.000 00	1.730 00	0.802 90
2	1.000 00	1.532 90	1.639 33	0.827 38
3	1.389 02	1.505 56	1.678 95	0.845 04
4	1.190 11	1.40186	1.597 92	0.777 76
5	1.205 91	1.401 94	1.586 14	0.800 11
6	1.198 69	1.388 04	1.597 72	0.798 29
7	1.191 87	1.397 90	1.598 27	0.799 52
8	1.202 21	1.401 31	1.601 41	0.801 25
9	1.199 94	1.400 38	1.600 54	0.799 82
10	1.200 30	1.400 44	1.599 94	0.800 04
11	1.200 18	1.399 89	1.599 97	0.799 96
12	1.199 83	1.399 91	1.599 92	0.799 96
13	1.200 01	1.399 99	1.600 00	0.800 02
14	1.199 99	1.399 99	1.600 01	0.799 99
15	1.200 00	1.400 01	1.600 00	0.800 00
16	1.200 00	1.400 00	1.600 00	0.800 00

取方程组的近似解 $x^{(16)} = [1.20000 \quad 1.40000 \quad 1.60000 \quad 0.80000]^T$

26.设 $x = Jx + f$，其中 $J = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$，$f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

证明虽然 $\|J\| > 1$，但迭代法 $x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + f$ 收敛

证 $\|J\|_\infty = 1$，$\|J\|_1 = 1.2$，$\|J\|_2 = 1.02$，故 $\|J\| > 1$，不满足迭代法收敛的充分条件。但有

$$\det(\lambda I - J) = \begin{vmatrix} \lambda - 0.9 & 0 \\ -0.3 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} = (\lambda - 0.9)(\lambda - 0.8) = 0$$

得 $\lambda_1 = 0.9$，$\lambda_2 = 0.8$，故 $\rho(J) = 0.9 < 1$，迭代法收敛。

27.证明给定线性方程组雅可比迭代发散，而高斯-赛德尔迭代收敛。

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

证 给定线性方程组雅可比迭代矩阵

$$J = I - D^{-1}A = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

特征方程$(\lambda+1)(2\lambda-1)^2=0$，特征值$\lambda_1=-1$，$\lambda_{2,3}=\frac{1}{2}$，谱半径$\rho(J)=1$，故雅可比迭代发散。

高斯-赛德尔迭代矩阵

$$G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & \frac{1}{2} \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

特征方程$\lambda(32\lambda^2-20\lambda+5)=$，特征值$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=\frac{1}{32}(10\pm i\sqrt{60})$，谱半径

$\rho(G)=\sqrt{\left(\frac{10}{32}\right)^2+\left(\frac{60}{32}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{8}<1$，故高斯-赛德尔迭代收敛。

28.证明给定线性方程组雅可比迭代收敛，而高斯-赛德尔迭代发散

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

证 雅可比迭代矩阵

$$J=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

特征方程$3\lambda^3+\lambda+2=0$，特征值$\lambda_1=-0.478$，$\lambda_{2,3}=-0.374\pm i0.868$，其中$i=\sqrt{-1}$为虚数单位。谱半径$\rho(J)=\sqrt{(0.347)^2+(0.868)^2}=0.945<1$，雅可比迭代收敛。

高斯-赛德尔迭代矩阵

$$G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}1 & & \\ -1 & 1 & \\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

特征方程 $\lambda^2(\lambda+1)=0$。特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_{2,3}=0$ 谱半径 $\rho(G)=1$，高斯-赛德尔迭代发散。

29.讨论下列线性方程组用雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代的收敛性。如果都收敛，比较哪种方法收敛的快。

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

证 雅可比迭代矩阵

$$J=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-J)=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \lambda & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2+\frac{11}{12})-\frac{2}{3}=0$$

其中特征值 $\lambda_1=0$， $\lambda_2=-\sqrt{\frac{11}{12}}$， $\lambda_3=\sqrt{\frac{11}{12}}$， 谱半径 $\rho(J)=\sqrt{\frac{11}{12}}<1$， 故雅可比迭代收敛。

系数矩阵
$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}=D-L-U$$

其中

$$D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\qquad -L=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\qquad U=-\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

高斯-赛德尔迭代矩阵

$$G=\left[\begin{bmatrix}3&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&&\\0&0&\\-2&1&0\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}0&0&2\\&0&-1\\&&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{11}{12}\end{bmatrix}$$

其中谱半径$\rho(G)=\dfrac{11}{12}<1$，故高斯-赛德尔迭代收敛。

因为$\rho(G)<\rho(J)$，故高斯-赛德尔迭代收敛比雅可比迭代收敛快。

30.已知线性方程组$Ax=b$，其中$A=\begin{bmatrix}1&2\\0.3&1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$。

（1）讨论用雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代求解时的收敛性。

（2）若有迭代公式$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha(Ax^{(k)}+b)$，试确定一个$\alpha$的取值范围，在此范围内任取一个$\alpha$的值均能使该迭代公式收敛。

解 （1） 用分量形式

$$\begin{cases}x_1+2x_2=1\\0.3x_1+x_2=2\end{cases}$$

雅可比迭代

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-2x_2^{(k)}+1\\x_2^{(k+1)}=-0.3x_1^{(k)}+2\end{cases}$$

雅可比迭代矩阵

$$J=\begin{bmatrix}0&-2\\-0.3&0\end{bmatrix}$$

由特征值计算有

$$\det(\lambda I-J)=\begin{vmatrix}\lambda&2\\0.3&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-0.6)=0$$

解出$\lambda=\pm\sqrt{0.6}$，故谱半径$\rho(J)=\sqrt{0.6}<1$，故雅可比迭代收敛。

高斯-赛德尔迭代

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-2x_2^{(k)}+1\\x_2^{(k+1)}=-0.3x_1^{(k+1)}+2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-2x_2^{(k)}+1\\x_2^{(k+1)}=-0.3(-2x_2^{(k)}+1)+2\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -2x_2^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = 0.6x_2^{(k)} + 2.3 \end{cases}$$

高斯-赛德尔迭代矩阵

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

由特征值计算有

$$\det(\lambda I - G) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & \lambda - 0.6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 0.6) = 0$$

解出 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 0.6$，故谱半径 $\rho(G) = 0.6 < 1$，故高斯-赛德尔迭代收敛。

（2）迭代公式 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(Ax^{(k)} + b)$ 写成 $x^{(k+1)} = (I + \alpha A)x^{(k)} + \alpha b$ 则迭代矩阵

$B = (I + \alpha A)$，其中 A 的特征值 λ_A 可由

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0.3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 0.6 = \lambda^2 - 2\lambda + 0.4 = 0$$

求出，A 的特征值 $\lambda_A = 1 \pm \sqrt{0.6}$，于是 B 的特征值 $\lambda_B = 1 + \alpha(1 \pm \sqrt{0.6})$，为使

$$\rho(B) = |1 + \alpha(1 \pm \sqrt{0.6})| < 1$$

解之

$$-1 < 1 + \alpha(1 \pm \sqrt{0.6}) | < 1$$

$$-2 < \alpha(1 \pm \sqrt{0.6}) | < 0$$

$$-\frac{2}{1 \pm \sqrt{0.6}} < \alpha < 0$$

取式中正号迭代公式收敛的 α 范围是

$$-\frac{2}{1 + \sqrt{0.6}} < \alpha < 0$$

31. 已知线性方程组 $Ax = b$，其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}$，写出其雅可比迭代矩阵、高斯-赛德尔迭代矩阵。

解　方法 **1**：用矩阵运算

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1.5\end{bmatrix}=D-L-U=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

雅可比迭代矩阵

$$J=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ \frac{2}{3} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}$$

高斯-赛德尔迭代矩阵

$$G=(D-L)^{-1}U\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

方法 **2**： 用分量形式

$$\begin{cases}2x_1-x_2=b_1\\ x_1+1.5x_2=b_2\end{cases}$$

雅可比迭代

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{2}x_2^{(k)}+\frac{b_1}{2}\\ x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{1.5}x_1^{(k)}+\frac{1}{1.5}b_2\end{cases}$$

雅可比迭代矩阵

$$J=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}$$

高斯-赛德尔迭代

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{2}x_2^{(k)}+\frac{b_1}{2}\\ x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{1.5}x_1^{(k+1)}+\frac{1}{1.5}b_2\end{cases}$$

将上式代入下式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{b_1}{2} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{1.5}(\frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{b_1}{2}) + \frac{1}{1.5}b_2 \end{cases}$$

整理并简化，有

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{b_1}{2} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_2^{(k)} - \frac{b_1}{3} + \frac{1}{1.5}b_2 \end{cases}$$

高斯-赛德尔迭代矩阵

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

32.对线性方程组

$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ -23x_1 + 11x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

建立收敛的迭代格式

解 将第一个方程的 2 倍加上第二个方程得

$$-x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 7$$

由第一个方程加上第二个方程再加上第三个方程的 10 倍，得

$$-2x_1 - 12x_2 + 19x_3 = -6$$

由此得到与原方程组同解的新方程组

$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 7 \\ -2x_1 - 12x_2 + 19x_3 = -6 \end{cases}$$

显然，新方程组的系数矩阵按行严格对角占优，故可建立收敛的雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代。雅可比迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{3}{11}x_2^{(k)} + \frac{2}{11}x_3^{(k)} + \frac{3}{11} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} + \frac{7}{5} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{2}{19}x_1^{(k)} + \frac{12}{19}x_2^{(k)} - \frac{6}{19} \end{cases}$$

高斯-赛德尔迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{3}{11}x_2^{(k)} + \frac{2}{11}x_3^{(k)} + \frac{3}{11} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} + \frac{7}{5} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{2}{19}x_1^{(k+1)} + \frac{12}{19}x_2^{(k+1)} - \frac{6}{19} \end{cases}$$

33 证明定理：设 J 是雅可比迭代的迭代矩阵。若

$$\| J \|_\infty < 1$$

则高斯-赛德尔迭代收敛，且若记

$$\mu = \max_i \left\{ \sum_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \Big/ \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right) \right\}$$

则

$$\mu \le \| J \|_\infty < 1$$

$$\| x_k - x^* \|_\infty \le \frac{\mu^k}{1-\mu} \| x_1 - x_0 \|_\infty$$

证 先证 $\mu < 1$。令

$$l_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|, \quad u_i = \sum_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

对任意 $1 \le i \le n$ ，有

$$l_i + u_i \le \| J \|_\infty < 1$$

由

$$l_i + u_i - \frac{u_i}{1-l_i} = \frac{1}{1-l_i}[(1+u_i)(1-l_i) - u_i]$$

即

$$= \frac{l_i}{1-l_i}[1-(1+u_i)] \ge 0$$

有

$$l_i + u_i - \frac{u_i}{1-l_i} \ge 0$$

上式两边对 i 取最大值

$$\mu = \max_i \frac{u_i}{1-l_i} \le \max_i (l_i + u_i) = \| J \|_\infty < 1$$

再证收敛性。高斯-赛德尔迭代

$$x^{(k)} = D^{-1}Lx^{(k)} - D^{-1}Ux^{(k-1)} + d_1、$$

线性方程组 $Ax = b$ 的解 x^*，当然也满足

$$x^* = D^{-1}Lx^* - D^{-1}Ux^* + d_1$$

上二式相减，有

$$x^{(k)} - x^* = D^{-1}L(x^{(k)} - x^*) - D^{-1}U(x^{(k-1)} - x^*)$$

用分量表示

$$x_i^{(k)} - x_i^* = \sum_{j=1}^{i-1}\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)(x_j^{(k)} - x_j^*) + \sum_{j=i+1}^{n}\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)(x^{(k-1)} - x^*)$$

于是，取绝对值

$$|x_i^{(k)} - x_i^*| \le l_i \|x^{(k)} - x^*\|_\infty + u_i \|x^{(k-1)} - x^*\|_\infty$$

假定分量中的某个 i_0 达到最大，即

$$|x_{i_0}^{(k)} - x_{i_0}^*| = \max_i |x_i^{(k)} - x_i^*|$$

则有

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \le l_{i_0} \|x^{(k)} - x^*\|_\infty + u_{i_0} \|x^{(k-1)} - x^*\|_\infty$$

从而有

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \le \frac{u_{i_0}}{1 - l_{i_0}} \|x^{(k-1)} - x^*\| \le \mu \|x^{(k-1)} - x^*\|$$

$$\le \cdots \le \mu^{k-1} \|x^{(1)} - x^*\|$$

由于 $0 \le \mu < 1$，因此

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$$

高斯-赛德尔迭代收敛。

最后证误差估计式。由于

$$x^{(k)} - x^{(k-1)} = D^{-1}L(x^{(k)} - x^{(k-1)}) - D^{-1}U(x^{(k-1)} - x^{(k-2)})$$

仿前面证明可得

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty \le \mu^{k-1} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$$

再由

$$x^{(k)}-x^{*}=\sum_{i=k}^{\infty}\left(x^{(i)}-x^{(i+1)}\right)$$

得到

$$\|x^{(k)}-x^{*}\|_{\infty}\le\sum_{i=k}^{\infty}\|x^{(i)}-x^{(i+1)}\|_{\infty}$$

$$\le\sum_{i=k}^{\infty}\mu^{i}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_{\infty}$$

$$\le\frac{\mu^{i}}{1-\mu}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_{\infty}$$

类似地，可以给出如下定理。

定理 3-24 设 J 是雅可比迭代的迭代矩阵，若

$$\|J\|_{1}<1$$

则高斯-赛德尔迭代收敛。

34.对下列线性方程组进行调整，使之对高斯-赛德尔迭代收敛，并取初始向量$x^{(0)}=[0\ \ 0\ \ 0]^{T}$进行迭代。

$$\begin{cases}-x_1+8x_2=7\\-x_1+9x_3=8\\9x_1-x_2-x_3=7\end{cases}$$

解将方程组进行行交换后为

$$\begin{cases}9x_1-x_2-x_3=7\\-x_1+8x_2=7\\-x_1+9x_3=8\end{cases}$$

方程组的系数矩阵是严格对角占优阵，故高斯-赛德尔迭代收敛。

高斯-赛德尔迭代格式

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{x_2^{(k)}}{9}+\dfrac{x_3^{(k)}}{9}+\dfrac{7}{9}\\x_2^{(k+1)}=\dfrac{x_1^{(k+1)}}{8}+\dfrac{7}{8}\\x_3^{(k+1)}=\dfrac{x_1^{(k+1)}}{9}+\dfrac{8}{9}\end{cases}$$

设$x^{(0)}=[0\ \ 0\ \ 0]^{T}$，进行高斯-赛德尔迭代，取$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_{\infty}\le 10^{-3}$，计算结果如表 3-11 所示。

表 3-11 计算 结 果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_{\infty}$
0	0. 000 0	0. 000 0	0. 000 0	–
1	0. 777 8	0. 972 2	0. 975 3	0. 975 3

2	0. 994 2	0. 999 3	0. 999 4	0. 216 4
3	0. 999 9	0. 999 9	0. 999 9	0. 005 7
4	1. 000 0	1. 000 0	1. 000 0	0. 000 1

取方程组的解$x^* \approx x^{(4)}=[1.000\,0\quad 1.000\,0\quad 1.000\,0]^T$

35. 已知线性方程组

$$\begin{cases} 11x_1-5x_2-33x_3=1 \\ -22x_1+11x_2+x_3=0 \\ x_1-4x_2+2x_3=1 \end{cases}$$

用两种不同的方法判别其迭代的收敛性。

解 (1)系数矩阵法

线性方程组的系数矩阵$\begin{bmatrix} 11 & -5 & -33 \\ -22 & 11 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$，进行行交换后$\begin{bmatrix} -22 & 11 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 11 & -5 & -33 \end{bmatrix}$

交换后的系数矩阵为严格对角占优阵，根据定理其雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代均收敛。

(2)迭代矩阵法

对方程组进行行交换 $\begin{cases} -22x_1+11x_2+x_3=0 \\ x_1-4x_2+2x_3=1 \\ 11x_1-5x_2-33x_3=1 \end{cases}$,得雅可比迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{11}{22}x_2^{(k)}+\frac{1}{22}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_1^{(k)}+\frac{1}{2}x_3^{(k)}-\frac{1}{4} \\ x_3^{(k+1)}=\frac{11}{33}x_1^{(k+1)}-\frac{5}{33}x_2^{(k)}-\frac{1}{33} \end{cases}$$

有雅可比迭代矩阵

$$J=\begin{bmatrix} 0 & \frac{11}{22} & \frac{1}{22} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{11}{33} & -\frac{5}{33} & 0 \end{bmatrix}$$

由于$\|J\|_\infty<1$，所以雅可比迭代收敛。

根据定理，若雅可比迭代收敛则其相应的高斯-赛德尔迭代也收敛。因此，雅可比迭代与高斯-赛德尔迭代均收敛。

36.设有线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-12 \\ -x_1+4x_2+2x_3=20 \\ 2x_1-3x_2+10x_3=3 \end{cases}$$

(1) 证明用雅可比迭代法与高斯-赛德尔迭代法解此方程组均收敛。

(2) 取初始向量$x^{(0)}=[-3\ \ 2\ \ 1]^T$，分别用雅可比迭代法和高斯-赛德尔迭代法求解，

要求满足$\max_i|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|$时迭代终止。

解　(1)方程组的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

为严格对角占优阵。根据定理系数矩阵为严格对角占优阵的方程组，其雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代均收敛。

(2) 雅可比迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.4x_2^{(k)}-0.2x_3^{(k)}-2.4 \\ x_2^{(k+1)} = 0.25x_1^{(k)}-0.5x_3^{(k)}+5 \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_2^{(k)}+0.3x_2^{(k)}+0.3 \end{cases}$$

已知初始值为$x_1^{(0)}=-3$，$x_2^{(0)}=1$，$x_3^{(0)}=1$，计算结果如表 3-12 所示。

表 3-12　计算 结 果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	- 3. 000 0	1.000 0	1. 000 0
1	- 3. 000 0	3. 750 0	1. 200 0
2	-4. 140 0	3, 650 0	2. 025 0
3	- 4. 062 5	2. 952 5	2. 223 0
4	- 4. 025 6	2. 872 9	1.998 3
5	- 3. 948 8	2. 994 5	1. 967 0
6	-3.991 2	3. 029 3	1. 988 1
7	- 4. 009 3	3. 008 2	2. 007 0
8	- 4. 004 7	2. 994 2	2. 004 3
9	- 3. 998 5	2. 996 7	1. 999 2
10	- 3. 998 5	3. 000 8	1. 998 7
11	- 4. 000 1	3. 001 0	1. 999 9
12	- 4. 000 4	3. 000 0	2. 000 3

高斯-赛德尔迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.4x_2^{(k)}-0.2x_3^{(k)}-2.4 \\ x_2^{(k+1)} = 0.25x_1^{(k+1)}-0.5x_3^{(k)}+5 \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_2^{(k+1)}+0.3x_2^{(k+1)}+0.3 \end{cases}$$

已知初始值为$x_1^{(0)}=-3$，$x_2^{(0)}=1$，$x_3^{(0)}=1$，计算结果如表 3-13 所示。

表 3-13　计算 结 果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$

0	- 3. 000 0	1. 000 0	1. 000 0
1	- 3. 000 0	3. 750 0	2. 025 0
2	- 4. 305 0	2. 911 3	2. 034 4
3	- 3. 971 4	2. 990 0	1. 991 3
4	- 3. 994 3	3. 005 6	2. 000 5
5	- 4. 00z 3	2. 999 2	2. 000 2
6	- 3. 999 7	2. 999 975	1. 999 9
7	- 3. 999 97	3. 000 06	2. 000 0

37. 方程组 Ax =b，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}$,x,b∈ R^3,

(1)分别写出雅可比迭代法和高斯-赛德尔迭代法的计算公式(分量形式)。

(2)分别写出雅可比迭代法的迭代矩阵和高斯-赛德尔迭代法的迭代矩阵的谱半径，并用它们判别这两种迭代方法的收敛性。

解 (1)雅可比迭代法的计算公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_2^{(k)} + b_1 \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_1^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k)} + b_2 \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_2^{(k)} + b_3 \end{cases}$$

高斯-赛德尔迭代法的计算公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_2^{(k)} + b_1 \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{3}x_3^{(k)} + b_2 \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_2^{(k+1)} + b_3 \end{cases}$$

(2)雅可比迭代矩阵

$$J=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-J|=\begin{bmatrix}\lambda & -\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & \lambda & -\frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & \lambda\end{bmatrix}=\lambda^3-\frac{2}{9}\lambda = 0$$

λ_1=0，$\lambda_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}<1$，雅可比迭代收敛。

用高斯-赛德尔迭代法

$$D-L=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&-\frac{1}{3}&1\end{bmatrix},(D-L)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{3}&1&0\\\frac{1}{9}&\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}$$

$$G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{3}&1&0\\\frac{1}{9}&\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{27}&\frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-G|=\begin{bmatrix}\lambda&-\frac{1}{3}&0\\0&\lambda-\frac{1}{9}&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{27}&\lambda-\frac{1}{9}\end{bmatrix}=\lambda\left(\lambda-\frac{1}{9}\right)^2-\frac{\lambda}{81}=\lambda^2\left(\lambda-\frac{2}{9}\right)=0$$

$\lambda_{1,2}=0,\lambda_3=\frac{2}{9},\rho(G)=\frac{2}{9}<1$,高斯-赛德尔迭代收敛。

高斯-赛德尔迭代矩阵 G 也可由计算公式导出

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{3}x_2^{(k)}+b_1\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{3}x_1^{(k+1)}+\frac{1}{3}x_3^{(k)}+b_2=\frac{1}{9}x_2^{(k)}+\frac{1}{3}x_3^{(k)}+\frac{b_1}{3}+b_2\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{3}x_2^{(k+1)}+b_3=\frac{1}{27}x_2^{(k)}+\frac{1}{9}x_3^{(k)}+\frac{b_1}{9}+\frac{b_2}{3}+b_3\end{cases}$$

$$G=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{9}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{27}&\frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

38. 设 n 阶矩阵 A 对称正定，有迭代格式

$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\tau(Ax^{(k)}+b)$,k=0,1,2,...,n

为使收敛到方程组 Ax =b 的解x^*，讨论参数τ的取值范围。

解迭代公式改写成

$x^{(k+1)}=(I-\tau A)x^{(k)}+\tau b$

因为 A 对称正定，故其特征值全为正，不妨设$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant0$，则迭代矩阵 B =I-τA 的特征值为 $1-\tau\lambda_i$，该格式要对任意初始向量都收敛，则应

$$|1-\tau\lambda_i|<1$$

解出参数得

$$0<\tau<\frac{2}{\lambda_i}, i=1,2,\ldots,n$$

公共解为

$$0<\tau<\frac{2}{\lambda_i}$$

这就是所求参数τ的取值范围。由于

$$\lambda_1 \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

故实用可取

$$\tau < \frac{2}{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

3.3 同步练习题及解答

1.用高斯消去法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

解方程组的增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

第 1 次消元，确定乘数$m_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{2}{1}=2, m_{31}=\frac{a_{31}}{a_{11}}=\frac{-1}{1}=-1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

第 2 次消元，确定乘数$m_{32}=\frac{a_{32}}{a_{22}}=\frac{-1}{-1}=1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

回代

$$\begin{cases} x_3 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

2.用列主元消去法解线性方程组并求系数行列式

$$\begin{bmatrix}16 & 4 & 8\\ 4 & 5 & -4\\ 8 & -4 & 22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\ 6\\ -16\end{bmatrix}$$

解线性方程组

$$\begin{cases}16x_1+4x_2+8x_3=-8\\ 4x_1+5x_2-4x_3=6\\ 8x_1-4x_2+22x_3=-16\end{cases}$$ 因为第 1 行第 1 列元素的绝对值最大，即是主元。

第 1 次消元，确定乘数$m_{21}=\frac{1}{4}, m_{31}=\frac{1}{2}$，则有

$$\begin{matrix}(2)-m_{21}\times(1)\\ (3)-m_{31}\times(1)\end{matrix}\begin{cases}16x_1+4x_2+8x_3=-8 & (1)\\ 0+4x_2-6x_3=8 & (2)\\ 0-6x_2+18x_3=-12 & (3)\end{cases}$$

选主元，交换第 2 行和第 3 行，有

$$\begin{cases}16x_1+4x_2+8x_3=-8\\ 0-6x_2+18x_3=-12\\ 0+4x_2-6x_3=8\end{cases}$$

第 2 次消元，确定乘数$m_{32}=-\frac{2}{3}$，有

$$(3)-m_{32}\times(1)\begin{cases}16x_1+4x_2+8x_3=-8 & (1)\\ 0-6x_2+18x_3=-12 & (2)\\ 0+0+6x_3=0 & (3)\end{cases}$$

回代

$$\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=2\\ 3=0\end{cases}$$

系数行列式 detA =(- 1)x16 x (- 6)x6 =576

3. 用高斯-约当法求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

解

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{消元得}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{消元得}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{消元得}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$所以逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4.用矩阵的直接三角分解法解下列方程组并计算系数行列式。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

解

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}=LU=\begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix}$$

紧凑格式为

(1)	1	(2)	2	(3)	3	(14)	14
(2)	2	(5)	1	(2)	-4	(18)	10
(3)	3	(1)	-5	(5)	24	(20)	72

所以

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & -4 \\ & & -24 \end{bmatrix}\quad y=\begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ -72 \end{bmatrix}$$

由 Ux =y，可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & -4 \\ & & -24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ -72 \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

系数行列式 $\det A = 1\times 1\times(-24)=-24$

5. 用追赶法解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$l_1=b_1=2 \quad u_1=\frac{c_1}{l_1}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$l_2=b_2-a_2u_1=2-(-1)\times(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2} \qquad u_2=\frac{c_2}{l_2}=\frac{-1}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}$$

$$l_3=b_3-a_3u_3=2-(-1)\times(-\frac{2}{3})=\frac{4}{3} \quad u_3=\frac{c_3}{l_3}=\frac{-1}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}$$

$$l_4=b_4-a_4u_3=2-(-1)\times(-\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_1 & & & \\ a_2 & l_2 & & \\ & a_3 & l_3 & \\ & & a_4 & l_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_1 & & \\ & 1 & u_2 & \\ & & 1 & u_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{3}{2} & & \\ & -1 & \frac{4}{3} & \\ & & -1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{2}{3} & \\ & & 1 & -\frac{4}{5} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad Ly=f \text{ 即}\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{3}{2} & & \\ & -1 & \frac{4}{3} & \\ & & -1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}\text{所以}$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{f_1}{l_1} = \dfrac{1}{2} \\ y_2 = \dfrac{f_2 - a_2 y_1}{l_2} = \dfrac{\frac{1}{2} - (-1) \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3} \\ y_3 = \dfrac{f_3 - a_3 y_2}{l_3} = \dfrac{\frac{1}{3} - (-1) \times \frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4} \\ y_4 = \dfrac{f_4 - a_4 y_3}{l_4} = \dfrac{\frac{1}{4} - (-1) \times \frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x_4 = y_4 = \dfrac{4}{5} \\ x_3 = y_3 - u_3 x_4 = \dfrac{3}{4} - (-\dfrac{3}{4}) \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{27}{20} \\ x_2 = y_2 - u_2 x_3 = \dfrac{2}{3} - (-\dfrac{2}{3}) \times \dfrac{27}{20} = \dfrac{47}{30} \\ x_1 = y_1 - u_1 x_2 = \dfrac{1}{2} - (-\dfrac{1}{2}) \times \dfrac{47}{30} = \dfrac{77}{60} \end{cases}$$

6.用平方根法和杜里特尔（紧凑格式）分解求解下列方程组并计算系数行列式

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

解方程系数矩阵为对称正定，用平方根法计算公式，可得

$$l_{11} = \sqrt{a} = 2, l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{1}{2} = 0.5, l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = -\frac{1}{2} = -0.5, l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}} = 0$$

$$l_{21} = (a_{22} - l_{21}^2)^{1/2} = (3 - 0.25)^{1/2} = \sqrt{2.75} \approx 1.658321$$

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31} l_{21}) / l_{22} = -\frac{0.75}{\sqrt{2.75}} = -0.452267$$

$$l_{42} = (a_{42} - l_{41} l_{21}) / l_{22} = 0$$

$$l_{33} = (a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2)^{1/2} = (5 - 0.25 - \frac{(0.75)^2}{2.75})^{1/2} = 2.132007$$

$$l_{43} = (a_{42} - l_{41} l_{31} - l_{42} l_{32}) / l_{33} = -\frac{2}{2.132007} = 0.938083$$

$$l_{44} = (a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2)^{1/2} = [(4 - 0.938083^2)]^{1/2} = 1.766352$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{7}{2} = 3.5 \\ y_2 = \dfrac{1}{1.658321}(8 - 0.5 \times 3.5) = 3.768083 \\ y_3 = -0.255841 \\ y_4 = 3.5327046 \end{cases}$$

对增广矩阵进行杜里特尔(紧凑格式)分解

(4)	4	(1)	1	(-1)	-1	(0)	0	(7)	7
(1)	$^1/_4$	(3)	$^{11}/_4$	(-1)	$-^3/_4$	(0)	0	(8)	$^{25}/_4$
(-1)	$-^1/_4$	(-1)	$-^3/_{11}$	(5)	$^{50}/_{11}$	(2)	2	(4)	$-^6/_{11}$
0	0	(0)	0	(2)	$^{11}/_{25}$	(4)	$^{78}/_{25}$	(6)	$^{156}/_{25}$

解上三角方程组 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ \dfrac{11}{4}x_2 - \dfrac{3}{4}x_3 = \dfrac{25}{4} \\ \dfrac{50}{11}x_3 + 2x_4 = -\dfrac{6}{11} \\ \dfrac{78}{25}x_4 = \dfrac{156}{25} \end{cases}$ 回代求解得 $\begin{cases} X_4 = 2 \\ X_3 = -1 \\ X_2 = 2 \\ X_1 = 1 \end{cases}$

系数行列式 $\det A = 4 \times \dfrac{11}{4} \times \dfrac{50}{11} \times \dfrac{78}{25} = 156$

7. 已知向量 $x = (3, -1, 5, 8)^T$，矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，求向量 x 和矩阵 A 的三种常用范数。

解向量 x 的范数

$$\|x\|_1 = |3| + |-1| + |5| + |8| = 17$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|3|, |-1|, |5|, |8|\} = 8$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2 + 8^2} = 3\sqrt{11}$$

矩阵 A 的范数

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{5, 6, 4\} = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{2, 9, 4\} = 9$$

又由于 $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$，而

$$A^{T}A=\begin{bmatrix}0&-3&2\\1&3&2\\-1&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\-3&3&3\\2&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&27&0\\2&0&2\end{bmatrix}$$

$(\lambda I-A)=\lambda(\lambda-4)(\lambda-27)$,特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=27$

$$\|A\|_2=\sqrt{\max(0,4,27)}=\sqrt{27}$$

8. 用雅可比迭代法、高斯-赛德尔迭代法解线性方程组

$$\begin{cases}8x_1-3x_2+2x_3=20\\4x_1+11x_2-x_3=33\\6x_1+3x_2+12x_3=36\end{cases}$$

解从三个方程式分离出 x_1、x_2、x_3

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{8}(3x_2-2x_3+20)\\x_2=\frac{1}{11}(-4x_1+x_3+33)\\x_3=\frac{1}{4}(-2x_1-x_2+36)\end{cases}$$

据此建立雅可比迭代格式

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{8}(3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}+20)\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{11}(-4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}+33)\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-2x_1^{(k)}-x_2^{(k)}+36)\end{cases}$$

设迭代初值 $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0$，取 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|\le 10^{-3}$,计算结果如表 3-14 所示。

表 3-14 计算结果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	2. 500 0	3. 000 0	3. 000 0
2	2. 875 0	2. 363 6	1. 000 0
3	3. 136 4	2. 045 5	0. 971 6

建立高斯-赛德尔迭代格式

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{8}(3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}+20)\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{11}(-4x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}+33)\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}+36)\end{cases}$$

设迭代初值 $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0$，取 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|\le 10^{-3}$,计算结果如表 3-15 所示。

表 3-15 计算结果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	2. 500 0	3. 090 9	1. 2273
2	2. 9772	2. 0289	1. 0043
3	3. 0098	1. 9968	0. 9959

与精确解 $x^* = (3,2,1)^T$ 比较，本题高斯-赛德尔迭代比雅可比迭代精度高，或者说收敛快。

9. 给定线性方程组，证明雅可比迭代发散，而高斯-赛德尔迭代收敛

$$\begin{cases} x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 = 1 \\ 0.4x_1 + x_2 + 0.8x_3 = 2 \\ 0.4x_1 + 0.8x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

证雅可比迭代矩阵 $J = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & -0.8 \\ -0.4 & -0.8 & 0 \end{bmatrix}$

其中 **D =diag[1，1，1]**

$$\det(\lambda I - J) = \begin{vmatrix} \lambda & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & \lambda & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 0.8)(\lambda^2 + 0.8\lambda - 0.32) = 0$$

故 $\lambda_1 = 0.8, \lambda_{2,3} = -0.4 \pm \sqrt{0.48}, \rho(J) = 0.4 + \sqrt{0.48} = 1.0928 > 1$，故用雅可比迭代发散。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} = D - L - U$$

其中 **D =diag[1，1，1]**

$$-L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}, U = -\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

高斯-赛德尔迭代矩阵

$$G = (D - L)^{-1}U = [\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & \\ 0.4 & 0 & \\ 0.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ & 0 & -0.8 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.4 & 1 & 0 \\ -0.08 & -0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.16 & -0.64 \\ 0 & 0.032 & 0.672 \end{bmatrix}$$

谱半径 $\rho(G) = \|G\|_\infty = 0.8 < 1$，故用高斯-赛德尔迭代收敛。

10. 已知线性方程组 Ax =b，其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 有迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(Ax^{(k)} + b)$$

试问：（1）取什么范围的 ω 值能使迭代收敛？

(2) ω 取什么值使该迭代收敛最快？

解 （1）迭代公式改写成 $x^{(k+1)} = (I + \omega A)x^{(k)} + \omega b$

则迭代矩阵 $B = (I + \omega A) = \begin{bmatrix} 1+2\omega & \omega \\ \omega & 1+2\omega \end{bmatrix}$

其特征方程 $|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda-(1+2\omega) & -\omega \\ -\omega & \lambda-(1+2\omega) \end{vmatrix} = 0$

即
$$[\lambda-(1+2\omega)]^2 - \omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2(1+2\omega)\lambda + (1+2\omega)^2 - \omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2(1+2\omega)\lambda + (1+4\omega+4\omega^2-\omega^2) = 0$$

$$[\lambda-(1+\omega)][\lambda-(1+3\omega)] = 0$$

解之，得 $\lambda_1 = 1+\omega$, $\lambda_2 = 1+3\omega$, 于是有

$$\min\rho(B) = \max[|1+3\omega|, |1+\omega|] = \begin{cases} 1+3\omega, \omega \le 0 \\ 1+\omega, 0 \le \omega < -\frac{1}{2} \\ 3\omega+1, \omega \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

进而可知，当且仅当 $-\frac{2}{3} < \omega < 0$ 时，$\rho(B) < 1$，可使迭代公式收敛。

(2)使迭代公式收敛最快的 ω 应满足

$$\min\rho(B) = \min\{\max[|1+3\omega|, |1+\omega|]\}$$

对此 ω 应满足 $\begin{cases} -\frac{1}{2} < \omega < 0 \\ 0 = |1+3\omega| < |1+\omega| \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -\frac{1}{2} < \omega < 0 \\ 0 = |1+\omega| < |1+3\omega| \end{cases}$

因此，只需考虑在 $-\frac{1}{2} < \omega < 0$ 中，使 $|1+3\omega| = |1+\omega|$ 的 ω 值，即解

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < \omega < 0 \\ |1+\omega| = |1+3\omega| \end{cases}$$

由 $\begin{cases} -\frac{1}{2} < \omega < 0 \\ 1+\omega = 1+3\omega \end{cases}$

可知 ω 无实数解，由 $\begin{cases} -\frac{1}{2} < \omega < -\frac{1}{4} \\ 1+\omega = -(1+3\omega) \end{cases}$

得
$$\omega = -\frac{1}{2}$$
可知取$\omega = -\frac{1}{2}$时，$\rho(B)$ 达到最小值，收敛最快。

下面考虑和这题类似的另一道题(见教材例 3-29)。

已知线性方程组 Ax =b，其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$有迭代公式
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(Ax^{(k)} - b)$$
问： (1)取什么范围的ω值能使迭代收敛？

(2)ω 取什么值使该迭代收敛最快？

解(1)利用收敛基本定理$\rho(B) < 1$ 来解此问题。虽然也可用其他充分条件来确定ω ,但确定出的ω 不一定是必要的。将迭代公式改写成 $x^{(k+1)} = (I+\omega A)x^{(k)} - \omega b$

则迭代矩阵$B = (I + \omega A)$,其中 B 的特征值$\lambda_B = I + \omega\lambda_A$,$\lambda_A$为 A 的特征值。由
$$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$
求出 A 的特征值$\lambda_A = 4, 1$, 于是 B 的特征值$\lambda_B = 1 + \omega\lambda_A = 1 + 4\omega$,

即要求$\rho(B) < 1$,也即$\rho(B) = |1 + \omega\lambda_A| < 1$，解之
$$-1 < 1 + \omega\lambda_A < 1 \qquad\qquad -\frac{2}{\lambda_A} < \omega < 0$$
可知应有
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < \omega < 0 \\ -\frac{2}{1} < \omega < 0 \end{cases}$$
即取 $-\frac{1}{2} < \omega < 0$ 可使迭代公式收敛。

（2）使迭代公式收敛最快的 应满足
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < \omega < 0 \\ \min(B) = \min\{[1+4\omega], |1+\omega|\} \end{cases}$$
对此ω 应满足

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}<\omega<0 \\ 0=|1+4\omega|<|1+\omega| \end{cases} \text{或} \begin{cases} -\frac{1}{2}<\omega<0 \\ 0=|1+\omega|<|1+4\omega| \end{cases}$$

因此，只需考虑在 $-\frac{1}{2}<\omega<0$ 中，使$|1+4\omega|=|1+\omega|$的ω值,即解

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}<\omega<0 \\ |1+\omega|=|1+4\omega| \end{cases}$$

由

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}<\omega<0 \\ 1+\omega=1+4\omega \end{cases}$$

可知 w 无实数解，由

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}<\omega<-\frac{1}{4} \\ 1+\omega=(1+4\omega) \end{cases}$$

得

$$\omega=-\frac{2}{5}$$

11.已知线性方程组

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(1)用两种充分条件判断其雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代均收敛。

(2)取初值 $x^{(0)}=[0,\quad 0,\quad 0,\quad 0]^T$ ，用雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代求解，要求迭代到

$$\frac{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|_\infty}{\| x^{(k+1)} \|_\infty} < 10^{-3}$$

解（1）用系数矩阵判断：由于系数矩阵为严格对角占优矩阵，故雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代均收敛。

用迭代矩阵判断：雅可比迭代矩阵

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

由于||J||<1，雅可比迭代收敛，相应的高斯-赛德尔迭代也收敛。

(2)雅可比迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10} x_2^{(k)} - \frac{1}{5} x_3^{(k)} + \frac{3}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11} x_2^{(k)} + \frac{1}{11} x_3^{(k)} - \frac{3}{11} x_4^{(k)} + \frac{25}{11} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5} x_2^{(k)} + \frac{1}{10} x_3^{(k)} + \frac{1}{10} x_4^{(k)} - \frac{11}{10} \\ x_4^{(k+1)} = -\frac{3}{8} x_2^{(k)} + \frac{1}{8} x_3^{(k)} + \frac{15}{8} \end{cases}$$

取初始向量 $x^{(0)} = [0, \quad 0, \quad 0, \quad 0]^T$，计算结果如表 3-16 所示。

表 3-16　计算结果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
1	**0.600**	**2.2727**	**-1.1000**	**1.8750**
2	**1.0473**	**1.7159**	**-0.8052**	**0.8852**
3	**0.9326**	**2.0533**	**-1.0493**	**1.1309**
4	**1.0152**	**1.9537**	**-0.9681**	**0.9739**
5	**0.9890**	**2.0114**	**-1.0103**	**1.0214**
6	**1.0032**	**1.9922**	**-0.9945**	**0.9944**
7	**0.9981**	**2.0023**	**-1.0020**	**1.0036**
8	**1.0006**	**1.9987**	**-0.9990**	**0.9989**

9	**0.9997**	**2.0004**	**-1.0004**	**1.0006**
10	**1.0001**	**1.9998**	**-0.9998**	**0.9998**

显然，$\dfrac{\| x^{(10)} - x^{(9)} \|_\infty}{\| x^{(10)} \|_\infty} = \dfrac{8.0 \times 10^{-4}}{1.9998} < 10^{-3}$ ，迭代 10 次后所得近似解满足精度要求。

高斯-赛德尔迭代公式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{10} x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5} x_3^{(k)} + \dfrac{3}{5} \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11} x_2^{(k+1)} + \dfrac{1}{11} x_3^{(k)} - \dfrac{3}{11} x_4^{(k)} + \dfrac{25}{11} \\
x_3^{(k+1)} = -\dfrac{1}{5} x_2^{(k+1)} + \dfrac{1}{10} x_3^{(k+1)} + \dfrac{1}{10} x_4^{(k)} - \dfrac{11}{10} \\
x_4^{(k+1)} = -\dfrac{3}{8} x_2^{(k+1)} + \dfrac{1}{8} x_3^{(k+1)} + \dfrac{15}{8}
\end{cases}
$$

取初始向量 $x^{(0)} = [0,\ 0,\ 0,\ 0]^T$ ，计算结果如表 3-17 所示。

表 3-17 计算结果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
1	0.6000	2.3272	-0.9873	0.8789
2	1.0300	2.0370	-1.0140	0.9844
3	1.0065	2.0036	-1.0025	0.9983
4	1.0009	2.0003	-1.0003	0.9999
5	1.0001	2.0000	-1.0000	1.0000

显然，$\dfrac{\| x^{(5)} - x^{(4)} \|_\infty}{\| x^{(5)} \|_\infty} = \dfrac{8.0 \times 10^{-4}}{2.0000} < 0.4 \times 10^{-3}$ ，迭代 5 次后的近似解已满足精度要求。

第4章　插　值　法

4.1 内容提要

一、引言

1.代数插值

设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上给出相异点 $x_i (i = 0,1,\cdots,n)$ 及其函数值 $y_i = f(x_i)$ 选择一个函数 $\varphi(x)$ ，满足

$$\varphi(x_i) = y_i, i = 0,1,\cdots,n$$

作为函数 $y = f(x)$ 的近似表达式，称这样的问题为插值问题，满足关系式 $\varphi(x)$ 称为 $f(x)$ 的插值函数， $f(x)$ 称为被插值函数，点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为插值节点，区间 $[a, b]$ 称为插值区间。

若插值函数 $\varphi(x)$ 为代数多项式 $P(x)$ 就称为其为代数插值。

2.代数插值的唯一性

定理 **4-1 n+1** 个不同节点满足插值条件

$$P(x) = y_i, i = 0,1,\cdots,n$$

的 n 次插值多项式 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是唯一的。

推论 **4-1** 对于次数不大于 **n** 的多项式 $f(x)$，其 **n** 次插值多项式就是其本身。

二、拉格朗日插值

1.线性插值和抛物线插值

线性插值是已知函数 $y = f(x)$ 的节点 x_0, x_1 的函数值 y_0, y_1，求作一次式 $L(x) = a_0 + a_1 x$

使它满足 $L(x_0) = y_0, L(x_1) = y_1$

抛物线插值是已知函数 $y = f(x)$ 在节点 x_0， x_1， x_2 的函数值 y_0， y_1， y_2 求作二次式

$L(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$，使之满足 $L(x_i) = y_i$， $i = 0,1,2$ 。

2.拉格朗日插值多项式

定理 4-2 若 $l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$ ，则

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

定理 4-3 n 次拉格朗日插值多项式

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k$$

其中 $l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$ 。

3.插值余项和误差估计

定理 4-4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有 *n+1* 阶导数，则 *n* 次拉格朗日插值多项式 *L（x）* 对任意

$x\in[a,b]$，有插值余项

$$R(x)= f(x)-L(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

其中 $\omega(\mathbf{x})=\prod_{i=0}^{n}\mathbf{x}-\mathbf{x}_i$， $a<\xi<b$，且依赖于 x。

推论 4-2 设函数 $f(x)$ 在 $[x_0,x_1]$ 上二阶导数连续，并记 $M_2=\max\limits_{x_0\le x\le x_1}|f''(x)|$，则 $f(x)$ 过点 $(x_0,f(x_0))$，$(x_1,f(x_1))$ 的线性插值余项 $R(x)$ 有上界估计式

$$|R(x)|\le\frac{M_2}{8}(x-x_0)^2,x\in[x_0,x_1]$$

三、逐次线性插值

逐次线性插值是将一个高次插值归结为线性插值的多次重复，逐步提高次数的插值方法。

1.埃特金插值

埃特金插值德计算顺序

x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	P_{01}				
x_2	$f(x_2)$	P_{02}	P_{012}			
x_3	$f(x_3)$	P_{03}	P_{013}	P_{0123}		
x_4	$f(x_4)$	P_{04}	P_{014}	P_{0124}	P_{01234}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

2.内维尔插值

内维尔插值的计算顺序

x_0	$f(x_0)$	
x_1	$f(x_1)$	P_{01}

x_2	$f(x_2)$	P_{12}	P_{012}			
x_3	$f(x_3)$	P_{23}	P_{123}	P_{0123}		
x_4	$f(x_4)$	P_{34}	P_{234}	P_{1234}	P_{01234}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

四、牛顿插值

1.插商及其性质

设函数 $f(x)$ 在 n+1 节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的值 $f(x_0)$, $f(x_1), \cdots$ $f(x_n)$ 为已知，给出差商（或称均差）定义。

定义 4-1 记 $f[x_i] = f(x_i)(i = 0,1,\cdots,n)$ 为零阶差商，零阶差商

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}$$

称为函数 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_j 的一阶差商。一阶差商的差商

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

称为函数 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_j, x_k 的二阶差商。一般地，$k-1$ 阶差商的差商

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_m] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_m] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_m - x_0}$$

称为函数 $f(x)$ 关于节点 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_m$ 的 k 阶差商。

①n 阶差商 $f[x_0, x_1,, \cdots x_n]$ 是函数值 $f(x_0)$, $f(x_1), \cdots, f(x_n)$ 的线性组合，即

$$f[x_0, x_1,, \cdots x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$$

其中

$$\omega'(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq}}^{n} (x_k - x_i)$$

②差商的对称性。节点的顺序可任意改变，即

$$f[x, x_1] = f[x_1, x_0]$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_0, x_1, x_2] = \cdots$$

③若 $f[x,x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 是 x 的 m 次多项式，则 $f[x,x_0,x_1,\cdots x_k,x_{k+1}]$ 是 x 的 m-1 次多项式

④若 $f(x)$ 是 n 次多项式，则 $f[x,x_0,x_1,,\cdots x_n]$ 恒为零。

2.牛顿插值公式

牛顿插值多项式和插值余项

$$N(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$

$$+f[x_0,x_1,,\cdots x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$R(x)=f[x_0,x_1,,\cdots x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

3.差商和导数

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^n(\xi)}{n!}$$

其中 $\xi\in[x_0,x_1,\cdots,x_n]$。

五、等距节点插值

1.差分

设相邻节点的距离 h 是常数，并称之为步长，则有 $x_k=x_0+kh,k=0,1,\cdots,n$。被插值函数 $y=f(x)$ 在插值节点上的值 $f(x_k)=y_k,k=0,1,\cdots,n$。

定理 4-2 将 $\Delta y_k=y_{k+1}-y_k,\nabla^n y_k=\nabla^{n-1}y_k-\nabla^{n-1}y_{k-1}$ 分别称为 $f(x)$ 在节点 x_k 的一阶向前差分和一阶向后差分，由此递推定义 n 阶向前差分和 n 阶向后差分为

$$\Delta^n y_k=\Delta^{n-1}y_{k+1}-\Delta^{n-1}y_k,\nabla^n y_k=\Delta^{n-1}y_k-\Delta^{n-1}y_{k-1}$$

并规定零阶差分为 $\Delta^{\cdot}y_k=\nabla^{\cdot}y_k=y_k$

差分有以下性质：

①差分用函数值表示为

$$\Delta^n y_k=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i y_{k+n-i},\nabla^{n}y_k=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i y_{k+i-n}$$

其中 $C_n^i=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$ 为二项式展开系数。

②函数值用差分表示为

$$y_{k+n}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\Delta^i y_k,y_{k-n}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i\nabla^i y_k$$

③差分和差商及导数

$$\Delta^n y_0 = n!h^n f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = h^n f^{(n)}(\xi)$$

$$\nabla^n y_0 = n!h^n f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = h^n f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_n]$$

2.等距节点牛顿插值公式

牛顿前插多项式及余项

$$R(x_0+th) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

$$R(x_0+th) = C_t^{n+1} h^{n+1} f^{n+1}(\xi)$$

牛顿后插多项式及余项

$$R(x_0+th) = y_0 + \frac{t}{1!}\nabla y_0 + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t+1)\cdots(t-n+1)}{n!}\nabla^n y_0$$

$$\mathbf{R(x_0+th) = \frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \xi \in [x_0, x_n]}$$

六、反插值

已知 $\mathbf{f(x_i, f(x_i)), i = 0,1,\cdots,n,}$，求插值点 x 处 $f(x)$ 的近似值是插值问题，设求出 $f(x)$ 的多项式 $P(x)$，当要求出 $f(x)$ 等于某一个数值时的 x 时，需对方程 $P(x) = 0$ 求解，同时要对求出的解根据给定的范围进行取舍。若将 x 作为函数值， $f(x) = y$ 作为自变量，求出插值多项式 $Q(y)$，再根据给定的 y 求 $Q(y)$，这类问题称为反插值。求函数值比解方程容易得多，所以反插值的实用性是明显的，不过反插值时要求 $y = f(x)$ 的反函数存在。当取 **y=0** 时，求 $Q(y)$ 的值 $Q(0)$，即是求 $f(x)$ 的零点的近似值。

七、埃尔米特插值

1.埃尔米特插值多项式

已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{x_i}$ 上的函数值 $\mathbf{f(x_i)}$ 及导数值 $f'(x_i), i = 0,1\cdots,n$，构造次数不超过 **2n+1** 的埃尔米特插值多项式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n}[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{x_j - x_k}]l_j^{\,2}(x) f(x_j) + \sum_{j=0}^{n}(x-x_i) l_j^2(x) f'(x_j)$$

2.埃尔米特插值余项

定义 **4-5** 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 $2n+2$ 阶导数，则埃尔米特插值余项

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega^2(x)$$

其中$\xi \in [a,b]$，且依赖于$x, \omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

3.牛顿型埃尔米特插值多项式

构造牛顿型埃尔米特插值多项式时，首先应建立包含有重节点的差商表，求出差商值，然后构造牛顿插值多项式的方法求出埃尔米特插值多项式。

4.带不完全导数的埃尔米特插值多项式

当给出的函数值的个数和导数值的个数不等时，可以拉格朗日插值或牛顿插值为基础，再用待定系数法确定满足插值条件的埃尔米特插值多项式。

八、分段插值法

1.高次插值的龙格现象

增加插值节点，提高插值多项式的次数，可以使插值函数在更多的点与所逼近的函数取相同的值，但会使插值函数在两端发生激烈的振荡，这就是高次插值的龙格现象。

2.分段线性插值

设函数$y = f(x)$在$[a,b]$上取节点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

及其函数值

$$y_1 = f(x_i), i = 0,1,\cdots n$$

连接相邻两点做一折线函数$S(x)$，则$S(x)$满足

①$S(x)$在$[a,b]$连续；

② $S(x_i) = y_i$， $i = 0,1,\cdots,n$;

③$S(x)$在每个字段$[x_i, x_{i+1}]$是线性函数，则折线函数$S(x)$称为分段线性插值函数。

$S(x)$在字段$[x_i, x_{i+1}]$上有

$$S(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}y_{i+1}$$

在区间$[a,b]$上

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)y_i$$

其中

$$\beta_i(x)\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x_{i-1}\le x\le x_i, i=0\text{略去}\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & x_i\le x\le x_{i+1}, i=n\text{略去}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

3.分段三次埃尔米特插值

定义 **4-3** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 和相应的函数值　，以及导数值 y_i'，若分段三次函数　满足

① $H(x)\in C'[a,b]$;

② $H(x_i)=y_i', H'=y_i', i=0,1,\cdots,n$;

③ $H(x)$ 在每个子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上是次数不超过 **3** 的多项式，则称 $H(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的分段三次埃尔米特插值多项式。

在子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上 $H(x)$ 是两点三次埃尔米特插值多项式，即

$$H(x)=\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2+\left(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 y_{i+1}$$

$$+(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)y_i'+(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)y_{i+1}'$$

在 $[a,b]$ 上用插值基函数表示为

$$H(x)=\sum_{i=0}^{n}[\alpha_i(x)y_i+\beta_i(x)y_i']$$

其中

$$\alpha_i(x)\begin{cases}\left(1+2\dfrac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\right)\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2 & x\in[x_{i-1},x_i], i=0\text{略去}\\ \left(1+2\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 & x\in[x_i,x_{i+1}], i=n\text{略去}\\ 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$$

$$\beta_i(x)\begin{cases}(x-x_i)\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2 & x\in[x_{i-1},x_i], i=0\text{略去}\\ (x-x_i)\left(\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 & x\in[x_i,x_{i+1}], i=n\text{略去}\\ 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$$

九、三次样条插值

1.三次样条插值

定义 4-4 若函数 $S(x)\in C^{m-1}[a,b]$，在子区间 $[x_i,x_{i-1}](i=0,1,\cdots,n-1)$ 是 m 次多项式，给定 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，则称 $S(x)$ 是以 $x_0,x_1\cdots x_n$ 为节点的 m 次样条函数，且若对于节点 x_i 上给定的函数值 $f(x_i)=y_i,(i=0,1,\cdots,n)$ 有

$$S(x_i)=y_i,\ i=0,1,\cdots,n$$

即称 $S(x)$ 为 m 次样条插值函数。

三次样条插值函数　　由 n 个不超过 3 次的多项式组成，且为二阶导数连续的函数，故

$$\begin{cases}S(x_i-0)=S(x_i+0)\\ S'(x_i-0)=S'(x_i+0)\\ S''(x_i-0)=S''(x_i+0)\end{cases}$$

为确定 $S(x)$，还需补充两个条件，通常在 $[a,b]$ 的端点 $a=x_0$，$b=x_n$ 上提供两个条件，并称之为边界条件。

边界条件 1 ：给定两端的一阶导数值，即

$$S'(x_0)=f'(x_0)=y_0',S'(x_n)=f'(x_n)=y_n'$$

边界条件 2 ：给定两端的二阶导数值，即

$$S''(x_0)=f''(x_0)=y_0'',S''(x_n)=f''(x_n)=y_n''$$

特别地，对于

$$S''(x_0)=S''(x_n)=0$$

的边界条件称为自然边界条件

边界条件 3 ：也称周期边界条件

$$S(x_0)=S(x_n),S'(x_0)=S'(x_n),S''(x_0)=S''(x_n)$$

2.三弯矩方程

三次样条插值函数 $S(x)$ 在子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 是一个不超过三次的多项式，故 $S''(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$

是线性函数。令 $S(x)$ 的二阶导数值

$$S''(x_i) = M_i, i = 0,1,\cdots,n$$

则有

$$S''(x_i) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} M_i + \frac{x - x_i}{h_i} M_{i+1}$$

其中 $h_i = x_{i+1} - x_i$，对上式连续两次积分，并利用 $S(x_i) = y_i$，$S(x_{i+1}) = y_{i+1}$ 可得

$$S(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} M_{i+1} + \frac{x_{i+1} - x_i}{h_i}(y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i)$$

$$+ \frac{x - x_i}{h_i}(y_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} M_{i+1})$$

利用条件 $S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0)$ 可得

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda M_{i+1} = d_i, i = 1,2,\cdots,n-1$$

其中

$$M_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \lambda_i = 1 - M_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}$$

$$d_i = \frac{6}{h_{i+1} - h_i}(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}) = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$$

根据边界条件再补充两个附加条件。

对于边界条件 **1** 可导出

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = d_0 \\ M_{n-1} + 2M_n = d_n \end{cases}$$

其中

$$d_0 = \frac{6}{h_0}(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - y_0')$$

$$d_n = \frac{6}{h_{n-1}}(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}})$$

对于边界条件 **2** 可导出

$$\begin{cases} M_0 = y_0'' \\ M_n = y_n'' \end{cases}$$

对于边界条件 **3** 可导出

$$\begin{cases} M_0 = M_n \\ \lambda_n M_n + \mu M_{n-1} + 2M_n = d_n \end{cases}$$

其中

$$\lambda_0 = h_0 \frac{1}{h_{n-1} + h_0}, M_n = 1 - \lambda_n$$

$$d_n = \frac{6}{h_0 + h_{n-1}} (f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n])$$

4.2 习题及解答

1.已知函数 $f(x) = 56x^3 + 24x^2 + 5$ 的函数值，求其三次插值多项式。

解 对于次数不大于 **n** 的多项式，其 **n** 次插值多项式就是其本身，所以其三次插值多项式 $P(x) = f(x) = 56x^3 + 24x^2 + 5$ 。

2.已知数据表

x	1.127 5	1.150 3	1.173 5	1.197 2
f (x)	0.119 1	0.139 54	0.159 32	0.179 03

用拉格朗日插值公式计算 $f(1.130\ 0)$ 的近似值。

解

$$L(x) = \sum_{k=0}^{3} l_k(x) f(x_k)$$

$$= \frac{(x-1.150\ 3)(x-1.173\ 5)(x-1.197\ 2)}{(1.127\ 5-1.150\ 3)(1.127\ 5-1.173\ 5)(1.127\ 5-1.197\ 2)} \times 0.119\ 1$$

$$+ \frac{(x-1.127\ 5)(x-1.137\ 5)(x-1.197\ 2)}{(1.150\ 3-1.127\ 5)(1.150\ 3-1.137\ 5)(1.150\ 3-1.197\ 2)} \times 0.139\ 54$$

$$+ \frac{(x-1.127\ 5)(x-1.150\ 3)(x-1.197\ 2)}{(1.173\ 5-1.127\ 5)(1.173\ 5-1.150\ 3)(1.173\ 5-1.197\ 2)} \times 0.159\ 32$$

$$+\frac{(x-1.127\ 5)(x-1.150\ 3)(x-1.173\ 5)}{(1.197\ 2-1.127\ 5)(1.197\ 2-1.150\ 3)(1.197\ 2-1.173\ 5)}\times 0.179\ 03$$

3.证明：

（1） $\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x) = x^j,\ j=1,2,\cdots,n$

（2） $\sum_{k=0}^{n} (x_k - x)l_k(x) = 0,\ j=1,2,\cdots,n$

证 （1）取 $f(x)=x^j,\ j=1,2,\cdots,n,\ f(x_k)=x_k^j$

由于 $j\le n$，所以有

$$f(x)=L(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)f_k(x)$$

$$x^j=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)x_k^j$$

（2）设 $f(x)=(x-t)^j$， $j=1,2,\cdots,n$， 由于 $j\le n$， 所以有

$$f(x)=L(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)f(x_k)$$

$$(x-t)^j=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)(x_k-t)^j$$

令 t=x，则

$$\sum_{i=0}^{n}(x_k-x)^{'}l_i(x)=0$$

4.设 $x_i=(i=0,1,\cdots,5)$ 为互异节点，$l_i(x)=(i=0,1,\cdots,5)$ 为对应的 5 次插值基函数，计算

$\sum_{i=0}^{5} x_i^5 l_i(0)$， $\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)^2 l_i(x)$ 和 $\sum_{i=0}^{5}(x_i^5+2x_i^4+x_i^3+1)l_i(x)$。

解 对于次数不大于 n 的多项式，其 n 次插值多项式就是其本身，当 $f(x)$ 是一个次数不超过 5 次得多项式，其 5 次插值多项式 $L(x)$ 满足

所以有

$$\sum_{i=0}^{5} x_i^5 l_i(0)=0^5=0$$

$$\sum_{i=0}^{5}(x_i - x)^2 l_i(x) = (x - x)^2 = 0$$

$$\sum_{i=0}^{5}(x_i^5 + 2x_i^4 + x_i^3 + 1)l_i(x) = x_i^5 + 2x_i^4 + x_i^3 + 1$$

5.已知 $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$，求证 $\omega'(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i)$

证 方法 1: $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

两边取对数 $\ln \omega(x) = \prod_{k=0}^{n}\ln(x - x_k)$

对 x 求导数 $\dfrac{\omega(x)}{\omega'(x)} = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{x - x_k}$

所以 $\omega'(x_k) = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{\omega(x)}{x - x_i} = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\left[\dfrac{1}{x - x_0} + \dfrac{1}{x - x_1} + \cdots\right.$

$$\left. + \frac{1}{x - x_k} + \cdots \frac{1}{x - x_n}\right]$$

当 $x = x_i$ 时，求和项中的第 **k** 项不为 **0**，其余项为 **0.**

$$\omega'(x_k) = (x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i)$$

方法 2: $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_k)\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x - x_i)$

求导 $\omega'(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x - x_i) + (x - x_k)\dfrac{d}{dx}\left[\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x - x_i)\right]$

$$\omega'(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i)$$

方法 3: $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

则 $$\omega'(x_k)=\lim_{x\to x_k}\frac{\omega(x)-\omega(x_k)}{x-x_k}=\lim_{x\to x_k}\frac{\omega(x)}{x-x_k}$$

$$=(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$$

$$=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} x_k-x_i$$

6.设 $f(x)$ 在$[a,b]$有连续的二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，求证

$$|R(x)|=|f(x)-P(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2|f''(x)|$$

证 $f(x)$ 在$[a,b]$有连续的二阶导数，插值余项的绝对值

$$|R(x)|=|f(x)-P(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2|f''(x)|$$

而　　，且　　，即　　，所以有

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

7.设 $f(x)=x^4$，用拉格朗日余项定理写出以**-1,0,1,3** 为节点的三次插值多项式。

解 $$R(x)=f(x)-L(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)=\frac{4!}{4!}(x+1)(x-0)(x-1)(x-3)$$

$$L(x)=x^4-x(x+1)(x-1)(x-3)=x^4-(x^3-x)(x-3)$$

三次插值多项式 $L(x)=3x^3+x^2-3x$。

8.利用余项定理证明次数$\le n$ 的多项式，其 **n** 次拉格朗日插值多项式就是它本身。

解 被插值函数 $f(x)$ 等于插值函数 $L(x)$ 与余项 $R(x)$ 之和 ，即

$$f(x)=L(x)+R(x)$$

又根据拉格朗日余项定理

$$R(x)=f(x)-L(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

当被插值函数 $f(x)$ 是次数$\le n$ 的多项式时， $f^{(n+1)}(\xi)=0$，所以有

$$f(x)=L(x)$$

即次数≤ n 的多项式，其 n 次拉格朗日插值多项式就是它本身。

9.已知 $\sin x$，30°，45°，60°的值分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，分别用一次插值和二次插值求 $\sin 50°$ 的近似值，并估计截断误差。

解 一次插值时，取靠近 的两个角度 和 作节点，此时有

$$\sin 50° \approx L(50) = \left(\frac{x-60}{45-60}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{x-45}{60-45}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Big|_{x=50} = 0.760\ 080$$

误差估计

$$R(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)(x-x_1)$$

对上式的节点需将角度转化为弧度，50°，60°，50°分别为 $\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{18}$，所以有

$$|R(\frac{5\pi}{18})| \le |\frac{1}{2}(-\sin\frac{\pi}{3})(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{4})(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{3})| = 0.006\ 595\ 16$$

二次插值

$$\sin 50° \approx L(50) = \frac{(50-45)(50-60)}{(30-45)(30-60)}\frac{1}{2} + \frac{(50-30)(50-60)}{(45-30)(45-60)}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$+\frac{(50-30)(50-45)}{(60-30)(60-45)}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.765\ 434$$

截断误差

$$|R(\frac{5\pi}{18})| \le |\frac{1}{3!} - \cos\frac{\pi}{6}(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{6})(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{4})(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{3})| = 0.000767382$$

10.已知函数 $f(x)=3^x$ 在点 x =**0**，**1**，**-1**，**2**，**-2** 处的值，用埃尔金算法求 $\sqrt{5}$ 的近似值。

解 列出埃特金逐次线性插值表，其中 x =**0.5.**

$x_0=0$	$f(x_0)=1$	
$x_1=1$	$f(x_1)=3$	$P_{01}(x)=2$
$x_2=-1$	$f(x_2)=\frac{1}{3}$	$P_{02}(x)=\frac{4}{3}$ $P_{012}(x)=\frac{11}{6}$
$x_3=2$	$f(x_3)=9$	$P_{03}(x)=3$ $P_{013}(x)=\frac{3}{2}$ $P_{0123}(x)=\frac{5}{3}$
$x_4=-2$	$f(x_4)=\frac{1}{9}$	$P_{04}(x)=\frac{11}{9}$ $P_{014}(x)=\frac{101}{54}$ $P_{0124}(x)=\frac{16}{9}$ $P_{01234}(x)=\frac{41}{24}$

$\sqrt{3}$ 的近似值 $P_{01234}(x)=\frac{41}{24}$。

11.给出概率积分 $f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$ 的数据表

x	0.46	0.47	0.48	0.49
f(x)	0.484 655 5	0.493 745 2	0.502 749 8	0.511 668 3

用二次插值计算：

（1）当 $x=0.472$ 时，积分值等于多少？

（2）当 x 为何值时积分制为 0.5？

解 （1）用二次插值计算时，选取最接近 $x=0.472$ 的前三个节点 $x_0=0.46$ ，$x_1=0.47$ ，$x_2=0.48$ 及相应函数值 $f(x_0)$ ，$f(x_1)$ ，$f(x_2)$ ，有

$$L(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$L(0.472)=\frac{(0.472-0.47)(0.472-0.48)}{(0.46-0.47)(0.46-0.48)}\times 0.4846555+\frac{(0.472-0.46)(0.472-0.48)}{(0.47-0.46)(0.47-0.48)0.01}$$

$$\times 0.4937452+\frac{(0.472-0.46)(0.472-0.47)}{(0.48-0.46)(0.48-0.47)}\times 0.5027498$$

$=0.495552928$

$f(0.472)\approx L(0.472)=0.495552928$

当 $x=0.472$ 时，积分值等于 0.495552928 。

(2)原函数是连续单调函数，可以用反插值法计算。将 x看成 y的函数，即 $x=f^{-1}(y)$,用二次插值计算时，选取最接近 $f(x)=0.5$的后三个节点 $y_1=0.4937452$, $y_2=0.5027498$, $y_3=0.5116683$ 及相应函数值 $x_1=0.47$, $x_2=0.48$, $x_3=0.49$,有

$$Q(y)=\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}x_0+\frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)}x_1+\frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)}x_2$$

$$Q(y)=\frac{(y-0.5027498)(y-0.5116683)}{(0.4937452-0.5027498)(0.4937452-0.5116683)}\times 0.47$$

$$+\frac{(y-0.4937452)(y-0.5116683)}{(0.5027498-0.4937452)(0.5027498-0.5116683)}\times 0.48$$

$$+\frac{(y-0.4937452)(y-0.5027498)}{(0.5116683-0.4937452)(0.5116683-0.5027498)}\times 0.49$$

$x=f^{-1}(0.5)\approx Q(0.5)=0.476929624$

当 $x=0.476929624$ 时，积分值等于 0.5。

求解 (2)的一个很自然的想法是 求 $L(x)=0.5$ 的介于 0.48 和 0.49 之间的根，这是一个代数方程，可用求根公 式或数值解法求解。

九、 设 $f(x)\in C^1[a,b], x_0\in(a,b)$，定义 $f[x_0,x_0]=\lim\limits_{x\to x_0} f[x,x_0]$，证明 $f[x_0,x_0]=f'(x_0)$。

证 由微分中值定理，有

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0+\theta(x-x_0)),0<\theta<1$$

所以

$$f[x_0,x_0]=\lim_{x\to x_0}[x,x_0]=\lim_{x\to x_0}f'(x_0+\theta(x-x_0))=f'(x_0)$$

又证 由于 $f(x)\in C^1[a,b], x_0\in(a,b)$, 根据差商与导数的定义，有

$$f[x_0,x_0]=\lim_{x\to x_0}[x,x_0]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'[x_0]$$

十、证明 **n** 阶差商有如下性质:

(1)若 $F(x)=cf(x)$, 则 $F[x_0,x_1,\dots,x_n]=cf[x_0,x_1,\dots,x_n]$;

(2)若 $F(x)=f(x)+g(x)$, 则 $F[x_0,x_1,\dots,x_n]=f[x_0,x_1,\dots,x_n]+g[x_0,x_1,\dots,x_n]$;

证 **(1)** $F[x_0,x_1,\dots,x_n]=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{F(x_k)}{\omega'(x_k)}$,其中 $\omega'(x_k)=\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)$

由 $F(x)=cf(x)$，得 $F(x_k)=cf(x_k)$

$$F[x_0,x_1,\dots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{cf(x_k)}{\omega'(x_k)}=c\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}=cf[x_0,x_1,\dots,x_n]$$

第5章 $F[x_0,x_1,\dots,x_n]=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{F(x_k)}{\omega'(x_k)}$,其中 $\omega'(x_k)=\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)$

由 $F(x)=f(x)+g(x)$, 得 $F(x_k)=f(x_k)+g(x_k)$

$$F[x_0,x_1,\dots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)+g(x_k)}{\omega'(x_k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}+\sum_{k=0}^{n}\frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)}=f[x_0,x_1,\dots,x_n]$$

(3)设 f(x)为 n 次多项式，证明当 $k\le n$ 时差商 $f[x_0,x_1,\dots,x_k]$ 为 $n-k$ 次多项式，而当 $k>n$ 时其值恒为 0。

证 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

则 $f^{(k)}(x)|_\xi=\begin{cases}0 & k>0\\ n-k\text{次多项式} & k\le n\end{cases}$

$$f[x\ ,x_1,\dots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}=\begin{cases}0 & k>0\\ n-k\text{次多项式} & k\le n\end{cases}$$

(4)设 $f(x)=\dfrac{1}{a-x}$，且 $a,x_0,x_1,\dots,x_n$ 互不相同，证明

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{1}{(a-x_0)(a-x_1)\cdots(a-x_k)},k=1,2,\cdots,n$$

并写出 f(x)的 n 次牛顿插值多项式。

证 用数学归纳法证明。

当 k=1 时，

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1}{x_1-x_0}\left[\frac{1}{a-x_1}-\frac{1}{a-x_0}\right]=\frac{1}{(a-x_0)(a-x_1)}$$

假设当 k=m 时，结论成立，即有

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_m]=\frac{1}{\prod_{i=0}^{m}(a-x_i)}$$

$$f[x_1,x_2,\cdots,x_{m+1}]=\frac{1}{\prod_{i=1}^{m+1}(a-x_i)}$$

则

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_m,x_{m+1}]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_{m+1}]-f[x_0,x_1,\cdots,x_m]}{x_{m+1}-x_0}$$

$$=\frac{1}{x_{m+1}-x_0}\left[\frac{1}{\prod_{i=1}^{m+1}(a-x_i)}-\frac{1}{\prod_{i=0}^{m}(a-x_i)}\right]$$

$$=\frac{1}{x_{m+1}-x_0}\frac{(a-x_0)-(a-x_{m+1})}{\prod_{i=1}^{m+1}(a-x_i)}$$

即当 **k=m+1** 时，结论成立。

f(x)以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为节点的 **n** 次牛顿插值多项式

$$N(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$=\frac{1}{a-x_0}+\frac{x-x_0}{(a-x_0)(a-x_1)}+\cdots\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(a-x_0)(a-x_1)\cdots(a-x_n)}$$

16 设 $f(x)=x^5-3x^3+x-1$，求差商

$$f[3^0,3^1], f[3^0,3^1,\cdots,3^5], f[3^0,3^1,\cdots,3^6]$$

解 $f[3^0,3^1]=\frac{f[3]-f[1]}{3-1}=83$

$f^{(5)}(x)=5!,\ f[3^0,3^1,\cdots,3^5]=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}=1$

$f^{(6)}(x)=0,\ f[3^0,3^1,\cdots,3^6]=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}=0$

4.证明差商的莱伯尼茨公式：若 $p(x)=f(x)g(x)$，则

$$p[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{k=0}^{n} f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$$

证 用数学归纳法

当 **n=1** 时，有

$$p[x_0,x_1]=\frac{p[x_1]-p[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{f[x_1]g[x_1]-f[x_0]g[x_0]}{x_1-x_0}$$

$$=\frac{f[x_0]g[x_1]-f[x_0]g[x_0]}{x_1-x_0}+\frac{f[x_1]g[x_1]-f[x_0]g[x_1]}{x_1-x_0}$$

$$=f[x_0]\frac{g[x_1]-g[x_0]}{x_1-x_0}+\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}g[x_1]$$

$$=f[x_0]g[x_0,x_1]+f[x_0,x_1]g[x_1]=\sum_{k=0}^{1} f[x_0,x_1,\cdots,x_k]g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_1]$$

结论成立。

设当 n=m 时结论成立，即有

$$p[x_0,x_1,\cdots,x_m]=\sum_{k=0}^{m} f[x_0,x_1,\cdots,x_k]g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_m]$$

$$p[x_1,x_2,\cdots,x_{m+1}]=\sum_{k=0}^{m+1} f[x_1,x_2,\cdots,x_k]g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_{m+1}]$$

由差商定义 $$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

有

$$f[x_1,x_2,\cdots,x_k]=f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]+(x_k-x_0)f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$$

由差商定义

有

$$g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_m]=g[x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_{m+1}]+(x_{m+1}-x_k)g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_{m+1}]$$

由差商定义

$$=\frac{1}{x_{m+1}-x_0}\{\sum_{k=1}^{m+1} f[x_1,x_2,\cdots,x_k]g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_{m+1}]-\sum_{k=0}^{m} f[x_0,x_1,\cdots,x_k]g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_m]\}$$

=

$$\frac{1}{x_{m+1}-x_0}\{\sum_{k=1}^{m+1}(f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]+(x_k-x_0)f[x_0,x_1,\cdots,x_k])-g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_{m+1}]$$

$$-\sum_{k=0}^{m}(f[x_0,x_1,\cdots,x_k])(g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_{m+1}])-(x_{m+1}-x_k)f[x_0,x_1,\cdots,x_k]g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_{m+1}])\}$$

$$=\frac{1}{x_{m+1}-x_0}\{\sum_{k=1}^{m+1}(x_k-x_0)(f[x_0,x_1,\cdots,x_k]g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_{m+1}])$$

$$+\sum_{k=0}^{m}((x_{m+1}-x_k)f[x_0,x_1,\cdots,x_k]g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_{m+1}])$$

$$=\quad\frac{f[x_0]g[x_1]-f[x_0]g[x_1]}{x_1-x_0}+\frac{f[x_1]g[x_1]-f[x_0]g[x_1]}{x_1-x_0}$$

$$=\sum_{k=0}^{m+1} f[x_0,x_1,\cdots,x_k]g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_{m+1}]$$

所以,有

$$p[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{k=0}^{n} f[x_0,x_1,\cdots,x_k]g[x_k,x_{k+1},\cdots,x_{m+1}]$$

5.若 $f(x)=\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, $x_i(i=0,1,\cdots,n)$互异，求 $f[x_0,x_1,\cdots,x_p]$的值 $p\le n+1$。

解 由 $f(x)=\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, 有

$$f(x_i)=0 \qquad i=0,1,\cdots,n$$

由差商的性质

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_p]=\sum_{i=0}^{p}\frac{f(x_i)}{\omega'_{p+1}(x_i)}$$

可知当 $p\le n$ 时

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_p]=0$$

而当 $p=n+1$ 时

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{n+1}]=\sum_{i=0}^{n+1}\frac{f(x_i)}{\omega'_{n+2}(x_i)}=\frac{f(x_{n+1})}{\omega'_{n+2}(x_{n+1})}=\frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1})}=1$$

19.已知$f(x)=shx$ 的函数表

x_i	0	0.20	0.30	0.50
shx_i	0	0.201 34	0.304 52	0.521 10

求二次和三次牛顿插值多项式，计算，$f(0.23)$的近似值并用牛顿插值余项估计误差。

解 根据给定函数表构造差商表

x_i	shx_i	一阶	二阶	三阶
0	0			
	0.201 34	1.006 7		
0.20	0.304 52	1.0318	0.083 67	
0.30	0.521 10	1.083 0	0.170 67	0.174 00
0.50				

二次牛顿插值多项式

$$N_2(x) = 1.0067x + 0.08367x(x-0.2)$$

由此可得

$$f(0.23) \approx N_2(0.23) = 0.232$$

由余项表达式，有

$$|R_2(0.23)| = f[0,0.2,0.3,0.23]x(x-0.2)(x-0.3)$$

由于 $f[0,0.2,0.3,0.23] = 0.244913$

$$|R_2(0.23)| = 0.244913 \times 0.23 \times 0.03 \times 0.07 = 1.18 \times 10^{-4}$$

三次牛顿插值多项式

$$N_3(x) = N_2(x) + 0.17400x(x-0.2)(x-0.3)$$
$$= 1.0067x + 0.008367x(x-0.2) + 0.17400x(x-0.2)(x-0.3)$$

由此可得

$$f(0.23) \approx N_3(0.23) = 0.23203$$

由余项表达式，有

$$|R_3(0.23)| = f[0,0.2,0.3,0.5,0.23]x(x-0.2)(x-0.3)(x-0.5)$$

由于 $f[0,0.2,0.3,0.5,0.23] = 0.033133$

$$|R_3(0.23)| = 0.033133 \times 0.23 \times 0.03 \times 0.07 \times 0.27$$
$$= 4.32 \times 10^{-6}$$

对牛顿插值多项式 $N(x)$ 的计算是否正确常用

$$N(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

进行验算。例如本题

$$N_2(0.2) = 1.0067 \times 0.2 + 0.8367 \times 0.2(0.2-0.2)$$
$$= 0.20134 = f(0.2)$$

20.已知连续函数 $f(x)$ 在 $x = -1,0,2,3$ 的值分别是**-4**，**-1,0,3**，用牛顿插值表

(1) $f(1.5)$ 的近似值。

(2) $f(x) = 0.5$时，x的 近 似 值 。

解 (1)

x	-1	0	2	3	1.5
$f(x)$	-3	-2	0	4	?

根据已知函数 $f(x)$ 的函数值，构造差商表。

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶
-1	-4			
0	-1	3		
2	0	0.5	-5/6	
3	3	3	-5/6	-5/12

则牛顿插值多项式

$$N(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$N(1.5)=-4+3\times(1.5+1)+\left(-\frac{5}{6}\right)(1.5+1)(1.5-0)+\frac{5}{12}(1.5+1)(1.5-0)(1.5-2)=0.4062$$

$$f(1.5)\approx N(1.5)=-0.40625$$

(2)由于函数 $y=f(x)$ 单调连续，存在反函数 $f^{-1}(y)$。令 $y=f(x)$，则 $x=f^{-1}(y)$，有

y	-4	-1	0	3	0.5
x	-1	0	2	3	?

根据已知 $x=f^{-1}(y)$ 的函数值，构造差商表。

y	x	一阶	二阶	三阶
-4	-1			
-1	0	1/3		
0	2	2	-5/12	
3	3	1/3	-5/12	-5/24

牛顿插值多项式

$N_3(y)= f[y_0]+ f[y_0,y_1](y-y_0)+ f[y_0,y_1,y_2](y-y_0)(y-y_1)+ f[y_0,y_1,y_2,y_3](y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)$

$$N_3(0.5)=1+\frac{1}{3}(0.5+4)+\frac{5}{12}(0.5+4)(0.5+1)$$

$$-\frac{5}{24}(0.5+4)(0.5+1)(0.5-0)=2.9107$$

$X\approx N_3(0.5)=2.9107$

所以，f(x)=0.5 时，x 的近似值为 2.9107。

.

21.已知 y=f(x)的函数表

X	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	1	1.32	1.68	2.08	2.52	3

列出向前差分表，并写出牛顿向前插值公式。

解　构造向前差分表。

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0.0	1.00			
0.1	1.32	0.32		
0.2	1.68	0.36	0.04	
0.3	2.08	0.40	0.04	0.00
0.4	2.52	0.44	0.04	0.00
0.5	3.00	0.48	0.04	0.00

则由牛顿向前差分公式，得

$$N(x)=N(0.0+0.1t)=0.02t^2+0.30t+1.00 \quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

22. 利用差分性质求 $1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)$。

解　令 $y_n=1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)$，构造差分表。

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0				
1×2	1×2			
$1\times2+2\times3$	2×3	4		
$1\times2+2\times3+3\times4$	3×4	6	2	
⋮	⋮	⋮	⋮	
$1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)$	$n(n+1)$	$2n$	2	0

由差分性质，有

$$y_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\Delta^i y_0$$

$$=0+2n+4\frac{n(n-1)}{2}+2\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$=2n+2n(n-1)+\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

$$=\frac{1}{3}n[6n+(n-1)(n-2)]$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

23.给定数据

x_i	1	2
$f(x_i)$	2	3
$f'(x_i)$	0	-1

构造埃尔米特插值多项式 $H_3(x)$，并计算 $f(1.5)$。

解　设 $x_0=1, x_1=2$，直接用基函数方法构造 $H_3(x)$，基函数

$$\alpha_0(x)=\left(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=(2x-1)(x-2)$$

$$\alpha_1(x)=\left(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=(5-2x)(x-1)^2$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=(x-1)(x-2)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=(x-2)(x-1)^2$$

于是

$$H_3(x)=2\alpha_0(x)+3\alpha_1(x)-\beta_1(x)$$

$$=-3x^3+13x^2-17x+9$$

$f(1.5) \approx H_3(1.5) = 2.625$

又解　用带重节点的牛顿插值求解，作差商表（重节点用导数值代替差商）

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶
1	2			
1	2	0		
2	3	1	1	
2	3	-1	-2	-3

写出埃尔米特插值多项式

$H_3(x)$=2+0$(x-1)+1(x-1)^2-3(x-1)^2(x-2)$

$$=-3x^3+13x^2-17x+9$$

$f(1.5) \approx H_3(1.5) = 2.625$

24.已知函数 $f(x)$ 的数据

x_i	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$
f_i	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$
f'_i		$\frac{3}{2}$	

构造一个不超过三次的插值多项式 $H_3(x)$，使之满足 $H_3(x_i) = f(x_i), i = 0,1,2,$

$H_3'(x_i) = f'(x_i)$，并写出余项 $R(x) = f(x) - H_3(x)$ 的表达式。

解　构造重节点的差商表。

x_i	y_i	一阶	二阶	三阶
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$			
1	1	$\frac{7}{6}$		
1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{9}$	

$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{19}{10}$	$\frac{8}{25}$	$-\frac{14}{225}$

则 $$H_3(x)=\frac{1}{8}+\frac{7}{6}\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{4}{9}\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)-\frac{14}{225}\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)^2$$

$$=-\frac{14}{225}x^3+\frac{263}{450}x^2+\frac{233}{450}x-\frac{1}{25}$$

其余项

$$R(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)^2\left(x-\frac{9}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4}<\xi<\frac{9}{4}$$

25.设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，将区间$[-5,5]$分成 **10** 等分，用分段线性插值方法求各段中点的值，并估算误差。

解 $h=\frac{5-(-5)}{10}=1$, 故 $I_h(x)=\sum_{i=-5}^{5}\frac{1}{1+i^2}l_i(x)$，其中

$$l_i(x)=\begin{cases}x-x_{i-1}, x_{i-1}\le x\le x_i, i=-5\text{除去}\\ x_{i+1}-x\ , x_i\le x\le x_{i+1}, i=5\text{除去}\\ 0, x\notin(x_{i-1},x_{i+1})\end{cases}$$

各节点的中点为 $x_p=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$, 将 $i=-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$ 代入 $f(x)$及$I_h(x)$中求得

x_p	± 0.5	± 1.5	± 2.5	± 3.5	± 4.5
$f(x_p)$	**0.80000**	**0.30769**	**0.13793**	**0.07547**	**0.04706**
$l_h(x_p)$	**0.75000**	**0.35000**	**0.15000**	**0.07941**	**0.04864**

估计误差时，由线性插值余项有

$$|R(x)|\le\frac{M_2}{2!}|(x-x_{i+1})(x-x_i)|, M_2=\max_{-5\le x\le 5}|f''(x)|$$

因

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad f''(x)=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},\quad \max_{-5\le x\le 5}|f''(x)|\le 2$$

故$|R(x)|\le\frac{h^2}{8}M_2=0.25$

26.将区间$[a,b]$分成 n 等分，求 $f(x)=x^2$，在区间$[a,b]$上的分段线性插值函数，并估计插值余项。

解 令$h=\dfrac{b-a}{n}$，分点 $x_i=a+ih\,(i=0,1,\cdots,n)$，在每个小区间上构造插值基函数

$$l_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x_{i-1}\le x\le x_i \quad i=0\text{除去}\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & x_i\le x\le x_{i+1} \quad i=n\text{除去}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$\mathbf{I_h(x)=\sum_{i=0}^{n}x_i^2 l_i(x)}$ 插值余项

$$|R(x)|\le\frac{f''(\xi)}{2!}|(x-x_{k+1})(x-x_k)|\le\frac{2}{2}\frac{h^2}{4}=\frac{h^2}{4}$$

27.设要构造对数表 logx，$1\le x\le 10$，应如何选取步长，才能使分段线性插值具有 6 位有效数字。

解 由于 $f(x)=\log x$， $f'(x)=\dfrac{1}{\ln 10}\dfrac{1}{x}$， $f''(x)=-\dfrac{1}{\ln 10}\dfrac{1}{x^2}$

从而

$$\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|=\frac{1}{\ln 10}=0.43429$$

由 $R(x)\le\dfrac{h^2}{8}\max_{0\le x\le 10}|f^{(2)}(x)|=0.054287\ h^2$

为使误差不超过10^{-6}，选取$h=\dfrac{1}{n}$，使上式右端小于10^{-6}，解之

$h\le 0.42919\ \times 10^{-2}$

28.用分段二次插值公式计算区间$[a,b]$上非节点处的函数值e^x的近似值，使误差不超过10^{-6}，要使用多少个等分节点处的函数值？

解 由于 $f(x)=e^x$， $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=e^x$

从而

$$\max_{0\le x\le 1}|f'''(x)|=e^1=2.718$$

由

$$R(x) \le \frac{\sqrt{3}}{27} \max_{0\le x\le 1} \left| f^{(3)}(x) \right| h^3 = 0.17435978 \quad h^3$$

为使误差不超过10^{-6}，选取$h = \frac{1}{n}$，使上式右端小于10^{-6}，解之

$h \le 1.79 \times 10^{-2}$， $n = 55.867$ 二次插值节点取奇数，所以取$n = 57$ 。

29 求 $f(x) = x^4$，在区间$[a,b]$上的分段埃米尔特插值，并估计误差。

解 令$h = \frac{b-a}{n}$，分点$x_i = a + ih\ (i = 0,1,\cdots,n)$，当$x \in [x_k, x_{k+1}]$时

$$I_h(x) = x_k^4(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k})(\frac{x - x_k}{x_k - x_{k+1}})^2 + x_{k+1}^4(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}})(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k})^2$$

$$+ 4x_k^3(x - x_k)(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}})^2 + 4x_{k+1}^3(x - x_{k+1})(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k})^2$$

$k = 0,1,\cdots,n-1$ 差值余项

$$\left| R(x) \right| \le \frac{M_2}{2!} \left| (x - x_{i+1})(x - x_i) \right|$$

$$\left| R(x) \right| \le \max_{a\le x\le b} \frac{\left| f^{(4)}(x) \right|}{4!} \max_{x_k \le x \le x_{k+1}} \left| (x - x_{k+1})^2 (x - x_k)^2 \right| \le (\frac{h}{2})^2 (\frac{h}{2})^2 = \frac{h^4}{16}$$

30.对如下函数表，建立三次样条插值函数。

x	1	2	3
$f(x)$	2	4	2
$f'(x)$	1		-1

解 $\lambda_1 = \frac{h_0}{h_1 + h_0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$， $\mu_1 = 1 - \lambda_1 = \frac{1}{2}$，

$g_1 = 3[f[x_0, x_1]\lambda_1 + f[x_1, x_2]\mu_1] = 3\left[\frac{1}{2}(4-2) + \frac{1}{2}(2-4)\right] = 0$ 于是由

$\lambda_1 m_0 + 2m_1 + \mu_1 m_2 = g_1$ 得$m_1 = \frac{0}{2} = 0$

则由区间$[x_i, x_{i+1}]$上的埃尔米特插值公式，可得

$$s_0(x) = (2-x)^2(x-1) + 2(2-x)^2[2(x-1)+1] + 4(x-1)^2[2(2-x)+1]$$

$$= -3x^3 + 13x^2 - 16x + 8$$

$$s_1(x)=(x-2)^2(3-x)+4(3-x)^2\left[2(x-2)+1\right]+12(x-2)^2\left[2(3-x)+1\right]$$

$$=3x^3+23x^2+56x-40$$

样条插值函数

$$\mathbf{s(x)}=\begin{cases}-3x^3+13x^2-16x+8 & 1\le x\le 2\\ 3x^3-23x^2+56x-40 & 2\le x\le 3\end{cases}$$

31.已知数据表

x	0	1	3	4
$f(x)$	-2	0	4	5

求满足自然边界条件 $s''(0)=s''(6)=0$ 的三次样条插值函数 $s(x)$，

并计算 $f(2)$， $f(3.5)$ 的近似值

解 由 $x_0=0$， $x_1=1$， $x_2=3$， $x_3=4$，有

$h_0=x_1-x_0=1$， $h_1=x_2-x_1=2$， $h_2=x_3-x_2=1$

$$\mu_1=\frac{h_0}{h_0+h_1}=\frac{1}{3},\quad \mu_2=\frac{h_1}{h_1+h_2}=\frac{2}{3},\quad \lambda_1=1-\mu_1=\frac{2}{3},\quad \lambda_2=1-\mu_2=\frac{1}{3}$$

由 $y_0=-2$， $y_1=0$， $y_2=4$， $y_3=5$，有

$$d_1=\frac{6}{h_0+h_1}\left(\frac{y_2-y_1}{h_1}-\frac{y_1-y_0}{h_0}\right)=\frac{6}{3}\left(\frac{4-0}{2}-\frac{0+2}{1}\right)=0$$

$$d_2=\frac{6}{h_0+h_1}\left(\frac{y_3-y_2}{h_2}-\frac{y_2-y_1}{h_1}\right)=\frac{6}{3}\left(\frac{5-4}{1}-\frac{4-0}{2}\right)=-2$$

由自然边界条件 $M_0=M_3=0$，有

$$\begin{pmatrix}2 & \lambda_1\\ \mu_2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1-\mu_1M_0\\ d_1-\mu_2M_3\end{pmatrix}\text{代入数据}\begin{pmatrix}2 & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}$$

解之得

$M_1=\frac{3}{8}$， $M_1=-\frac{9}{8}$

将 M_0， M_1， M_2， M_3 代入

$$s(x)=\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}M_i+\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}M_{i+1}+\frac{x_{i+1}-x}{h_i}\left(y_i-\frac{h_i^2}{6}M_i\right)+\frac{x-x_i}{h_i}\left(y_{i+1}-\frac{h_i^2}{6}M_{i+1}\right)$$

可得 $s(x)=\begin{cases} \frac{1}{16}x^3+\frac{31}{16}x-2 & x\in[0,1] \\ -\frac{1}{8}x^3+\frac{9}{16}x^2+\frac{11}{8}x-\frac{29}{16} & x\in[1,3] \\ -\frac{3}{16}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{157}{16}x-\frac{41}{4} & x\in[3,4] \end{cases}$

计算 $f(2)\approx s(2)=1.875$

$f(3.5)\approx s(3.5)=4.57$

4.3 同步练习题及解答

1.证明 $\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)l_i(x)=0$，其中 $l_i(x)$ 是关于点 $x_0,x_1,\cdots,x_5$ 的插值基函数

证：$\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)l_i(x)=\sum_{i=0}^{5}(x_i^2-2x_ix+x^2)l_i(x)$

$\sum_{i=0}^{5}x_i^2l_i(x)-2x\sum_{i=0}^{5}x_il_i(x)+x^2\sum_{i=0}^{5}l_i(x)$

$=x^2-2x^2+x^2=0$

又证，对于次数不大于 5 的多项式，其 5 次拉格朗日差值多项式就是其本身，所以有 $\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)^2l_ix=f(x)=(x-x)^2=0$

2.设 $x_k=x_0+kh$，$k=0,1,2,3$，求 $\max\limits_{x_0\le x\le x_3}|l_2(x)|$，其中 $l_2(x)$ 为拉格朗日插值基函数。

解 因为基函数 $l_2(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$

令 $l_2'(x)=0$，得 $3x^2-(6x_0+8h)x+3x_0^2+8x_0h+3h^2=0$

驻点为 $x=x_0+\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$ 经比较知 $|l_2(x)|$ 在 $x=x_0+\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$ 处达到最大值，即有

$\max\limits_{x_0\le x\le x_3}|l_2(x)|=\dfrac{10\pm7\sqrt{7}}{27}\approx1.0563$

3.已知 $\sqrt{144}=12$，$\sqrt{169}=13$，$\sqrt{225}=15$，分别用线性插值和抛物线差值求 $\sqrt{175}$ 的近似值并估计误差

解 线性插值

取靠近 $\sqrt{175}$ 的两组数据 $\sqrt{169}=13$，$\sqrt{225}=15$ 有

$$L(x)=\frac{(x-225)}{(169-225)}\times 13+\frac{(x-169)}{(169-225)}\times 15$$

$$\sqrt{175}\approx P(175)=\frac{175-225}{169-225}\times 13+\frac{175-169}{225-169}\times 15=13.2143$$

又， $f'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$， $f''(x)=(\frac{1}{2\sqrt{x}})'=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ 估计误差

$$\left|R(x)\right|\le\frac{1}{2}\left|f\ \ (\xi)(175-169)(175-225)\right|$$ 将，

$$\left|f''(\xi)\right|\le\max_{x_0\le x\le x_1}\left|f''(\xi)\right|=\max_{x_0\le x\le x_1}\left|-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right|\le 1.1379\times 10^{-4}$$ 代入

$$\left|R(175)\right|\le\frac{1}{2}\times 1.1379\times 10^{-4}\times 6\times 50\approx 1.71\times 10^{-2}$$ 抛物线插值

$$L(x)=\frac{(x-169)(x-225)}{(144-169)(144-225)}\times 12+\frac{(x-144)(x-225)}{(169-144)(169-225)}\times 13+\frac{(x-144)(x-169)}{(225-144)(225-169)}\times 15$$

$$\sqrt{175}=L(175)=\frac{(175-169)(175-225)}{(144-169)(144-225)}\times 12+\frac{(175-144)(175-225)}{(169-144)(169-225)}\times 13$$
$$+\frac{(175-144)(175-169)}{(225-144)(225-169)}\times 15=13.2302$$

估计误差$\left|R(175)\right|\le\frac{1}{3!}\left|f^{(3)}(\xi)(175-144)(175-169)(175-255)\right|$

将$\left|f^{(3)}(\xi)\right|\le\max_{x_1\le x\le x_2}\left|f^{(3)}(\xi)\right|=\max_{x_1\le x\le x_2}\left|\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}\right|\le 1.507\times 10^{-6}$ 代入

$$\left|R(175)\right|\le\frac{1}{6}\times 1.507\times 10^{-6}\times 31\times 6\times 50\approx 2.34\times 10^{-3}$$

4. 设$l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$是关于互异节点$x_i(i=0,1,\cdots,n)$的拉格朗日插值基函数，求证

$$\sum_{i=0}^{n}l_i(0)x_i^k=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k=1,2,\cdots,n\\ (-1)^n x_0x_1\dots x_n & k=n+1\end{cases}$$

证 若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有 **n+1** 阶导数，则有

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)f(x_i)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w(x)$$ 式中 $w(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

当 $f(x)=1$时

$1=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i)$　　进而有　　$\sum_{i=0}^{n} l_i(0)=1$

当 $f(x)=x^k(k=1,2,\cdots,n)$ 时，有 $x^k=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^k$

将 $x=0$ 代入

$$\sum_{i=0}^{n} l(x)x_i^k=0$$

当 $f(x)=x^{n+1}$ 时，有

$$x^{n+1}=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^{n+1}+\omega(x)$$

将 $x=0$ 代入

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(0)x_i^{n+1}=(-1)^n x_0x_1\cdots x_n$$

5. 证明对于 $f(x)$ 的以 x_0，x_1 为节点的一次插值多项式 $L(x)$，插值误差

$$|f(x)-L(x)|\le\frac{1}{8}(x_1-x_0)^2\max_{x_0\le x\le x_1}|f''(x)|\qquad x_0\le x\le x_1$$

证　一次插值余项

$$R(x)=f(x)-L(x)=\frac{f''(\xi)}{2}\omega(x)$$

其中 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)$。

对 $\omega(x)$ 求极值，$\omega'(x)=(x-x_0)+(x-x_1)=0$，得

$x=\frac{1}{2}(x_0+x_2)$，$\omega''(x)=2>0$，有极小值，即

$$(x-x_0)(x-x_1)\ge-\frac{1}{4}(x_1-x_0)^2$$

取 $x\in[x_0,x_1]$，则 $(x-x_0)(x-x_1)\le0$，有

$$|(x-x_0)(x-x_1)|\le\frac{1}{4}(x_1-x_0)^2$$

所以

$$|R(x)|=|f(x)-L(x)|\le\frac{1}{8}(x_1-x_0)^2\max_{x_0\le x\le x_1}|f''(x)|\qquad x_0\le x\le x_1$$

6. 设 $f(x)=3x^2+5$，$x_k=kh$，$k=0,1,2\cdots$，求 $f[x_n,x_{n+1},x_{n+2}]$ 和 $f[x_n,x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3}]$。

解 $f[x_n,x_{n+1},x_{n+2}]=\dfrac{f^{(2)}(\xi)}{2!}=\dfrac{3\times 2!}{2!}=3$

$$f[x_n\ x_{n+1}\ x_{n+2}\ x_{n+3}=]\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}=$$

7. 若函数 $f(x)=x^7+x^4+3x+5$，求 $f[x^0,x^1,\cdots,x^7]$ 和 $f[x^0,x^1,\cdots,x^8]$。

解 由差商和导数的关系 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ 有

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\frac{7!}{7!}=1$$

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=\frac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=\frac{0}{7!}=0$$

即 $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=1$，$f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=0$

8. 已知 $f(x)=\ln x$ 的数据表

x	0.4	0.5	0.6
$\ln x$	−0.916291	−0.693147	−0.510826

用线性插值和二次插值计算 $\ln 0.54$ 的近似值。

解 依据插值误差估计式选距 0.54 最近的节点，建立差商表。

$x_0=0.5$	−0.693147			1
$x_1=0.6$	−0.510826	1.823210		$x-0.5$
$x_2=0.4$	−0.916291	2.027325	−0.204115	$(x-0.5)(x-0.6)$

写出牛顿插值多项式

$$N_1(x)=-0.693147+1.823210(x-0.5)$$

$$N_2(x)=N_1(x)+(-0.204115)(x-0.5)(x-0.6)$$

计算 $\ln 0.54$ 的近似值

$$N_1(0.54)=-0.693147+1.823210(0.54-0.5)=-0.6202186$$

$$N_2(0.54)=N_1(0.54)+(-0.204115)(0.54-0.5)(0.54-0.6)=0.616839$$

9. 利用差分证明

$$1^3+2^3+\cdots n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

证 令 $f(n)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$，则

$$\Delta f(k)=f(k+1)-f(k)=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2-\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2=(k+1)^3$$

将上式对 k 从 0 到 $n-1$ 求和，有

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Delta f(k)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(k+1)-f(k)\right]=f(n)-f(0)=f(n)$$

即是

$$1^3+2^3+\cdots n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

10. 已知数据表

x	0	1
$f(x)$	1	0
$f'(x)$	0	-1

构造不超过 **3** 次的插值多项式并写出插值余项。

解 记 $x_0=0$， $x_1=1$，又已知 $f(x_0)=1$， $f(x_1)=0$， $f'(x_0)=0$， $f'(x_1)=-1$，利用两点埃尔米特插值公式，有

$$H(x)=\sum_{i=0}^{1}f(x_i)\alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{1}f'(x_i)\beta_i(x)=\alpha_0(x)-\beta_1(x)$$

式中 $\alpha_i(x)$， $\beta_i(x)$ $(i=0,1)$ 是埃尔米特插值基函数。

$$\alpha_0(x)=\left[1-2(x-x_0)l_0'(x_0)\right]l_0^2(x)=\left(1-2x\frac{1}{0-1}\right)\left(\frac{x-1}{0-1}\right)^2=(1+2x)(x-1)=2x^3-3x^2+1$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)l_1^2(x)=(x-1)\left(\frac{x-0}{1-0}\right)^2=x^3-x^2$$

于是得到

$$H(x)=x^3-2x^2+1$$

利用埃尔米特插值公式的余项得到

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-1)^2 \qquad \xi\in(0,1)$$

又解　用带重节点的牛顿插值求解，作差商表（重节点用导数值代替差商）。

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶
0	1			
0	1	0		
1	0	−1	−1	
1	0	−1	0	1

写出埃尔米特插值多项式

$$H_3(x)=1+0(x-0)+(-1)(x-0)^2+1(x-0)^2(x-1)$$

$$=x^3-2x^2+1$$

11. 求埃尔米特插值多项式$H_3(x)$，使之满足如下插值条件

x_i	1	2	3
y_i	2	4	12
y'_i		3	

并估计插值误差。

解　方法 **1**:

设$N_2(x)$满足$N_2(1)=2$，$N_2(2)=4$，$N_2(3)=12$，则$N_2(x)=3x^2-7x+6$，为求得埃尔米特插值多项$H_3(x)$，根据牛顿插值的构造法，有

$$H_3(x)=N_2(x)+k(x-1)(x-2)(x-3)$$

为确定待定系数k，可用条件$H'_3(2)=3$，即

$$H'_3(x)=N'_2(x)+k\left[(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)\right]$$

$$H'_3(2)=N'_2(2)+k[-1]=3$$

因为$N'_2(2)=5$，得$k=2$，于是

$$H_3(x)=3x^2-7x+6+2(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$=2x^3-9x^2+15x-6$$

余项

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)^2(x-3) \qquad \xi\in[1,3]$$

方法 **2**：
用带重节点的牛顿插值求解。作差商表（重节点用导数值代替差商）。

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	2			
2	4	2		
2	4	3	1	
3	12	8	5	2

写出埃尔米特插值多项

$$H_3(x)=2+2(x-1)+(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-2)^2$$

$$=2x^3-9x^2+15x-6$$

余项

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)^2(x-3) \qquad \xi\in[1,3]$$

方法 **3**：
用插值基函数求解。写出埃尔米特三次差值多项式

$$H_3(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2+\bar{l}_1 y_1'$$

其中$l_i(x)$ $(i=0,1,2)$ 和$\bar{l}_1(x)$ 均为次数不超过 3 的多项式，且满足

$$l_0(1)=1,\ l_0(2)=0,\ l_0(3)=0,\ l_0'(2)=0$$

$$l_1(1)=0,\ l_1(2)=1,\ l_1(3)=0,\ l_1'(2)=0$$

$$l_2(1)=0,\ l_2(2)=0,\ l_2(3)=1,\ l_2'(2)=0$$

$$\bar{l}_1(1)=0,\ \bar{l}_1(2)=0,\ \bar{l}_1(3)=0,\ \bar{l}_1'(2)=1$$

由 $l_0(x)$ 所满足的条件知，$l_0(x)=A(x-2)^2(x-3)$，根据 $l_0(1)=1$，得

$A=\frac{1}{(1-2)^2(1-3)}=-\frac{1}{2}$，故有

$$l_0(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)$$

同理有

$$l_2(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)^2$$

$$\bar{l}_1(x)=-(x-1)(x-2)(x-3)$$

最后求$l_1(x)$，根据$l_1(x)$应满足的条件知

$$l_1(x)=(ax+b)(x-1)(x-3)$$

利用$l_1(2)=1$，$l_1'(2)=0$，得

$$\begin{cases}(a2+b)(2-1)(2-3)=1\\ a(2-1)(2-3)+(a2+b)(2\times2-1-3)=0\end{cases}$$

解得

$$a=0,\quad b=-1$$

$$l_1(x)=-(x-1)(x-3)$$

$$H_3(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)2-(x-1)(x-3)4$$
$$+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)^2 12-3(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$=2x^3-9x^2+15x-6$$

12. 构造不超过 **4** 次的插值多项式$P(x)$，使之满足

$$P(0)=P'(0)=0,\quad P(1)=P'(1)=1,\quad P(2)=1$$

并写出其插值余项。

解 方法 **1**：

由两点三次埃尔米特插值公式，可得

$$P_3(x)=x^2(2-x)$$

再设

$$P(x)=P_3(x)+Ax^2(x-1)^2$$

由$P(2)=1$，得$A=\frac{1}{4}$，故

$$P(x)=x^2(2-x)+\frac{1}{4}x^2(x-1)^2=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$

方法 **2**：

由题意可设

$$P(x)=x^2\left(ax^2+bx+c\right)$$

由插值条件$P(1)=P'(1)=1$，$P(2)=1$，有

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+3b+2c=1 \\ 4(4a+2b+c)=1 \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=-\dfrac{3}{2} \\ c=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

故

$$P(x)=x^2\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)$$

方法 3：

利用牛顿插值公式，做带重节点的差商表。

x	y	1 阶差商	2 阶差商	3 阶差商	4 阶差商
0	0				
0	0	0			
1	1	1	1		
1	1	1	0	-1	
2	1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$N(x)=0+1\times x^2-1\times x^2(x-1)+\frac{1}{4}x^2(x-1)^2=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$

其插值余项

$$R(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^2(x-1)^2(x-2) \qquad \xi\in(0,2)$$

13. 已知函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的一组数据

x_i	0	1	2
y_i	1	0.5	0.2

求分段线性插值函数，并计算 $f(1.5)$ 的近似值。

解 $x\in[0,1]$ $\quad L(x)=\dfrac{x-1}{0-1}\times1+\dfrac{x-1}{1-0}\times0.5=1-0.5x$

$x\in[1,2]$ $\quad L(x)=\dfrac{x-2}{1-2}\times0.5+\dfrac{x-1}{2-1}\times0.2=0.8-0.3x$

有分段线性插值函数

$$L(x)=\begin{cases}1-0.5x & x\in[0,1]\\ 0.8-0.3x & x\in[1,2]\end{cases}$$

$$L(1.5)=0.8-0.3\times1.5=0.35$$

14. 已知 $y=f(x)$ 的数据表

x	0	1	4	5
f(x)	0	−2	−8	−4

在区间 $[0,5]$ 上求满足边界条件 $S'(0)=\frac{5}{2}$，$S'(5)=\frac{19}{4}$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并分别计算 $S(x)$ 在 $x=0.5$，3，5 处得值。

解 这是在第一种边界条件下的插值问题，故确定 M_0，M_1，M_2，M_3 的方程组形如

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2\\ & & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_0\\M_1\\M_2\\M_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_0\\d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}$$

由 $x_0=0$，$x_1=1$，$x_2=4$，$x_3=5$，得

$$h_1=x_1-x_0=1,\quad h_2=x_2-x_1=3,\quad h_3=x_3-x_2=1$$

$$\lambda_1=\frac{h_2}{h_1+h_2}=\frac{3}{4},\quad \lambda_2=\frac{h_3}{h_2+h_3}=\frac{1}{4},\quad \mu_1=1-\lambda_1=\frac{1}{4},\quad \mu_2=1-\lambda_2=\frac{3}{4}$$

为确定方程组右端 $d_j\ (j=0,1,2,3)$，先做差商表

x	y	1阶差商	2阶差商
0	0		
1	−2	−2	
4	−8	−2	0
5	−4	4	1.5

得

$$d_0=\frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1-y_2}{h_1}-y_0'\right)=-27,\quad d_1=\frac{6}{h_1+h_2}\left(\frac{y_2-y_1}{h_2}-\frac{y_1-y_0}{h_1}\right)=0$$

$$d_2=\frac{6}{h_2+h_3}\left(\frac{y_3-y_2}{h_3}-\frac{y_2-y_1}{h_2}\right)=9,\quad d_3=\frac{6}{h_3}\left(y_3'-\frac{y_3-y_2}{h_3}\right)=\frac{9}{2}$$

将上述数据代入方程组，得

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ \frac{1}{4} & 2 & \frac{3}{4} & \\ & \frac{3}{4} & 2 & \frac{1}{4} \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -27 \\ 0 \\ 9 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

解之

$$M_0=-\frac{-27}{2}，\ M_1=0，\ M_2=\frac{9}{2}，\ M_3=0$$

将所得的M_0，M_1，M_2，M_3值代入三次样条插值函数在各子区间上的表达式，经整理所求的三次样条插值函数

$$S(x)=\begin{cases} \frac{9}{4}x^3-\frac{27}{4}x^2+\frac{5}{2}x & 0\le x<1 \\ \frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{2}x+2 & 1\le x<4 \\ -\frac{3}{4}x^3+\frac{15}{4}x^2-\frac{103}{2}x+66 & 4\le x<5 \end{cases}$$

利用$S(x)$的表达式可计算给定点上的函数值，$x=0.5$在$[0,1]$，故

$$S(0.5)=S_1(0.5)=-0.15625$$

同理可得

$$S(3)=S_2(3)=-8.5，\ S(5)=S_3(5)=-191.5$$

第五章　曲线拟合的最小二乘法

5.1　内容提要

一．最小二乘原理

对于给定数据$(x_i, f(x_i))(i=1,2,\cdots,m)$在给定函数空间$\phi=\mathrm{Span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$中找一个存在唯一的函数

$$\varphi^*(x)=a_0^*\varphi_0(x)+a_1^*\varphi_1(x)+\cdots+a_n^*\varphi_n(x)$$

使残差平方和为最小。

最小二乘解的系数a_0^*，a_1^*，$\cdots$，a_n^*可通过解正则方程组求得，即解

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, f) \\ \\ (\varphi_n, f) \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{cases} (\varphi_k,\varphi_j) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) \\ (\varphi_k, f) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_k(x_i) f(x_i) \end{cases}$$

$$k, j = 0, 1, \cdots, n$$

当考虑反映数据$(x_i, f(x_i))$特性的权ω_i时，对上式修改为

$$\begin{cases} (\varphi_k,\varphi_j) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) \\ (\varphi_k, f) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i\varphi_k(x_i) f(x_i) \end{cases}$$

直线拟合时，对于给定的一组数据$(x_i, f(x_i))$，$i = 1, 2, \cdots, m$ ，求作一次式$y = a + bx$ ，使

$J = \sum_{i=1}^{m} \left[f\left(x_i - (a + bx_i)\right)\right]^2$ 最小 。对于直线拟合， a ， b 应满足的条件是

$$am + b\sum x_i = \sum f(x_i)$$

$$a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum x_i f(x_i)$$

其中，$\sum$ 表示下标i 从$1 \sim m$ 的求和。

二．超定方程组的最小二乘解

给定线性代数方程组

$$Ax = b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

当$m > n$ 时，称为超定方程组。求x^*使

$$J = (b - Ax)^T (b - Ax)$$

为最小，有正则方程组

$$A^T Ax = A^T b$$

求解得超定方程组的最小二乘解 x^*。

三．可线性化模型的最小二乘拟合

把你和曲线

$$y = a + bx$$

中的 x 和 y 看成是其他变量的函数时，可以把许多原来的非线性问题转化为线性问题。

常用的，如双曲线

$$\frac{1}{y} = a + b\frac{1}{x}$$

令 $\hat{y} = \frac{1}{y}$， $\hat{x} = \frac{1}{x}$ 可转化为

$$\hat{y} = a + bx$$

又如指数函数

$$y = ae^{bx}$$

对两端取对数

$$\ln y = \ln a + bx$$

令 $\hat{y} = \ln y$， $\hat{a} = \ln a$ ，则转化为线性模型

$$\hat{y} = \hat{a} + bx$$

四．多变量的数据拟合

设多变量（多元）拟合方程

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

为了确定系数 a_i， $i = 0,1,\cdots,n$ ，把测量数据 (x_i, y_i) 代入，可得一个含有 m 个方程 $n+1$ 个

未知数 $a_i\,(i = 0,1,\cdots,n)$ 的矛盾（超定）方程组

$$y = A\alpha$$

其中

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},\quad \alpha=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1m} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

其对应的正则方程组

$$A^T A\alpha = A^T y$$

正则方程组的解就是多变量拟合的系数。

五．多项式拟合

对于给定的一组数据(x_i, y_i)，$i=0,1,\cdots,m$，求作次多项式

$$y=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

使残差平方和为最小，于是有正则方程组

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \cdots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

其中$\sum$ 是$\sum\limits_{i=1}^{m}$ 的简写。求出$a_0, a_1, \cdots, a_n$，就得倒了拟合多项式的系数。

多项式拟合通过变量可以转化成多变量拟合。

六．正交多项式及其最小二乘拟合

1. 正交多项式

（1）权函数和内积

定义 5-1 设在有限区间或无线区间$[a,b]$上的非负函数$\rho(x)$满足

② $\int_a^b x^k \rho(x)\,dx$ 存在且为有限值，$k=0,1,\cdots$

② 对$[a,b]$上的非负连续函数$g(x)$，若

$$\int_a^b g(x)\rho(x)\,dx$$

有$g(x)\equiv 0$，则称$\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数。

定义 5-2 设$f(x)g(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数，$\rho(x)$是$[a,b]$上的权函数，则

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\,dx$$

为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的带权内积。

（2）正交多项式

定义 5-3 若 $f(x), g(x) \in [a,b]$， $\rho(x)$ 为 $[a,b]$ 上的权函数，且

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上带权正交。若函数序列 $\{\varphi_i(x)\}(i=0,1,\cdots)$ 满足

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases} 0 & i \neq j \\ A_j \neq 0 & i = j \end{cases}$$

则称 $\{\varphi_i(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交函数族，当 $A_j=1$ 时，则称之为标准正交函数族。

定义 5-4 设 $\varphi_n(x)$ 是首项系数 $a_n \neq 0$ 的 n 次多项式，如果多项式序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 满足

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases} 0 & i \neq j \\ A_j \neq 0 & i = j \end{cases}$$

则称多项式序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 为在 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式族， $\varphi_n(x)$ 称为 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的 n 次正交多项式。

（3）勒让德多项式

勒让德多项式的表达式称为罗德利克公式

$$L_0(x)=1$$

$$L_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] \qquad n=1,2\cdots$$

（4）切比雪夫多项式

在区间 $[-1,1]$ 上权函数 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式称为切比雪夫多项式。切比雪夫多项式的表达式

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x) \qquad |x| \leq 1, \quad n=0,1,\cdots$$

若令 $x=\cos\theta$ ，则 $T_n(x)=\cos\theta$ ， $0 \leq \theta \leq \pi$ ，这是 $T_n(x)$ 的参数表示。

2. 用正交多项式作最小二乘拟合

根据给定数据 $(x_i, f(x_i))$ 及权 ω_i ， $i=0,1,\cdots,m$ 构造正交多项式族 $\{P_k(x)\}$ ，利用正交性

$$\left(P_k, P_j\right)=\sum_{i=1}^{m} \omega_i P_k\left(x_i\right) P_j\left(x_i\right)=\begin{cases}0 & j \neq k \\ A_k>0 & j=k\end{cases}$$

求得

$$\begin{cases}\alpha_{k+1}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i x_i P_k^2\left(x_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i P_k^2\left(x_i\right)}=\dfrac{\left(x_i P_k, P_k\right)}{\left(P_k, P_k\right)} \\ \beta_k=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i P_k^2\left(x_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i P_{k-1}^2\left(x_i\right)}=\dfrac{\left(P_k, P_k\right)}{\left(P_{k-1}, P_{k-1}\right)}\end{cases}$$

用正交多项式$\left\{P_k(x)\right\}$的线性组合作最下二乘拟合，在求得$P_k(x)$的同时，算出系数

$$a_k^*=\frac{\left(f, P_k\right)}{\left(P_k, P_k\right)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i f\left(x_i\right) P_k\left(x_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i P_k^2\left(x_i\right)}$$

于是得最小二乘拟合曲线

$$y=a_0^* P_0(x)+a_1^* P_1(x)+\cdots+a_n^* P_n(x)$$

5.2 习题及解答

1. 已知一组实验数据

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4	4.5	6	8	8.5
ω_i	2	1	3	1	1

试求最下二乘拟合曲线。

解 观测试验数据或将实验数据在坐标纸上标出，可以看出它可用线性函数作曲线拟合，选择形如$y=a_0+a_1 x$曲线作拟合曲线。这里$\varphi_0=1$，$\varphi_1=x$，$m=5$，$n=1$，故

$$\left(\varphi_0, \varphi_0\right)=\sum \omega_i=8,\ \left(\varphi_1, \varphi_0\right)=\left(\varphi_0, \varphi_1\right)=\sum \omega_i x_i=22$$

$$\left(\varphi_1, \varphi_1\right)=\sum \omega_i x_i^2=74,\ \left(\varphi_0, y\right)=\sum \omega_i y_i=47$$

$$\left(\varphi_1, y\right)=\sum \omega_i x_i y_i=145.5$$

于是得正则方程组

$$\begin{cases} 8a_0 + 22a_1 = 47 \\ 22a_0 + 74a_1 = 145.5 \end{cases}$$

解之

$$a_0 = 2.77\text{，}\quad a_1 = 1.13$$

最小二乘拟合曲线

$$y = 2.77 + 1.13x$$

2. 给出平面函数 $z(x, y) = ax + by + c$ 的数据

x_i	**0.1**	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.9**
y_i	**0.2**	**0.3**	**0.5**	**0.7**	**0.8**
z_i	**0.58**	**0.63**	**0.73**	**0.83**	**0.92**

按最小二乘原理确定 a, b, c 。

解 根据题意有超定方程组

$$ax_i + by_i + c = z_i \qquad i = 1, 2, \cdots$$

写出正则方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_5 & y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} y_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{5} y_i & \sum_{i=1}^{5} x_i y_i & \sum_{i=1}^{5} y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{5} z_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i z_i \\ \sum_{i=1}^{5} y_i z_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2.2 & 2.5 \\ 2.2 & 1.38 & 1.42 \\ 2.5 & 1.42 & 1.51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.69 \\ 1.802 \\ 1.987 \end{bmatrix}$$

解之，得

$$c = 0.5, a = 0.2, b = 0.3$$

$$z(x) = 0.2x + 0.3y + 0.5$$

3. 用二次多项式拟合以下数据

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	15	14	14	14	14	15	16

解 用平移变换将数据变得易于处理，设

$\bar{y} = y-14, \bar{x} = x-3$，则数据变为

$\bar{x}_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\bar{y}_i$	1	0	0	0	0	1	2

由此得

$$m = 7, \sum \bar{x}_i = 0 \sum \bar{x}_i^2 = 28 \sum \bar{x}_i^3 = 0 \sum \bar{x}_i^4 = 196$$

$$\sum \bar{y}_i = 4 \sum \bar{x}_i \bar{y}_i = 5 \sum \bar{x}_i^2 \bar{y}_i = 31$$

设二次拟合多项式 $\bar{y} = a_0 + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{x}^2$，有正则方程组

$$\begin{cases} 7a_0 + 28a_2 = 4 \\ 28a_1 = 5 \\ 28a_0 + 196a_2 = 31 \end{cases}$$

解得

$$a_0 = -\frac{1}{7}, a_1 = \frac{5}{28}, a_2 = \frac{5}{28}$$

从而有

$$\bar{y} = -\frac{1}{7} + \frac{5}{28}\bar{x} + \frac{5}{28}\bar{x}^2$$

$$y - 14 = -\frac{1}{7} + \frac{5}{28}(x-3) + \frac{5}{28}(x-3)^2$$

4. 用最小二乘法求形如 $y = a + bx^2$ 的多项式，使之与下列数据相拟合。

x	19	25	31	38	44
y	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解 方法 1：

拟合曲线 $y = a + bx^2$，即 $\phi_1(x) = x^2$，故法方程系数

$$(\phi_0, \phi_0) = \sum_{i=0}^{4} \phi_0^2(x) = 5，(\phi_0, \phi_2) = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 5327，(\phi_0, \phi_4) = \sum_{i=0}^{4} x_i^4 = 7277699，$$

$$(\phi_0, f) = \sum_{i=0}^{4} y_i = 271.45，(\phi_1, f) = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 y_i = 369321.5$$

则法方程组为

$$\begin{cases} 5a + 5327b = 271.4 \\ 5327a + 7277699b = 369321.5 \end{cases}$$

求得法方程组的解为

$$\begin{cases} a = 0.973 \\ b = 0.050 \end{cases}$$

故所求多项式为

$$y = 0.973 + 0.050x^2$$

方法 **2**：

将数据 (x, y) 代入多项式 $y = a + bx^2$，得超定方程组

$$\begin{cases} a + 19^2 b = 19 \\ a + 25^2 b = 32.3 \\ a + 31^2 b = 49 \\ a + 38^2 b = 73.3 \\ a + 44^2 b = 97.8 \end{cases}$$

超定方程组的矩阵表示

$$Ax = c$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 19^2 \\ 1 & 25^2 \\ 1 & 31^2 \\ 1 & 38^2 \\ 1 & 44^2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 19 \\ 32.3 \\ 49 \\ 73.3 \\ 97.8 \end{bmatrix}$$

而

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 5\ 327 \\ 5\ 327 & 7\ 277\ 699 \end{bmatrix} \quad A^T c = \begin{bmatrix} 271.4 \\ 369\ 321.5 \end{bmatrix}$$

则法方程组为

$$\begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271.4 \\ 369\ 321.5 \end{bmatrix}$$

求得法方程组的解为

$$\begin{cases} a = 0.973 \\ b = 0.050 \end{cases}$$

故所求多项式为 $y = 0.973 + 0.050x^2$

5. 已知数据

i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

试分别用二次和三次多项式以最小二乘法拟合，并比较优劣

解 （1） 设拟合函数 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$，写出正则方程组的矩阵形式

$$A^T A\alpha = A^T Y$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ 0.4 \\ 0.9 \\ 1.6 \end{bmatrix},$$

$$A^T Y = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 4.2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

即正则方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 4.2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

解得

$$a_0 = 0.4086,\ a_1 = 0.42,\ a_2 = 0.0857$$

所求二次多项式

$$y = 0.4086 + 0.42x + 0.0857x^2$$

残差平方和

$$\delta_2 = Y^T(y - A\alpha) = 0.00116$$

（2） 设拟合函数 $y = a_0 + a_1x + a_2x + a_3x^3$，计算

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 34 \\ 10 & 0 & 34 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 130 \end{bmatrix},$$

$$A^T Y = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 4.2 \\ 7 \\ 14.4 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

正则方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 34 \\ 10 & 0 & 34 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 130 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.9 \\ 4.2 \\ 7 \\ 14.4 \end{bmatrix}$$

解得

$$a_0 = 0.4086,\ a_1 = 0.39167,\ a_2 = 0.0857,\ a_3 = 0.00833$$

所求三次多项式

$$y = 0.4086 + 0.39167x + 0.0857x^2 + 0.00833x^3$$

残差平方和

$$\delta_3 = Y^T(Y - A\alpha) = 0.000194$$

由于残差 $\delta_3 < \delta_2$，所以用三次多项式拟合数据优于用二次多项式拟合。

6. 确定经验曲线 $y = ae^{bx}$ 中的参数 a, b，使该曲线与下列数据相拟合。

x_i	1	2	3	4
y_i	60	30	20	15

解　经验曲线公式关于参数 a, b 是非线性的，当用最小二乘法确定 a, b 时，先应将经验公式变形，使之关于参数 a, b 是线性的。

对经验曲线 $y = ae^{bx}$ 两端取自然对数，得

$$\ln y = \ln a + bx$$

令 $Y = \ln y$，$A = \ln a$，则经验曲线变换为

$$Y = A + bx$$

将给定数据 y_i 变换成 Y_i 和 x_i 一起带入上式，可得含有未知数 A, b 的超定方程组，并计算其正则方程组的系数矩阵和常数项的各元素，有

$$n = 4,\quad \sum_{i=1}^{4} x_i = 10,\quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 30,$$

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = \sum_{i=1}^{4} \ln y_i = 13.1993,\quad \sum_{i=1}^{4} x_i Y_i = 30.7161$$

则正则方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13.1993 \\ 30.7161 \end{bmatrix}$$

解之，得

$$A = 4.4409,\quad b = -0.4564$$

再由 $A = \ln a$，得

$$a = e^A = e^{4.4409} = 84.8528$$

故经验曲线

$$Y = 84.8528e^{-0.4564}$$

7. 给定数据

x	1．0	1.4	1.8	2.2
y	0.931	0.473	0.297	0.224

求形如 $y=\frac{1}{a+bx}$ 的拟合曲线。

解　令 $Y=\frac{1}{y}$，则拟合函数成为

$$Y = a + bx$$

所给数据转化为

i	1	2	3	4	5
x_i	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6
Y_i	1.074	2.114	3.367	4.464	5.592

计算

$$m=5,\ \sum x_i=9,\ \sum x_i^2=17.8,\ \sum Y_i=16.971,\ \sum x_iY_i=35.3902$$

正则方程组

$$\begin{bmatrix}5 & 9\\ 9 & 17.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16.971\\ 35.3902\end{bmatrix}$$

解得

$$a = -2.0535,\ b = 3.0265$$

拟合函数

$$Y = -2.0535 + 3.0265x$$

$$y=\frac{1}{-2.0535+3.0265x}$$

8．求超定方程组

$$\begin{cases}2x_1+4x_2=11\\ 3x_1-5x_2=3\\ x_1+2x_2=6\\ 2x_1+x_2=7\end{cases}$$

的最小二乘解，并求误差平方和。

解　将方程组写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & -5\\ 1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\ 3\\ 6\\ 7\end{bmatrix}$$

正则方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} 18 & -3 \\ -3 & 46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 \\ 48 \end{bmatrix}$$

解得

$$x_1 = 3.0403, \quad x_2 = 1.2418$$

误差平方和

$$\delta_2 = (11 - 2x_1 - 4x_2)^2 + (3 - 3x_1 + 5x_2)^2 + (6 - x_1 - 2x_2)^2 + (7 - 2x_1 - x_2)^2 = 0.34066$$

5.3 同步练习题及解答

1. 观测物体的直线运动，测得数据

时间(t)	0	0.9	1.9	2.2	5.0
距离(s)	0	10	30	80	110

求运动方程。

解　设运动方程 S = at + b，则有

$$\sum_{i=1}^{6} 1 = 6, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i = 14.7, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 53.63$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i = 280, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 1078$$

得正则方程组

$$\begin{cases} 6b + 14.7a = 280 \\ 14.7b + 53.63a = 1078 \end{cases}$$

解之，得

$$b = -7.8550, \quad a = 22.2538$$

所以运动方程

$$S = 22.2538t - 7.8550$$

2．设有实验数据

x_i	1.36	1.73	1.95	2.28
y_i	14.094	16.844	18.435	20.963

按最小二乘法求一次多项式进行拟合。

解　设一次拟合多项式 y = a + bx，则

$$m = 4, \ \sum x_i = 7.32, \ \sum x_i^2 = 13.8434, \ \sum Y_i = 70.376, \ \sum x_i Y_i = 132.12985$$

正则方程组

$$\begin{cases}4a+7.32b=70.376\\7.32a+13.843b=132.12985\end{cases}$$

解得

a = 3.937 + 7.4626x

从而

y = 3.9374 + 7.4626x

3. 给出如下数据，试用最小二乘法求一次和二次拟合多项式（取小数点后 3 位）。

x	1.36	1.49	1.73	1.81	1.95	2.16	2.28	2.48
y	14.094	15.069	16.844	17.378	18.435	19.949	20.963	22.495

解 设一次拟合曲线 $y = a + bx$，即 $\Phi_0(x) = 1$， $\Phi_1(x) = x$，故法方程系数

$$(\phi_0,\phi_0)=\sum_{i=0}^{7}\phi_0^2(x)=8,\quad (\phi_0,\phi_1)=\sum_{i=0}^{7}x_i=15.26,\quad (\phi_0,\phi_2)=\sum_{i=0}^{7}x_i^2=30.156,$$

$$(\phi_0,f)=\sum_{i=0}^{7}y_i=145.227,\quad (\phi_1,f)=\sum_{i=0}^{7}x_iy_i=284.836$$

则法方程组为
$$\begin{cases}8a+15.26b=145.227\\15.26a+30.156b=284.836\end{cases}$$

求得法方程组的解为
$$\begin{cases}a=3.916\\b=7.464\end{cases}$$

故所求多项式为 **y = 3.916 + 7.464x**

设二次拟合曲线 $y=a+bx+cx^2$，即 $\Phi_0(x) = 1$， $\Phi_1(x) = x$， $\Phi_2(x) = x^2$, 故法方程系数

$$(\phi_0,\phi_0)=\sum_{i=0}^{7}\phi_0^2(x)=8,\quad (\phi_0,\phi_1)=\sum_{i=0}^{7}x_i=15.26,\quad (\phi_0,\phi_2)=\sum_{i=0}^{7}x_i^2=30.156,$$

$$(\phi_0,\phi_3)=\sum_{i=0}^{7}x_i^3=61.528,\quad (\phi_0,\phi_4)=\sum_{i=0}^{7}x_i^4=129.118,$$

$$(\phi_0,f)=\sum_{i=0}^{7}y_i=145.227,\quad (\phi_1,f)=\sum_{i=0}^{7}x_iy_i=284.836,\quad (\phi_2,f)=\sum_{i=0}^{7}x_i^2y_i=577.368$$

则法方程组为

$$\begin{cases}8a+15.26b+30.156c=145.227\\15.26a+30.156b+61.528c=284.836\\30.156a+61.526b+129.118c=577.368\end{cases}$$

求得法方程组的解为

$$\begin{cases} a = 4.978 \\ b = 6.312 \\ c = 0.301 \end{cases}$$

故所求多项式为

$$y = 4.978 + 6.312x + 0.301x^2$$

4. 已知数据

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	1	2	1	0

构造二次拟合函数，并计算均方误差。

解 方法 **1**：

设二次拟合函数 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$

正则方程组 $A^TA\alpha = A^TY$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

化简为

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

计算得

$$a_0 = 1.6571，\ a_1 = 0，\ a_2 = -0.4286$$

拟合多项式为

$$y = 1.6571 - 0.4286x^2$$

方法 **2**：

等价于求解超定方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & (-2)^2 \\ 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

的最小二乘解，即正则方程组 $A^TA\alpha = A^TY$ 的解。

计算得

$$A^T A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 10\\ 0 & 10 & 0\\ 10 & 0 & 34\end{bmatrix},\quad A^T Y=\begin{bmatrix}4\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

解之 $\alpha=(1.65710-0.4286)^T$，拟合多项式

$$y=1.6571-0.4286x^2$$

均方差

$$\delta=\sum_{i=1}^{5}\left[y(x_i)-y_i\right]^2=0.13912813$$

5. 求形如 $y=ae^{bx}$（其中 a,b 为常数，且 $a>0$）的经验公式，使其与如下数据相拟合。

x_i	2.2	2.7	3.5	4.1	4.8
y_i	65	60	53	50	46

解 对经验公式 $y=ae^{bx}$ 两边取对数，得

$$\ln y=\ln a+bx$$

作变换 $Y=\ln y,\quad A=\ln a$, 则有

$$Y=A+bx$$

为了用最小二乘法求出 A, b, 需将 (x_i,y_i) 转化为 (x_i,Y_i)，即

x_i	2.2	2.7	3.5	4.1	4.8
Y_i	4.1744	4.0943	3.9703	3.9120	3.8286

$$m=5,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i=17.3,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i^2=64.23,\quad \sum_{i=1}^{5}Y_i=19.9797,\quad \sum_{i=1}^{5}x_iY_i=68.5512$$

故有正则方程组
$$\begin{bmatrix}5 & 17.3\\ 17.3 & 64.23\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19.9797\\ 68.5512\end{bmatrix}$$

用列主元高斯消去法解得

$$a_0=4.4538,\ a_1=-0.1323$$
$$a=e^{a0}=85.9529,\ b=a_1$$

经验公式 $y=85.9529e^{-0.1323}$

6. 用最小二乘法解下列超定方程组

$$\begin{cases}2x+4y=1\\ 3x-5y=3\\ x+2y=6\\ 2x+y=7\end{cases}$$

解 超定方程组的矩阵表示

$$Ax=b$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & -5\\1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\3\\6\\7\end{bmatrix}$$

而

$$A^T A=\begin{bmatrix}30 & 3\\3 & 49\end{bmatrix},\quad A^T b=\begin{bmatrix}33 & 9\end{bmatrix}^T$$

则法方程组为

$$\begin{bmatrix}30 & 3\\3 & 49\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}33\\9\end{bmatrix}$$

求得法方程组的解为

$$\begin{cases}x_1 = 2.979\\x_2 = 1.2259\end{cases}$$

这也就是超定方程组的最小二乘解。

数值积分和数值微分

6.1　内容提要

一.　　数值积分概述

1. 基本思想

定积分 $I(f)=\int_a^b f(x)dx$ 的数值积分公式为

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

其中 x_i 称为求积节点，$a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$，$A_k$ ($k = 0,1,\ldots,n$)称为求积系数。

$$R(f)=I(f)-\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

称为求积余项。

2. 代数精度

定义 6-1 求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

对任意不超过 m 次的代数多项式均准确成立，而对于 $f(x) = x^{m+1}$ 不能准确成立，则称该求积公式具有 m 次代数精度。

定理 6-1 对于给定的 n+1 个不同节点 x_k, $k = 0,1,\ldots,n$, 总存在求积系数 A_k，使求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

至少具有 n 次代数精度。

2. 插值求积公式

定义 6-2 求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的系数

$$A_k=\int_a^b l_k(x)dx$$

则称求积公式为插值求积公式。

定理 6-2 $n+1$ 个节点的求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

至少具有 n 次代数精度的充要条件是该公式是插值求积公式。

3. 构造插值求积公式

1) 在积分区间 [a,b] 上选取节点 x_k, $k = 0,1,\ldots,n$。

2) 求出 $f(x_i)$及利用 $A_k = \int_a^b l_k(x)\,dx$ 或解关于 A_k 的线性方程组确定 A_k.

3) 用 $f(x) = x^{n+1}$ ，...，验算所构造求积公式的代数精度。

二. 牛顿-科特斯公式

1. 公式的导出

牛顿-科特斯公式是等距节点插值求积公式，即

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k f(a+kh)$$

其中 $h = \frac{b-a}{n}$，$C_k = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{t-i}{k-i}dt$ 称为科特斯系数。

科特斯系数 C_k 与积分区间 [a,b] 及被积分函数 f(x) 无关，仅与 [a,b] 的等分数 n 有关，此外还有如下性质：

1) 科特斯系数之和为 1，即

$$\sum_{k=0}^{n} C_k = 1$$

2) 科特斯系数具有对称性，即

$$C_k = C_{k-n}$$

3) 科特斯系数可能为负。

实用的牛顿-科特斯公式只是低阶公式。

n = 1 时，梯形公式

$$T = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

n = 2 时，辛普森公式

$$S = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

n = 4 时，科特斯公式（或称布尔公式）

$$C = \frac{b-a}{90}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_3) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

式中 $x_k = a + kh$, $k = 0,1,2,3,4$; $h = \frac{b-a}{4}$。

2. 牛顿-科特斯公式的代数精度

定理 6-3 当 n 为偶数时，牛顿-科特斯公式有 n+1 次代数精度。

3. 低阶牛顿-科特斯公式的余项

定理 6-4 若 f(x) 在[a,b]上有连续的二阶导数，则梯形公式的余项

$$R_\gamma = -\frac{(b-a)^3}{12} f^{n}(\eta) \qquad a \le \eta \le b$$

定理 6-5 若 f(x)在[a,b]上有连续的四阶导数，则辛普森公式的余项

$$R_s = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta) \quad a \le \eta \le b$$

定理 6-6 若 f(x)在[a,b]上有连续的六阶导数，则科特斯公式的余项

$$R_c = -\frac{8}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 f^{(6)}(\eta) \quad a \le \eta \le b$$

4. 牛顿-科特斯公式的稳定性

定义 6-3 若存在 $\delta > 0$ ，对于给定 $\varepsilon > 0$ ，只要

$$| f(x_k) - \bar{f}(x_k) | \le \delta, \quad k = 0,1,\ldots,n$$

有
$$| I(f) - I(\bar{f}) | = | \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) - \sum_{k=0}^{n} A_k \bar{f}(x_k) | \le \varepsilon$$

则数值求积公式
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

是稳定的。

定理 6-7 数值求积公式
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的求积系数 $A_k > 0$ (k=0,1,...,n) 时，求积公式是稳定的。

5.复化求积法

将积分区间[a,b]分成 n 等份，每一份成为一个子区间，其长度 $h = \frac{b-a}{n}$，分点为 $x_k = a + kh$, k=0,1,...,n。复化求积是利用区间[a,b]上的积分值等于每一个子区间积分值之和

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

来求积。因此先用低阶求积公式求出各个子区间上积分的近似值，然后累加求和作为区间[a,b]上的积分近似值。

［1］ 复化梯形公式及余项

$$T_n = \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)] \qquad R_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) \quad a \le \eta \le b$$

［2］ 复化辛普森公式及余项

$$S_n = \frac{h}{6}\{f(a) - f(b) + \sum_{k=1}^{n} [4 f(x_{k-\frac{1}{2}}) + 2 f(x_k)]\}$$

$$R_s = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta) \quad a \le \eta \le b$$

［3］ 复化科特斯公式及余项

$$C_n = \frac{h}{90}[7 f(a) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

$$+32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}})+12\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)+7f(a)]$$

$$R_c=-\frac{2(b-a)}{945}(\frac{h}{4})^6 f^{(6)}(\eta) \quad a\le\eta\le b$$

三. 变步长求积和龙贝格算法

1. 变步长梯形求积法

复化求积公式中，在对区间[a,b] n 等分的基础上再 2 等分，新增加分点为 $x_{k+\frac{1}{2}}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$，此时有变步长梯形公式

$$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

把区间 n 等分时，复化梯形公式的余项

$$R_n=I-T_n=-\frac{b-a}{12}(\frac{b-a}{n})^2 f^{n}(\eta_n)$$

再将区间分半为 2n 等分时，复化梯形公式的余项

$$R_{2n}=I-T_{2n}=-\frac{b-a}{12}(\frac{b-a}{n})^2 f^{n}(\eta_{2n})$$

当 $f^{n}(x)$ 在[a,b]上变化不大时，有 $f^{n}(\eta_n)\approx f^{n}(\eta_{2n})$，这样

$$\frac{I-T_{2n}}{I-T_n}\approx\frac{1}{4}$$

整理后，有验后误差估计式

$$I-T_{2n}\approx\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$$

2. 龙贝格算法

将积分区间分成 n 等份和 2n 等份，求得积分近似值 T_n 和 T_{2n}，并有误差估计式

$$I-T_{2n}\approx\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$$

又可写成

$$I\approx T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{4}T_n$$

上式右端即是辛普森法的积分值 S_n，即 $S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$

同样对辛普森法的两个积分值 S_n 和 S_{2n} 进行线性外推可得科特斯法的积分值 C_n，即有

$$C_n=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n$$

同样，对科特斯法的两个积分值 C_n 和 C_{2n}，进行线性外推可得龙贝格公式

$$R_n=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n$$

在步长二分的过程中运用 S_n，C_n，R_n 表达式加工三次，使粗糙的积分值 T_n 逐步加工成高精度的龙贝格值 R_n，这种加速方法就是龙贝格算法。

四. 高斯型求积公式

1. 概述

定义 6-4 使插值求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$有 2n + 1 次代数精度的节点 x_k (k=0,1,...n)称为高斯点，该求积公式称为高斯型求积公式。

定理 6-8 节点 x_k (k=0,1,...n)是高斯点的充要条件是以这些点为零点的多项式

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_k)$$

与任意次数不超过 n 的多项式 p(x)均正交，即

$$\int_a^b P(x)\omega(x)dx = 0$$

高斯型求积公式的求积系数和余项分别是

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}dx$$

$$R_n = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega^2(x)dx \quad a \le \eta \le b$$

2. 高斯-勒让德求积公式

［1］ 区间的变换

对区间[a,b]作变换

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

可以变换到区间[-1,1]上，即 $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\psi(t)dt$

其中$\psi(t) = f(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2})$

高斯-勒让德求积公式是在[-1,1]上的求积公式。

［2］ 高斯点的求取

定理 6-9 若 $x_0, x_1, ..., x_n$ 是高斯点，则以这些点为根的多项式 ω(x)是最高次幂系数 1 的 n + 1 次勒让德多项式$\tilde{L}_{n+1}(x)$，即 $\omega(x) = \tilde{L}_{n+1}$ (x

其中

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}$$

［3］ 求积系数的求取

定理 6-10 高斯-勒让德求积公式中的求积系数均为正，且

$$A_k = \frac{2}{1-x_k^2}[\frac{\omega(1)}{\omega'(x_k)}]^2 = \frac{2}{(1-x_k^2)[L'_{n+1}(x_k)]^2}, \quad k = 0,1,...$$

其中 $\tilde{L}_{n+1}(x)$ 是 n + 1 次勒让德多项式的导数。

［4］　余项

高斯-勒让德求积公式的余项

$$R=\frac{2^{2n+3}}{2n+3}\frac{[(n+1)!]^4}{[2(n+2)!]^3}f^{(2n+2)}(\eta)\quad -1<\eta<1$$

3. 带权的高斯型求积公式

将被积函数 f(x)换成 f(x)与权函数 ρ(x)的乘积，则有带权的高斯型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

权函数常取

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad e^{-x},\quad e^{-x^2}$$

4. 高斯-切比雪夫求积公式

高斯-切比雪夫求积公式及余项

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx\approx\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f(x_k)$$

$$R(f)=\frac{2\pi}{2^{2(n+1)}(2n+2)!}f^{(2n+1)}(\eta)\quad \eta\in[-1,1]$$

五．数值微分

1. 机械求导法

常用的中点方法是　$f'(a)\approx\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

2. 插值求导公式

两点公式

$$p'(x_0)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]$$
$$p'(x_1)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]$$

三点公式

$$f'(x_0)\approx p'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]$$
$$f'(x_1)\approx p'(x_1)=\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]$$
$$f'(x_2)\approx p'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]$$

6.2 习题及解答

1. 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明确定的求积公式具

有的代数精度。

（1）$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx Af(-h) + Bf(x_1)$

解　求积公式$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx Af(-h) + Bf(x_1)$，有 A，B，$x_1$三个未知数，令求积公式对 $f(x) = 1, x, x^2$ 均准确成立，有

$$\begin{cases} A + B = 2h \\ -hA + x_1 B = 0 \\ h^2 A + x_1^2 B = \frac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2}h, B = \frac{3}{2}h, x_1 = \frac{1}{3}h$$

所以求积公式为$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{1}{2}hf(-h) + \frac{3}{2}hf(\frac{1}{3})h$，其代数精度至少为 **2** 次。

将 $f(x) = x^3$，代入求积公式，左边=**0**，右边$= -\frac{4}{9}h^4$，左边$\neq$右边。求积公式只有 **2** 次代数精度。

十、$\int_0^{3h} f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(2h)$

解　求积公式$\int_0^{3h} f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(2h)$，有 A_0，A_1，A_1，三个未知数，令求积公式 $f(x) = 1, x, x^2$ 均准确成立，有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 3h \\ A_1 h + A_2 2h = \frac{9}{2}h^2 \\ A_1 h^2 + A_2 4h^2 = 9h^2 \end{cases}$$

解之，得

$$A_0 = \frac{3}{4}h, A_1 = 0, A_3 = \frac{9}{4}h$$

所以求积公式为

$$\int_0^{3h} f(x)dx \approx \frac{3}{4}hf(0) + \frac{9}{4}hf(2h)$$

其代数精度至少为 **2** 次。

将将 $f(x) = x^3$，代入求积公式，左边=$\frac{81}{4}h_4$，右边$= 18h^4$，左边$\neq$右边。求积公式只有 **2** 次代数精度。

2. 求积公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$$

已知其余项 $R[f]=kf^{(3)}(\xi)$，$\xi\in(0,1)$，确定求积系数 A_0，A_1，B_0，是求积公式具有尽可能高的代数精度，并给出其具有的代数精度及求积公式余项。

解 求积公式有 A_0，A_1，B_0，三个未知数，令求积公式对 $f(x)=1,x,x^2$ 准确成立，从而有

$$\begin{cases} A_0+A_1=1 \\ A_1+B_0=\dfrac{1}{2} \\ A_1=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$A_1=\dfrac{1}{3}$，$A_0=\dfrac{2}{3}$，$B_0=\dfrac{1}{6}$，则有 $\int_0^1 f(x)dx\approx\dfrac{2}{3}f(0)+\dfrac{1}{3}f(1)+\dfrac{1}{6}f'(0)$

将 $f(x)=x^3$ 代入上式，左端=$\dfrac{1}{4}$，右端=$\dfrac{1}{3}$，两端不等，求积公式对 $f(x)=x^3$ 不能准确成立，故只有 2 次代数精度。

为求余项，将 $f(x)=x^3$ 代入

$$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0)+kf^{(3)}(\xi)$$

当 $f(x)=x^3$，$f^{(3)}(x)=6$ 时，上式成为

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+6k$$

解出 $k=-\dfrac{1}{72}$，余项 $R[f]=-\dfrac{1}{72}f^{(3)}(\xi)$，$\xi\in(0,1)$。

3. 确定求积公式中的待定系数 a，使其代数精度尽量高，并指出其具有的代数精度及余项。

$$\int_0^h f(x)dx\approx\frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+ah^2[f'(0)-f'(h)]$$

解 当 $f(x)=1$ 时，左边 $\int_0^h f(x)dx=h$，右边 $\dfrac{h}{2}(1+1)=h$，两边相等。

当 $f(x)=x$ 时，左边 $\int_0^h xdx=\dfrac{h^2}{2}$，右边 $\dfrac{h}{2}(0+h)+ah^2(1-1)=h$，两边相等。

取 $f(x)=x^2$ 时，代入求积公式，令其两端精确相等，有

$$\frac{1}{3}h^3=\frac{h}{2}(0+h^2)+ah^2(-2h)$$

解之，$a=\frac{1}{12}$。

为求代数精度，取 $f(x)=x^3$ 代入已确定的求积公式

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]$$

左边是 $\frac{h^4}{4}$，右边是 $\frac{h^4}{4}$，两边相等。

再取 $f(x)=x^4$ 代入时，左边是 $\frac{h5}{5}$，右边是 $\frac{h^5}{6}$，两边不严格相等，所以求积公式只有 3

次代数精度。设其余项为 $kf^4(\xi),\xi\in(0,h)$，将 $f(x)=x^4$ 代入

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]+kf^{(4)}(\xi)$$

可得 $\frac{h5}{5}=\frac{h^6}{6}+k4!$，解之，$k=\frac{h^5}{720}$，所以余项

$$R[f]=\frac{h^5}{720}f^{(4)}(\xi),\quad \xi\in(0,1)$$

4. 指出下列数值求积公式的代数精度，并问是否为差值求积公式。

（1）$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

解　对基函数积分 $$\int_{-1}^1 l_0(x)dx=\int_{-1}^1\frac{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}dx=1$$

$$\int_{-1}^1 l_1(x)dx=\int_{-1}^1\frac{x+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}dx=1$$

故求积公式 $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 是差值求积公式，可以验证求积公式对

$f(x)=1,x,x^2,x^3$，准确成立，而对 $f(x)=x^4$ 不能准确成立，故其有 **3** 次代数精度。

（**2**）$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(-1)+ f(0)+\frac{1}{2}f(1)$

解 设 $f(x)=1$，$\int_{-1}^{1} 1dx=2$，$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=2$

设 $f(x)=x$，$\int_{-1}^{1} xdx=0$，$-\frac{1}{2}+1\times 0+\frac{1}{2}=0$

设 $f(x)=x^2$，$\int_{-1}^{1} x^2dx=\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}+1\times 0+\frac{1}{2}=1$

故求积公式只有 **1** 次代数精度，**3** 个节点的求积公式不具有 **2** 次代数精度，故不是差值求积公式。

（**3**）$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0)$

解 该求积公式是用 $f(0)$ 近似代替 $f(x)$ 得到的，$f(0)$ 近似代替 $f(x)$ 是零次差值，故是差值求积公式，该公式对 $f(x)$ =**1**，x 准确成立，而对 $f(x)=x^2$ 不准确成立，故代数精度为 **1** 次，该公式的几何意义是中矩形公式，即是 $n=0$ 时高斯型求积公式。

5. 证明柯特斯系数 C_k 可由下列方程组求得

$$\sum_{k=0}^{n} C_k x_k^i=\frac{1}{i+1}, i=0,1,\dots,n, x_k=\frac{k}{n}, k=0,1,\dots,n$$

证 由于柯特斯系数 C_k 与积分区间 $[a,b]$ 的端点 a，b 无关，故取 $[a,b]$ 为 $[0,1]$，牛顿-柯特斯公式对函数

$$f(x)=x^i, i=0,1,\dots,n$$

准确成立，于是有

$$\int_0^1 x^i dx=\sum_{k=0}^{n} C_k x_k^i$$

即是

$$\sum C_k(\frac{k}{n})^i=\frac{1}{i+1} \qquad i=0,1,\dots n$$

这样科特斯系数 C_k 可由上式直接求得。

例如，当 $n=2$ 时，有

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = 1 \\ C_1 + 4C_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

由方程组的第 **2**、**3** 式解出 $C_1 = \frac{2}{3}$， $C_2 = \frac{1}{6}$，再代入第 **1** 式有 $C_0 = \frac{1}{6}$。

为方便起见积分式也可以写成

$$\sum_{k=1}^{n} k^i C_k = \frac{n^i}{i+1} \qquad i = 1,2,\ldots n$$

即有线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^n & \cdots & n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{n}{2} \\ \dfrac{n^2}{3} \\ \vdots \\ \dfrac{n^n}{n+1} \end{bmatrix}$$

线性方程的系数矩阵是范德蒙矩阵，可唯一地解出 $C_k, k = 1,2,\cdots,n$,再由 $\sum_{k=0}^{n} C_k = 1$ 求出 C_0。

例如，当 $n = 2$ 时，有线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{2} \\ \dfrac{2^2}{3} \end{bmatrix}$$

解出

$$C_1 = \frac{2}{3}，\ C_2 = \frac{1}{6}$$

再由 $C_0 + C_1 + C_2 = 1$，求得 $C_0 = \frac{1}{6}$。

6.用梯形公式、辛普森公式和科特斯公式求积分 $\int_0^1 e^x dx$ ，并与精确值比较。

解 梯形公式

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{2}(e^1 + e^0) \approx \frac{1}{2} \times 3.718 = 1.859$$

辛普森公式

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{6}(e^0+4\times e^{\frac{1}{2}}+e^1)\approx\frac{1}{6}\times 10.313\approx 1.71886$$

科特斯公式

$$x_k=a+kh, k=0,1,2,3,4, h=\frac{b-a}{4}, x_0=0, x_1=\frac{1}{4}, x_2=\frac{1}{2}, x_3=\frac{3}{4}, x_4=1$$

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{90}(7\times e^0+32\times e^{\frac{1}{4}}+12\times e^1+32\times e^{\frac{3}{4}}+7\times e^1)\approx\frac{1}{90}\times 154.64544=1.718283$$

和精确值 $\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = 1.7182818\cdots$ 比较，梯形公式有 **1** 位有效数字，辛普森公式有 **3** 位有效数字，科斯特公式有 **6** 位有效数字。

7. 导出中矩形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 的余项。

解 将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处进行泰勒展开

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

其中 $\xi\in[a,b]$。

对上式两边在 $[a,b]$ 上积分，有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx+\int_a^b f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})dx+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$
$$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\int_a^b f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})dx+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$

中矩形公式的余项

$$R_M=\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(\frac{a+b}{2})=\int_a^b f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})dx$$

即

$$R_M=\frac{1}{24}f''(\eta)(b-a)^3, \eta\in[a,b]$$

8. 若 $f''(x)>0$，证明有梯形公式计算积分 $I=\int_a^b f(x)d(x)$ 所得结果比准确值大，并说明其几何意义。

证 梯形公式的余项

$$R(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta),\eta\in[a,b]$$

若$\eta\in[a,b]$， $f''(\eta)>0$，则$R(f)<0$，从而

$$I=\int_a^b f(x)d(x)=T+R(f)<T$$

即用梯形公式计算积分所得结果比准确值大。

几何意义是 $f''(x)>0$ 时， $f(x)$ 为下凹函数，梯形面积大于曲边梯形面积。

9.设某物体垂直于 x 轴的可变截面面积为$S(x)$，且

$$S(x)=A(x)^3+Bx^2+Cx+D \qquad a\le x\le b$$

其中 A,B,C,D 为常数，则此物体界于 $x=a$ 及 $x=b$ 间的体积

$$V=\frac{b-a}{6}\left[S(a)+4S(\frac{a+b}{2})+S(b)\right]$$

证 由于辛普森公式

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$$

对于不超过 **3** 次的多项式精确成立，故对 $S(x)$ 应成立

$$\int_a^b S(x)dx=\frac{b-a}{6}\left[S(a)+4S(\frac{a+b}{2})+S(b)\right]$$

上式左边即为所求体积V，即

$$V=\frac{b-a}{6}\left[S(a)+4S(\frac{a+b}{2})+S(b)\right]$$

用这个体积公式可以求圆台、圆柱、圆锥、棱柱、棱锥、球缺、球台和球等的体积，因此在立体几何中常把这个公式称为计算体积的“万能公式”。

10.导出计算球、球台的体积公式。

解 先考虑半球，设球半径为R，由上题有$S(a)=0$，$S(b)=\pi R^2$，中截面半径为r，

则$r^2=R^2-(\frac{R}{2})^2=\frac{3}{4}R^2$，中截面面积$\pi r^2=\frac{3}{4}\pi R^2$,利用“万能公式”，则有半球的体积

$$V_1=\frac{R}{6}\left(0+4\times\frac{3}{4}\pi R^2+\pi R^2\right)=\frac{2}{3}\pi R^3$$

故球体积

$$V = 2V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

关于球台只讨论两底面位于同一半球的情形。设球台下、中、上底面距球心高度分别为a，$a+\frac{H}{2}$，$a+H$,半径分别为r_0，r，r_1，则有$r_0^2 = R^2 - a^2$，又有

$$r^2 = R^2 - (a+\frac{H}{2})^2 = R^2 - (a^2 + aH + \frac{H^2}{4})$$

$$r_1^2 = R^2 - (a+H)^2 = R^2 - (a^2 + 2aH + H^2)$$

两式相减，可得

$$r_0^2 - r^2 = aH + \frac{H^2}{4}\text{，即有 } aH = r_0^2 - r^2 - \frac{H^2}{4}$$

$$r^2 - r_1^2 = aH + \frac{3H^2}{4} = (r_0^2 - r^2 - \frac{H^2}{4}) + \frac{3H^2}{4}$$

对上式简化，可得 $r^2=\frac{1}{2}\left(r_0^{\ 2}+r_1^{\ 2}+\frac{H^2}{2}\right)$

利用“万能公式”有球台体积

$$V=\frac{H}{6}(s_0+4s+s_1)=\frac{\pi H}{6}\left[r_0^{\ 2}+2\left(r_0^{\ 2}+r_1^{\ 2}+\frac{H^2}{2}\right)+r_1^{\ 2}\right]$$

$$V=\frac{\pi H}{6}\left[3(r_0^{\ 2}+r_1^{\ 2})+H^2\right]$$

11.若给定求积分 $\int_0^{0.5} f(x)dx$ 的数值求积公式，试利用它写出计算 $\int_{-1}^{1.5} f(x)dx$ 的复化求积公式。

解 设求积公式 $\int_0^{0.5} f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$，则有

$$\int_{-1}^{1.5} f(x)dx=\int_{-1}^{-0.5} f(x)dx+\int_{-0.5}^{0} f(x)dx+\int_0^{0.5} f(x)dx+\int_{0.5}^{1} f(x)dx+\int_1^{1.5} f(x)dx$$

$$=\int_0^{0.5} f(x-1)dx+\int_0^{0.5} f(x-0.5)dx+\int_0^{0.5} f(x)dx+\int_0^{0.5} f(x+0.5)dx+\int_0^{0.5} f(x+1)dx$$

$$=\int_0^{0.5}\left[f(x-1)+f(x-0.5)+f(x)+f(x+0.5)+f(x+1)\right]dx$$

$$\approx\sum_{k=0}^{n}A_k[f(x_k-1)+f(x_k-0.5)+f(x_k)+f(x_k+0.5)+f(x_k+1)]$$

12.分别用复化的梯形公式和复化的辛普森公式计算下列积分。

（**1**）$\int_0^1\frac{x}{4+x^2}dx$，**n=8** （用 **9** 个点上的函数值计算）

解 复化梯形法

用 **9** 个点上的函数值计算时，**n=8**，所以 $h=\frac{1}{8}$。

$$T_8=\frac{h}{2}[f(0)+2\sum_{k=1}^{7} f(x_k)+f(1)]$$

$$=\frac{1}{2\times 8}\left[f(0)+2\times[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{2}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{4}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{6}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)+f(1)\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[0+2\left(\frac{8}{257}+\frac{16}{260}+\frac{24}{265}+\frac{32}{272}+\frac{40}{281}+\frac{48}{292}+\frac{56}{305}\right)+\frac{1}{5}\right]$$

=0.111402354

复化辛普森法：

用 9 个点上的函数值计算时，n=4，$h=\frac{1}{4}$

$$S_4=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{3}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+2\sum_{k=1}^{3}f(x_k)+f(b)\right]$$

$$=\frac{1}{6\times 4}\left[f(0)+4[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)]+2[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)]+f(1)\right]$$

$$=\frac{1}{24}\left[0+4\left(\frac{8}{257}+\frac{24}{265}+\frac{40}{281}+\frac{56}{305}+\frac{144}{1105}\right)+2\left(\frac{16}{260}+\frac{32}{272}+\frac{48}{292}\right)\right]$$

=0.111 571 813

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-\sin^2\varphi}\,d\varphi$ (用 7 个点上的函数值计算)

解：设 $f(\varphi)=\sqrt{4-\sin^2\varphi}$，取 $h=\frac{1}{6}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{36}$，计算 7 个点上的函数值

φ	0	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{2\pi}{36}$	$\frac{3\pi}{36}$	$\frac{4\pi}{36}$	$\frac{5\pi}{36}$	$\frac{6\pi}{36}$
$f(\varphi)$	2	1.99810	1.99245	1.98318	1.97054	1.95484	1.93649

复化梯形法：

用 7 个点上的函数值计算，n=6，$h=\frac{\pi}{36}$ 有

$$T_6=\frac{1}{6}\times\frac{\pi}{36}[2+2\times(1.99810+1.99245+1.98318+1.97054+1.95484)+1.93649]$$

=1.03562

复化辛普森法：

用 7 个点上的函数值计算，$n=3,h=\frac{\pi}{18}$ 有

$$S_3=\frac{1}{6}\times\frac{\pi}{18}[2+4\times(1.99810+1.98313+1.95484)+2\times(1.99245+1.97054)+1.97049]$$

=1.03576

13 给定定积分 $I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$

（1） 利用复化梯形公式计算上述积分值，使其截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-3}$。

（2） 取同样的求积节点，利用复化的辛普森公式时，截断误差是多少？

（3） 要求截断误差不超过 10^{-6} 时，若用复化的辛普森公式，应取多少个函数值？

解：因为

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\int_0^1\cos(xt)dt$$

所以

$$f^{(k)}(x)=\int_0^1\frac{d^k}{dx^k}\cos(xt)dt=\int_0^1 t^k\cos\left(xt+\frac{k}{2}\pi\right)dt$$

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \le \int_0^1 t^k \left|\cos\left(xt + \frac{k}{2}\pi\right)\right| dt \le \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1} \mid$$

要使复化梯形公式应满足误差要求，需

$$\left|R[f]\right| = \left|\frac{1-0}{12} h^2 f^{(2)}(\xi)\right| \le \frac{1}{12} h^2 \frac{1}{3} \le \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

即可 $\quad h \le \sqrt{18 \times 10^{-3}} = 0.1342$

$$n \geq \frac{1-0}{0.1342} \approx 7.4516$$

故将区间【0,1】至少 8 等分（取 $h = 0.125$ ）时，可使截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-3}$。此时

$$I \approx T_8 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{8}[1+2(0.9974+0.9896+0.9767+0.9589+0.9362+0.9089+0.8772)+0.8415] = 0.9457$$

（2）对于同样点数用复化辛普森公式，$h = \frac{1}{4}$，其截断误差

$$|R[f]| = \left|\frac{1-0}{2880}h^4 f^{(4)}(\xi)\right| \leq \frac{1}{2880}\left(\frac{1}{4}\right)^4\frac{1}{5} = 0.271\times 10^{-6}$$

（3）要使利用复化辛普森公式时误差不超过 10^{-6}，需使

$$|R[f]| \leq \frac{1}{2880}\left(\frac{1}{n}\right)^4\frac{1}{5} \leq 10^{-6}$$

即 $n^4 \geq 69.4, n \geq 2.8$, 故需将【0,1】至少 3 等分，取 7 个节点处得函数值。

14. 计算椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的周长 l，使其结果具有 5 位有效数字。

解　令 $x = 2\cos\theta, y = \sin\theta$，则椭圆周长可表示为线积分

$$l = \int_L d_s = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\sin^2\theta}\,d\theta$$

记 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\sin^2\theta}\,d\theta$，则 $\frac{\pi}{2} < I < \pi, I$ 有 1 为整数，要使其有 5 位有效数字，需使截断误差 $\leq \frac{1}{2}\times 10^{-4}$。利用区间逐次分半，由复化梯形公式计算，用事后误差估计来控制是否结束计算，其计算结果

k	等分	T_{2^k}	$\left\vert T_{2^k} - T_{2^{k-1}}\right\vert$
0	1	2.356 194 5	
1	2	2.419 920 78	0.063 726 3
2	4	2.422 103 10	0.002 182 32
3	8	2.422 112 06	0.000 008 958

故取 $I \approx T_8 = 2.4221$, 则 I 有 5 位有效数字，从而所求椭圆周长为 $l = 4I \approx 9.6884$ 。

15. 计算积分 $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$

（1） 用变步长梯形法，要求误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-3}$。

（2）用加速辛普森法，要求验后误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-6}$。

解 （1）对区间[0,1]用梯形公式，$f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $f(0)=1$, $f(1)=0.8414710$

$$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=0.9207355$$

将步长折半，$f\left(\frac{1}{2}\right)=0.958\,851\,0$，则由变步长梯形公式

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=0.939\,793\,3$$

误差估计$|T_2-T_1|=0.019\,057\,8=19.057\,8\times 10^{-3}>\frac{1}{2}\times 10^{-3}$

再将步长折半，$f\left(\frac{1}{4}\right)=0.989\ 615\ 8$， $f\left(\frac{1}{4}\right)=0.908\ 851\ 6$，有

$$T_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]=0944\ 513\ 5$$

误差估计 $\left|T_4-T_2\right|=4.720\ 2\times10^{-3}>\frac{1}{2}\times10^{-3}$

再将步长折半，$f\left(\frac{1}{8}\right)=0.997\ 397\ 9$，$f\left(\frac{3}{8}\right)=0.976\ 726\ 7$，$f\left(\frac{5}{8}\right)=0.936\ 155\ 1$，$f\left(\frac{7}{8}\right)=$ $0.877\ 192\ 6$,有

$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]=0.945\ 690\ 9$$

误差估计 $\left|T_8-T_4\right|=1.177\ 4\times10^{-3}>\frac{1}{2}\times10^{-3}$

再将步长折半，则由变步长梯形公式

$$T_{16}=0.945\ 985\ 4$$

误差估计 $\left|T_{16}-T_8\right|=0.294\ \times10^{-3}<\frac{1}{2}\times10^{-3}$

所以有

$$I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx0.945\ 985\ 4$$

(2) 利用加速公式

$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=\frac{4}{3}\times0.939\ 793\ 3-\frac{1}{3}\times0.920\ 735\ 5=0.946\ 145\ 9$$

步长折半

$$S_2=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2=\ 0.946\ 086\ 9$$

误差估计

$$\left|I-S_2\right|\approx\frac{1}{15}\left|S_2-S_1\right|=0.39\times10^{-6}>\frac{1}{2}\times10^{-6}$$

不满足要求，再将步长折半

$$S_4=\frac{4}{3}T_8-\frac{1}{3}T_4=0.946\ 083\ 2$$

误差估计

$$\left|I-S_4\right|\approx\frac{1}{15}\left|S_4-S_2\right|=0.24\times10^{-6}<\frac{1}{2}\times10^{-6}$$

已满足要求，故取

$$I\approx S_4=0.\ 9460832$$

16. 用龙贝格方法计算积分

$$\mathbf{I=\int_0^1\frac{4}{1+x^2}dx}$$

要求相邻两次龙贝格值的偏差不超过$\mathbf{10^{-5}}$

解 令 $f(x)=\frac{4}{1+x^2}$，$a=0$，$b=1$，则由复化梯形公式，得

$$T1=\frac{b-a}{2}\times[f(a)+f(b)]=\frac{1-0}{2}[f(a)+f(b)]=3$$

$$T2=\frac{1}{2}T1+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}[3+f(\frac{1}{2})]=3.1$$

$$T4=\frac{1}{2}T2+\frac{b-a}{4}[f(\frac{3a+b}{4})+f(\frac{a+3b}{4})]=\frac{3.1}{2}+\frac{1}{4}[f(0.25)+f(0.75)]$$

$$=3.1311765$$

$$T8=\frac{1}{2}T4+\frac{b-a}{8}[f(\frac{7a+b}{8})+f(\frac{5a+3b}{8})+f(\frac{3a+5b}{8})+f(\frac{a+7b}{8})]$$

$$=\frac{1}{2}3.1311765+\frac{1}{8}[f(0.125)+f(0.375)+f(0.625)+f(0.875)]$$

$$=3.1389885$$

$$S1=\frac{4}{3}T2-\frac{1}{3}T1=3.3133333$$

$$S2=\frac{4}{3}T4-\frac{1}{3}T2=3.1415678$$

$$S4=\frac{4}{3}T8-\frac{1}{3}T4=3.1415925$$

$$C1=\frac{16}{15}S2-\frac{1}{15}S1=3.1421179$$

此时

$$|C_1-S_2|=\frac{1}{15}|S_2-S_1|=0.549\times 10\text{-}3>10\text{-}5$$

$$C2=\frac{16}{15}S4-\frac{1}{15}S2=3.1415941$$

有

$$|C_2-S_4|=\frac{1}{15}|S_4-S_2|=0.1587\times 10^{-6}<10^{-5}$$

所以取

$$I=\int_0^1\frac{4}{1+x^2}dx\approx 3.14159$$

17. 证明求积公式 $\int_0^1 f(x)\,dx\approx\frac{1}{9}[5f(\sqrt{0.6})+8f(0)+5f(-\sqrt{0.6})]$，对于不高于 5 次的多项式是准确的，并计算积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{1+x}dx$

证 方法一：

$f(x)=1$ 代入求积公式：左边=2，右边$=\frac{1}{9}(5\times1+8\times1+5\times1)=2$，左边=右边。

$f(x)=x$ 代入求积公式：左边=0，右边$=\frac{1}{9}\left[5\times\sqrt{0.6}+8\times0+5\times\left(-\sqrt{0.6}\right)\right]=0$，左边=右边。

$f(x)=x^2$ 代入求积公式：左边$=\frac{2}{3}$，右边$=\frac{1}{9}[5\times0.6+8\times0+5\times0.6]=\frac{2}{3}$，左边=边=右边。

$f(x)=x^3$ 代入求积公式：左边=0，右边$=\frac{1}{9}\left[5\times\left(\sqrt{0.6}\right)^3+8\times0+5\times\left(-\sqrt{0.6}\right)^3\right]=0$，左边=右边。

$f(x)=x^4$ 代入求积公式：左边$=\frac{2}{5}$，右边$=\frac{1}{9}\left[5\times0.6^2+8\times0+5\times0.6^2\right]=\frac{2}{5}$，左边=右边。

$f(x)=x^5$ 代入求积公式：左边=0，右边$=\frac{1}{9}\left[5\times\left(\sqrt{0.6}\right)^5+8\times0+5\times\left(-\sqrt{0.6}\right)^5\right]=0$，左边=右边。

$f(x)=x^6$ 代入求积公式：左边$=\frac{2}{7}$，右边$=\frac{1}{9}\left[5\times0.6^3+8\times0+5\times0.6^3\right]=\frac{6}{25}$，左边$\neq$右边。所以其代数精确度为5次。

方法2：

积分区间为$[-1,1]$故可验证给定的求积公式是高斯－勒让德求积公式。

在$[-1,1]$上，三次勒让德多项式

$$p(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$

的三个零点分别是

$$x_0=\sqrt{0.6},\ x_1=0,\ x_2=-\sqrt{0.6}$$

再由三点高斯-勒让德求积公式，其代数精度为5次。实际上，求积公式为高斯求积公式，具有5次代数精度。

计算积分$\int_0^1\frac{\sin x}{1+x}dx$, 将$x\in[-1,1]$, 所以，令$x=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}$

$$\int_0^1\frac{\sin x}{1+x}dx=\int_{-1}^1\frac{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dt=\int_{-1}^1\frac{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)}{3+t}dt$$

$$\approx\frac{1}{9}\left[5\times\frac{\sin(\frac{\sqrt{0.6}}{2}+\frac{1}{2})}{3+\sqrt{0.6}}+8\times\frac{\sin(0+\frac{1}{2})}{3+0}+5\times\frac{\sin(-\frac{\sqrt{0.6}}{2}+\frac{1}{2})}{3-\sqrt{0.6}}\right]\approx0.284\ 249$$

18 在区间[-1,1]上，取$x_1=-\lambda$，$x_2=0$，$x_3=\lambda$，构造插值求积公式，并求它的代数精度。

解 已知节点$x_1=-\lambda$，$x_2=0$，$x_3=\lambda$，设求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_{-1} f(-\lambda)+A_0 f(0)+A_1 f(\lambda)$$

因有四个未知数，设求积公式对于$f(x)=1$，x，x^2，x^3，x^4均成立，因而有

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=2 \\ -\lambda A_{-1}+0+\lambda,=0 \\ \lambda^2 A_{-1}+0+\lambda^2 A_1=\frac{2}{3} \\ \lambda^3 A_{-1}+0+\lambda^3 A_1=0 \end{cases}$$

方程组中第 2、4 式不独立，再取$f(x)=x^5$有

$$\lambda^4 A_{-1}+0+\lambda^4 A_1=\frac{2}{5}$$

解上述五个方程得

$$A_0=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}\ A_{-1}=\frac{5}{9}，A_0=\frac{8}{9}，A_1=\frac{5}{9}$$

于是

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

该求积公式的代数精度至少为 5 次。

将$f(x)=x^6$代入求积公式，左边$=\frac{2}{7}$，右边$=\frac{6}{25}$，公式不准确成立。此求积公式的代数精度为 5 次。

实际上，求积公式为高斯求积公式，具有五次代数精度。

19 构造下列形式的高斯求积公式

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)dx \approx \lambda_0 f(x_0)+\lambda_1 f(x_1)$$

解 方法 1：

利用代数精度求解。所求高斯求积公式应具有 3 次代数精度，对$f(x)=1$，x，x^2，x^3，均成立，因而有

$$\begin{cases} A_0+A_1=2 \\ A_0x_0+A_1x_1=\frac{2}{3} \\ A_0x_0^2+A_1x_1^2=\frac{2}{5} \\ A_0x_0^3+A_1x_1^3=\frac{2}{7} \end{cases}$$

为解此方程，可令x_0，x_1为二次方程$x^2+ax+b=0$的两个根。

将式（3）+（2）a+(1)b, 得

$$A_0(x_0^2+ax_0+b)+A_1(x_1^2+ax_1+b)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}a+2b$$

将式(4)+(3)a+(2)b, 得

$$A_0x_0(x_0^2+ax_0+b)+A_1x_1(x_1^2+ax_1+b)=\frac{2}{7}+\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b$$

令x_0，x_1为二次方程 $x^2+ax+b=0$的两个根，有

$$\begin{cases}\frac{1}{5}+\frac{1}{3}a+b=0\\ \frac{1}{7}+\frac{1}{5}a+\frac{1}{3}b=0\end{cases}$$

解得 $a=-\frac{6}{7},b=\frac{3}{35}$

从而有 $x^2-\frac{6}{7}x+\frac{3}{35}=0$

$$\begin{cases}x_0=\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}\\ x_1=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}\end{cases}$$

代入式（1），（2），解得

$$\begin{cases}A_0=1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}\\ A_1=1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}\end{cases}$$

于是所求高斯求积公式

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)d\approx\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}\right)f\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}x_0\right)+\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}\right)f\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}x_0\right)$$

具有三次代数 。

方法 2：

利用正交多项式的零点做高斯点。求积公式是两点高斯求积公式，故可设$w(x)=(x-x_0)(x-x_1)$为$[0,1]$上带权$\frac{1}{\sqrt{x}}$的正交多项式 ，利用正交多项式的性质，有

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} w(x)dx = 0$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}} w(x)dx = 0$$

由 $w(x)=(x-x_0)(x-x_1)=x^2-(x_0+x_1)+x_0x_1$,有

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} w(x)dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}}+x_0x^{\frac{1}{2}}+x_0x_1x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \frac{2}{5}-\frac{2}{3}x_0-\frac{2}{3}x_1+2x_0x_1=0$$

,wo $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}\omega(x)dx = \int_0^1 (x^{\frac{5}{2}}+x_0x^{\frac{3}{2}}-x_1x^{\frac{3}{2}}+x_0x_1x^{\frac{1}{2}})dx = \frac{2}{7}-\frac{2}{5}x_0-\frac{2}{5}x_1+\frac{2}{3}x_0x_1=0$

整理得

$$\begin{cases}\frac{2}{5}-\frac{2}{3}(x_0+x_1)+2x_0x_1=0\\ \frac{2}{7}-\frac{2}{5}(x_0+x_1)+\frac{2}{3}x_0x_1=0\end{cases}$$

令 $u=x_0x_1$，$v=x_0+x_1$， 由上式得

$$\begin{cases}\frac{1}{3}v-u=\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}v-\frac{1}{3}u=\frac{1}{7}\end{cases}$$

解之，得

$$v=-\frac{6}{7},\ u=\frac{3}{35}$$

由韦达定理知，x_0，x_1 为二次方程$x^2-\frac{6}{7}x+\frac{3}{35}=0$的两个根，解之，得

$$\begin{cases}x_0=\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}\\ x_1=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}\end{cases}$$

此外，注意到公式对$f(x)=1$，x 准确成立，因此有

$$\begin{cases}A_0+A_1=2\\ A_0x_0+A_1x_1=\frac{2}{3}\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}A_0=1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}\\ A_1=1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}\end{cases}$$

于是所求高斯求积公式

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)dx \approx \left(1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}\right) f\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}x_0\right)+\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}\right) f\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}x_0\right)$

具有三次代数精度。

20. 用三点高斯-勒让德求积公式计算下列积分。

（1）$\int_0^1 x^2 e^x dx$

解　由题意知，$a=0$ ，$b=1$，作变换

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x^2 e^x dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 (\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})^2 e^{(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})}dt=\frac{1}{8}\int_{-1}^1 (t+1)^2 e^{\frac{1}{2}(t+1)}dt$$

由 $n=2$ 查表得 x_0，x_1，x_2，A_0，A_1，A_2 代入，可得

$$\int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$\approx \frac{1}{8}\left[0.555\,556\times 1.774\,597^2 e^{0.887\,298}+(1-0.774\,597)^2 e^{0.112\,702}+0.888\,889 e^{0.5}\right]$$

$=0.718\,252$

本题的精确解 $\int_0^1 x^2 e^x dx=e-2=0.718\,281\,828$，求积公式计算结果具有4位有效数字。

（2）$\int_1^3 \frac{dy}{y}$

解　由题意知，$a=1$ ，$b=3$ ，作变换

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}=t+2$$

$$\int_1^3 \frac{dy}{y}=\int_{-1}^1 \frac{1}{t+2}dt$$

用三点公式，可得

$$\int_1^3 \frac{dy}{y}=\int_{-1}^1 \frac{1}{t+2}dt\approx\left[0.555\,556\times\left(\frac{1}{2+0.774\,596\,7}+\frac{1}{2-0.774\,596\,7}\right)+0.888\,889\times\frac{1}{2+0}\right]$$

$=1.098\,039$

本题的精确解$\int_1^3 \frac{dy}{y}=\ln 3=1.098\,612\,289$ ，　求积公式计算结果具有4位有效数字。

21. 用三点高斯-切比雪夫求积公式计算积分

$$I=\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

解　由高斯-切比雪夫求积公式

$$I=\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

即

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$$

于是

$$I \approx \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+x_k^2}$$

由 n = 2 ， 即为 3 次公式，于是

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{6}\pi，k = 0，1，2\cdots$$

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}，x_1 = 0，x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

有

$$I \approx \left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}}\right] = 2.630\,411$$

22.已知$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$的数据表

x	1.0	1.1	1.2
f(x)	0.250 0	0.226 8	0.206 8

用三点公式计算$f'(x)$在 x = 1.0，1.1，1.2 的值，并估计误差。

解　　三点求导公式为

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3}f'''(\varepsilon_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}\left[-f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{h^2}{6}f'''(\varepsilon_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3}f'''(\varepsilon_2)$$

在上表中取 $x_0 = 1.0$，$x_1 = 1.1$，$x_2 = 1.2$，分别将有关数据代入上面三式，即可得导数近似值。

由于$\left|f'''(\varepsilon_i)\right| \le \max_{1.0\le x\le 1.2}\left|f'''(x)\right| = \max_{1.0\le x\le 1.2}\left|\frac{4!}{(1+x)^5}\right| = \frac{4!}{2^5} = 0.75$，从而求得误差上限如下所示。

X	1.0	1.1	1.2
三点公式	-0.247	-0.217	-0.187
误差	0.0025	0.00125	0.0025
理论解	-0.25	-0.215 959 4	-0.187 828 7

6. 3 同步练习题及解答

1. 确定下列求积公式的待定系数，使其代数精度尽量高，并指明确定出的求积公式的代数精度。

（1）

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx A_1 f(a) + A_2 f(b) + A_3 f'(a)$$

解 不妨设 $a=0, b=h, b-a=h$，设所求公式的代数精度为2，则当$f(x)=1, x, x^2$ 时，公式变成等式，即

$$\begin{cases} A_1+A_2=h \\ A_2h+A_3=\frac{h^2}{2} \\ A_2h^2=\frac{1}{3}h^3 \end{cases}$$

这是关于未知数A_1，A_2，A_3的三个方程，解之

$$A_1=\frac{2}{3}h，A_2=\frac{h}{3}，A_3=\frac{h^2}{6}$$

于是有

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[4f(a)+2f(b)+hf'(a)]$$

其中 $h=b-a$ 。

令$f(x)=x^3$代入，左边 $=\frac{h^4}{4}$，右边 $=\frac{h^4}{3}$，说明求积公式只有 2 次代数精度。

所构造的求积公式不仅对$f(x)=1$，x，x^2准确成立，而且对任意次数不高于 2 的多项式$a_2x^2+a_1x+a_0$也准确成立。

（2）$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$

解 因为求积公式$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$有$A_{-1}$，$A_0$，$A_1$，3 个未知数，设求积公式对于$f(x)=1$，x，$x^2$ 均准确成立，有

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=2h \\ -hA_{-1}+0+hA_1=0 \\ h^2A_{-1}+0+h^2A_1=\frac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

解之，得

$$A_{-1}=\frac{1}{3}h，A_0=\frac{4}{3}h，A_1=\frac{1}{3}h，$$

于是有求积公式$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}hf(-h)+\frac{4}{3}hf(0)+\frac{1}{3}hf(h)$，其代数精度至少为 2 次。

将$f(x)=x^3$代入求积公式，左边 = 右边 = 0 ，公式准确成立。

将$f(x)=x^4$代入求积公式，左边 $=\frac{2}{5}h^5$，右边 $=\frac{2}{3}h^5$，公式不准确成立。所以求积公式的代数精度为 3 次。求积公式实际即是辛普森公式。

2. 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并确定余项中的常数 k 和所确定求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_0f(-1)+A_1f(x)+kf^{(3)}(\varepsilon)，\varepsilon \in (0，1)$$

解 求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_0f(-1)+A_1f(x)+kf^{(3)}(\varepsilon)$，$\varepsilon \in (0，1)$，有$A_0$，$A_1$，x三个未知数，令求积公式对$f(x)=1$，x，$x^2$ 均准确成立，即余项$kf^{(3)}(\varepsilon)=0$，有

$$\begin{cases} A_0+A_1=2 \\ -A_0+A_1x=0 \\ A_0+A_1x^2=\frac{2}{3} \end{cases}$$

第 1 式加第 2 式，得第 4 式

$$A_1(x_1+1)=2$$

第 3 式加第 2 式，得第 5 式

$$A_1x_1(x_1+1)=\frac{2}{3}$$

联立第 1, 4, 5 式，解之，得

$$x_1=\frac{1}{3}，A_1=\frac{3}{2}，A_0=\frac{1}{2}$$

所以求积公式为$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\frac{1}{2}f(-1)+\frac{3}{2}f\left(\frac{1}{3}\right)+kf^{(3)}(\varepsilon)$，$\varepsilon\in(0，1)$，起其代数精度至少为 2 次。

当$f(x)=x^3$时，代入求积公式得

$$0=\frac{1}{2}\times(-1)^3+\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+3!\,k$$

故有

$$k=\frac{2}{27}$$

求积公式的余项$kf^{(3)}(\varepsilon)=\frac{2}{27}\times3!=\frac{4}{9}\neq0$，从而可知，求积公式只有 2 次代数精度。

3. 导出右矩形公式$\int_a^b f(x)\,dx\approx(b-a)f(b)$的余项。

解　将$f(x)$在 $x=b$ 处进行泰勒展开

$$f(x)=f(b)+f'(\varepsilon)(x-b)$$

其中$\varepsilon\in[a,b]$，且依赖于 x，即$f'(\varepsilon)$是依赖于 x 的连续函数。

对上式两边在[a，b]上积分，有

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(b)\,dx+\int_a^b f'(\varepsilon)(x-b)\,dx=(b-a)f(b)+\int_a^b f'(\varepsilon)(x-b)\,dx$$

右矩形公式的余项

$$R_R=\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)f(b)=\int_a^b f'(\varepsilon)(x-b)\,dx$$

其中$(x-b)$在[a，b]上不变号，有广义积分中值定理知，至少有一点$\mu\in[a，b]$，使

$$R_R=\int_a^b f'(\varepsilon)(x-b)\,dx=f'(\mu)\int_a^b(x-b)\,dx$$

即

$$R_R=\frac{1}{2}f''(\mu)(b-a)^2,\ \mu\in[a，b]$$

4. 导出计算圆台，圆柱和圆锥的体积公式。

解　设圆台上底半径 r，下底半径 R，这中截面半径为$\frac{R+r}{2}$，对应上、下底和中截面面积分别为πr^2，πR^2，$\pi(\frac{r+R}{2})^2$，设圆台高度为 h, 则圆台体

$$V=\frac{h}{6}[\pi r^2+4\pi(\frac{r+R}{2})^2+\pi R^2]$$

化简后得

$$V=\frac{\pi}{3}h[r^2+rR+R^2]$$

当 r=R 时，即有圆柱体积

$$V=\frac{\pi}{3}h3R^2=\pi hR^2$$

当 r=0 时，即有圆锥体积

$$V=\frac{\pi}{3}hR^2$$

5. 用梯形公式、辛普森公式计算

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

并估算误差。

解　取$f(x)=\frac{1}{1+x}$，a=0，b=1，应用梯形公式，有

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx T=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+0}+\frac{1}{1+1}\right]=0.75$$

由$f(x)=\frac{1}{1+x}$，$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$，$f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$ 和余项公式，有

$|R_1[f]|\le \frac{M_2}{12}(b\text{-}a)^3=\frac{1}{6}=0.1667$

应用辛普森公式，有

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx S=\frac{1\text{-}0}{6}\left[\frac{1}{1+0}+\frac{4}{1+0.5}+\frac{1}{1+1}\right]=0.694$$

由$f^{(3)}(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}$，$f^{(4)}=\frac{24}{(1+x)^5}$ 和余项公式，有

$|R_2[f]|\le \frac{M_4}{2880}|b\text{-}a|^5=\frac{24}{2880}=0.008\,33$

6. 取 7 个等距节点（包括区间端点），分别用复化梯公式、复化辛普森公式计算积分的近似值（用 6 位小数进行计算）。

解　取 7 个等距节点

x	1	1.166667	1.333334	1.5	1.666667	1.833334	2
f(x)	0	0.154151	0.287683	0.405465	0.510826	0.606136	0.693147

复化梯形法：

用 7 个点上的函数值计算，n = 6，所以，有

$$T_6=\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{5} f(x_k)\right]$$

$=\frac{0.166667}{2}[f(1)+f(2)+2f(1.166\,667)+2f(1.333\,334)+2f(1.5)+2f(1.666\,667)+2f(1.833\,334)]$

$=\frac{0.166\,667}{2}[0+0.693\,147+2\times(0.154\,151+0.287\,683+0.405\,465+0.510\,826+0.606\,136)]$

$=0.385\,139$

复化辛普森法：

用 7 个点上的函数值计算，n = 3，所以，有

$$S_3=\frac{h}{6}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{k=0}^{2} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+2\sum_{k=1}^{2} f(x_k)\right]$$

$=\frac{0.333\,333}{6}[f(1)+f(2)+4[f(1.166\,667)+f(1.5)+f(1.833\,334)]+2[f(1.333\,334)+f(1.666\,667)]]$

$=\frac{0.333\,333}{6}[0+0.693\,147+4\times(0.154\,151+0.405\,465+0.606\,136)+2\times$

$(0.287\,683+0.510\,826\,)]$

$=0.386\,287$

积分$I=\int_1^2 \ln x dx$的准确值为 0. 386 294 36…，由此可见，复化梯形法只有 2 位有效数字，复化辛普森法有 5 位有效数字。

7. 用复化梯形公式计算积分$\int_0^1 e^x dx$，区间应分多少份才能保证计算结果有 5 位有数字？若改用复化辛普森公式应分为多少份？

解 取$f(x)=e^x$，则

$$f''(x)=e^x,\ f^{(4)}(x)=e^x$$

又区间长度 b – a = 1，对复化梯形公式要求余项

$$|R_n(x)|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)\right|\le\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 e\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

即

$n^2\ge\frac{1}{144}\times10^4$，$n\ge3.706\,6$，取$n=4$，即将区间$[0,1]$分成 8 等份时，用复化辛普森公式计算误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-5}$。

8. 用复化辛普森公式计算

$$I=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

使误差小于10^{-3}。

解 由 a = 0，b = 1，$f(x)=\frac{1}{1+x}$，$M_4=\max_{0\le x\le1}\left|f^{(4)}(x)\right|=\max_{0\le x\le1}\left|\frac{24}{(1+x)^5}\right|=24$和余项公式，有

$$|R_n[f]|\le\frac{M_4}{2880}h^4(b-a)^5=\frac{24}{2880}\left(\frac{1}{n}\right)^4=\frac{1}{120n^4}<10^{-3}$$

解出$n\ge2$，取$n=2$，即将区间$[0,1]$分成 4 等份时，用$n=2$复化辛普森公式则可达到误差小于10^{-3}。计算可得

$$I=\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{12}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+4f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right]$$
$$=\frac{1}{12}\left[1+\frac{16}{5}+\frac{4}{3}+\frac{16}{7}+\frac{1}{2}\right]\approx0.693\,25$$

9. 用龙贝格方法计算积分$I=\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$。

解 对区间$[0,\pi]$用梯形公式，$f(x)=e^x\cos x,f(0)=1,f(\pi)=-e^\pi=-23.140\,693$

$$T_1=\frac{1}{2}\times\pi[f(0)+f(\pi)]=\frac{\pi(1-e^\pi)}{2}=-34.778\,521$$

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi(1-e^\pi)}{4}=-17.389\,260$$

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{\pi}{4}\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\frac{\pi\left(1-e^{\pi}\right)}{8}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\left(e^{\frac{\pi}{4}}-e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$$
$$=-8.694\,63-4.641392=-13.336\,022$$
$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{\pi}{8}\left[f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)+f\left(\frac{5\pi}{8}\right)+f\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right]$$
$$=-6.668\,011-5.714\,152=-12.382\,163$$
$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=-23.185\,680+11.592\,840=-11.592\,840$$
$$S_2=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2=-17.781\,363+5.796\,420=-11.984\,940$$
$$S_4=\frac{4}{3}T_8-\frac{1}{3}T_4=-16.509\,551+4.445\,341=-12.064\,210$$
$$C_1=\frac{16}{15}S_2-\frac{1}{15}S_1=-12.783\,936+0.772\,856=-12.011\,080$$
$$C_2=\frac{16}{15}S_4-\frac{1}{15}S_2=-12.868\,491+0.798\,996=-12.069\,495$$
$$R_1=\frac{64}{63}C_2-\frac{1}{63}C_1=-12.261\,074+0.190\,652=-12.070\,422$$

10. 用变布长梯形法及梯形法加速（复化辛普森公式）计算积分$I=\int_0^1\frac{x}{4+x^2}dx$，使验后误差估计分别是$\frac{1}{2}\times10^{-3}$与$\frac{1}{2}\times10^{-5}$。

解　设$f(x)=\frac{x}{4+x^2}$，$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=0.1$，由变长梯形法则，有

$T_2=0.108\,823\,6$，误差$R(f)\approx\frac{1}{3}\left|T_2-T_1\right|\approx2.94\times10^{-3}$

$T_4=0.110\,892\,3$，误差$R(f)\approx\frac{1}{3}\left|T_4-T_2\right|\approx6.90\times10^{-4}$

$T_8=0.111\,402\,4$，误差$R(f)\approx\frac{1}{3}\left|T_8-T_4\right|\approx1.70\times10^{-4}<\frac{1}{2}\times10^{-3}$达到误差要求，故$I=\int_0^1\frac{x}{4+x^2}dx\approx0.111\,40$。

对梯形法加速公式，有

$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=0.111\,764\,8$$
$$S_2=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2=0.111\,581\,9$$
$$R(f)\approx\frac{1}{15}\left|S_2-S_1\right|=1.22\times10^{-5}$$
$$S_4=\frac{4}{3}T_8-\frac{1}{3}T_4=0.111\,572\,4$$
$$R(f)\approx\frac{1}{15}\left|S_4-S_2\right|=6.33\times10^{-7}<\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

满足精度要求，故

$$I=\int_0^1\frac{x}{4+x^2}dx\approx0.111\,572\,4$$

11. 用两点个三点高斯–勒让德求积公式近似计算

$$I=\int_0^1x^2e^xdx$$

解　先做区间变换

$$x=\frac{1}{2}(t+1)$$

于是

$$I=\int_0^1x^2e^xdx=\frac{1}{8}\int_{-1}^1(t+1)^2e^{\frac{1}{2}(t+1)}dt$$

用两点公式，查表得节点和系数代入可得

$$I\approx\frac{1}{8}\left[(0.577\,350+1)^2e^{\frac{1}{2}(0.577\,350+1)}+(-0.577\,350+1)^2e^{\frac{1}{2}(-0.577\,350+1)}\right]=0.711\,942$$

用三点公式可得

$$I \approx \frac{1}{8}\Big[0.555\,556 \times (0.774\,597+1)^2 e^{\frac{1}{2}(0.774\,597+1)} + 0.888\,889 \times (0+1)^2 e^{\frac{1}{2}(0+1)} + 0.555\,556 \times (-0.774\,597+1)^2 e^{\frac{1}{2}(-0.774\,597+1)}\Big] = 0.718\,252$$

用分部积分法可以计算出 I 的准确值

$$I = e-2 = 0.718\,281\,828$$

由此可得两点公式的实际误差 0.006 339 828，三点公式的实际误差 0.000 029 828。

12. 已知函数$y = e^x$的下列数值

x	2.6	2.7	2.8
y	13.463 7	14.879 7	16.444 6

用二点、三点微分公式计算 x = 2.7 处的一阶、二阶导数值。

解 取$x_0 = 2.6$，$x_1 = 2.7$时，由两点公式得

$$y'|_{x=2.7} \approx \frac{e^{2.7}-e^{2.6}}{2.7-2.6} = 14.160\,0$$

取$x_0 = 2.7$，$x_1 = 2.8$时，由两点公式得

$$y'|_{x=2.7} \approx \frac{e^{2.8}-e^{2.7}}{2.8-2.7} = 15.649\,0$$

取$x_0 = 2.6$，$x_1 = 2.7$，$x_2 = 2.8$时，由三点公式得

$$y'|_{x=2.7} \approx \frac{1}{2 \times 0.1}(e^{2.8}-e^{2.6}) = 14.904\,5$$

$$y''|_{x=2.7} \approx \frac{1}{0.1^2}\left(e^{2.8}-2e^{2.7}+e^{2.6}\right) = 14.890\,0$$

而其精确值

$$y'|_{x=2.7} = y''|_{x=2.7} = e^{2.7} = 14.870\,7$$

第 7 章　常微分方程初值问题的数值解法

7.1　内容提要

本章讨论一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,\ y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的数值解法。

定理 7-1　常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,\ y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

设$x_0 \in [a,\ b]$，$f(x,\ y)$对 x 连续且关于 y 满足李普希兹条件：存在常数 L，使

$$|f(x,\ y_1)-f(x,\ y_2)| \le L|y_1-y_2|$$

对$\forall x \in [a,\ b]$及任何实数y_1，y_2均成立，则初值问题在$[a,\ b]$上有惟一解。

若给出节点$x_n = a + nh$，$n = 0$，1，$\cdots$，其中 h 为步长，求$y(x)$在$x_n(n = 0,1,\cdots)$上的数值解$y_n \approx y(x_n)$，就是微分方程的数值解。

一、欧拉法

1. 欧拉公式

显示欧拉公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n,\ y_n) \\ x_n = x_0 + nh,\quad n = 0,1,\cdots \end{cases}$$

其中 h 为步长，由初值y_0逐步算出一阶常微分方程初值问题的解$y(x)$在节点x_1，x_2，$\cdots$处近似值的y_1，y_2，$\cdots$

定义 7-1　在y_n准确的前提下，即 $y_n = y(x_n)$时，用数值方法计算y_{n+1}的误差

$y(x_{n+1})-y_{n+1}$　称为该数值方法计算y_{n+1}时的局部截断误差。

定义 7-2　数值方法的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$，则称这种数值方法的阶数为 p。

步长 h ＜ 1，p 越高，局部截断误差越小，计算净度越高。

显示欧拉公式的局部截断误差为$O(h^2)$，是一阶方法。

隐式欧拉公式　　$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1},\ y_{n+1})$

这是一个隐式公式，其计算远比显示公式计算困难，也是一阶方法。

2. 两步欧拉法

两步欧拉公式　　$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n,\ y_n)$

用到了前两部　y_n，y_{n-1}的信息，这是一种二阶方法。

3. 梯形法

梯形公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n,\ y_n) + f(x_{n+1},\ y_{n+1})]$$

是隐式方法，精度二阶。

4. 改进欧拉公式

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}\right)\right] \end{cases}$$

先用欧拉公式求得初步近似值 $y_{n+1}^{(0)}$，称之为预报值，用它代替梯形法右端的y_{n+1}，再直接算出y_{n+1}，并称之为校正值，这样得到的改进欧拉公式，可写成一步显示嵌套形式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)\right)\right]$$

又常写成平均化形式

$$\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_c = y_n + hf(x_{n+1}, y_p) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

此时将隐式改进为显示，也是二阶方法。

二、龙格-库塔法

显示龙格-库塔法的一般形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) \\ \varphi(x_n, y_n, h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} c_i k_i \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_i = f\left(x_n + \beta_i h, y_n + h\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} k_j\right), \quad i = 2,3,\cdots,r \end{cases}$$

称为 r 级的龙格-库塔法，因其中计算了 r 个 f 函数值。式中系数c_i，β_i，μ_{ij}均为常数，其选择原因是使y_{n+1}的展开表达式

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_1 h + \frac{1}{2!}\alpha_2 h^2 + \frac{1}{3!}\alpha_3 h^3 + \cdots$$

与微分方程的解$y(x_{n+1})$在(x_n, y_n)处得泰勒展开式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_n) + \cdots$$

有尽可能多的项相重合，以减少局部截断误差。

经典的四阶龙格-库塔法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \dfrac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \dfrac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f(x_{n+1}, y_n + hk_3) \end{cases}$$

其每一步需要 4 次计算函数值$f(x, y)$，它具有四阶精度，即局部截断误差是$O(h^5)$。

三、线性多步法

1. 一般形式

线性多步法的一般形式

$$y_{n+1}=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i y_{n-i}+h\sum_{i=-1}^{k-1}\beta_i y'_{n-i}$$

其中α_i，β_i为待定常数。若$\alpha^2_{k-1}+\beta^2_{k-1}\neq 0$称为线性 k 步法；当$\beta_{-1}=0$时，称为显示 k 步法；当$\beta_{-1}\neq 0$时，称为隐式 k 步法。

2. 亚当斯法

当线性多步法取如下形式的 k 步法

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=-1}^{k-1}\beta_i y'_{n-i}$$

则称亚当斯法。$\beta_{-1}=0$时为显示亚当斯法；$\beta_{-1}\neq 0$时为隐式亚当斯法。构造亚当斯公式常用泰勒展开法和数值积分法。

常用的四阶亚当斯公式（显式）和四阶隐式亚当斯公式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(55y'_n-59y'_{n-1}+37y'_{n-2}-9y'_{n-3})$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(9y'_{n+1}+19y'_n-5y'_{n-1}+y'_{n-2})$$

3. 亚当斯预测-校正公式

隐式方式是内插方式，显式方式是外推方式，内插比外推更准确，同时稳定性好，但隐式方法计算量大，将显式和隐式结合，用同阶显式公式做预测，再用隐式公式做校正，构成预报-校正公式，以四阶为例，有

$$\begin{cases}\bar{y}_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{24}(55y'_n-59y'_{n-1}+37y'_{n-2}-9y'_{n-3})\\ \bar{y}'_{n+1}=f(x_{n+1},\ \bar{y}_{n+1})\\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{24}(9\bar{y}'_{n+1}+19y'_n-5y'_{n-1}+y'_{n-2})\\ y'_{n+1}=f(x_{n+1},\ y_{n+1})\end{cases}$$

4. 误差修正法

利用估计误差做计算结果的补偿，使精度得到改进的方法。

预报 $P_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left(55y'_n-59y'_{n-1}+37y'_{n-2}-9y'_{n-3}\right)$

改进 $m_{n+1}=P_{n+1}+\frac{251}{270}(C_n-P_n)$

求值 $m'_{n+1}=f(x_{n+1},m_{n+1})$

校正 $C_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left(9m'_{n+1}+19y'_n-5y'_{n-1}+y'_{n-2}\right)$

改进 $y_{n+1}=C_{n+1}-\frac{19}{270}(C_{n+1}-P_{n+1})$

求值 $y'_{n+1}=f(x_{n+1},\ y_{n+1})$

四、收敛性与稳定性

1. 误差分析

称$\varepsilon_n=y(x_n)-y_n$为数值方法第 n 步的总体截断误差，它不仅与 x_n 处得数值解y_n有关，也与x_{n-1}，x_{n-2}，…，x_1，x_0处得数值解y_{n-1}，y_{n-2}，…，y_1，y_0有关。对任意的第 n+1 步有总体截断误差

$$|\varepsilon_{n+1}|=|y(x_{n+1})-y_{n+1}|\leq|y(x_{n+1})-\tilde{y}_{n+1}|+|y_{n+1}-\tilde{y}_{n+1}|$$

其中$\tilde{y}_{n+1}$是用$y(x_n)$计算得到的近似值，即$y(x_{n+1})-\tilde{y}_{n+1}$是第 n+1 步的局部截断误差。

2. 收敛性

定义 7-3 当步长 $h \to 0$时，y_{n+1}能和$y(x_{n+1})$充分接近，此时的数值方法是收敛的。

定理 7-2 如果$f(x, y)$关于 y 满足李普希茨条件

$$\left|f(x,y_2)-f(x, y_1)\right| \le L|y_2-y_1|$$

则欧拉法的整体截断误差ε_n满足

$$|\varepsilon_n| \le e^{TL}\varepsilon_0 + \frac{ch}{L}(e^{TL}-1)$$

其中 L 为李普希茨常数；T 为区间长度 T=b − a；C = $\frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}\left|y''(x)\right|$。

总体截断误差与局部截断误差之间的关系

总体截断误差 $= O\left(h^{-1} \times \text{局部截断误差}\right)$

定义 7-4 数值方法的总体截断为$O(h^r)$，则称它为 r 阶方法。

3. 稳定性

定义 7-5 用一种数值方法求解微分方程

$$y' = \lambda y$$

其中λ为复常数。对于给定步长$h > 0$, 在计算y_n时引入误差δ, 若这个误差在计算后面的y_{n+k}，$k = 1,2,\cdots$时所引进的误差按绝对值不增加，则该数值方法对于步长 h 和复常数λ是绝对稳定的。

定义 7-6 用单步法解模型方程 $y' = \lambda y \quad \mathrm{Re}(\lambda) < 0$

得到满足稳定性方程$y_{n+1} = y_n$，若$\left|E(h\lambda)\right| \le 1$，就称此方法是绝对稳定的。在复平面$\mu = h\lambda$上，所有满足$\left|E(h\lambda)\right| \le 1$所围成的区域称为方法的绝对稳定域。当$\lambda(< 0)$为实数时，此区域与$h\lambda$在实轴的交称为绝对稳定区间。

7.2 习题及解答

1.取步长 **h=0.2**，用欧拉法解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y - xy^2 \\ \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

其中$x \in [0, 0.6]$。

解 用欧拉法求解公式，得

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(-y_n - x_n y_n^2)$$

取步长$h = 0.02$ 时，$x \in [0, 0.6]$有

$n=0 \quad y_1 = y_0 + h(-y_0 - x_0 y_0^2) = 1 + 0.2(-1 - 0 \times 1^2) = 0.8$

$n=1 \quad y_2 = y_1 + h(-y_1 - x_1 y_1^2) = 0.8 + 0.2(-0.8 - 0.2 \times 0.8^2) = 0.614$

$n=2$

$y_3 = y_2 + h(-y_2 - x_2 y_2^2) = 0.6144 + 0.2(-0.6144 - 0.4 \times 0.6144^2) \approx 0.46132$

2.用欧拉法、隐式欧拉法和梯形方法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{0.9y}{1+2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

从 $x=0$ 到 $x=0.1$ 的数值解，取步长 $h=0.02$ 。

解 将 $f(x,y) = -\dfrac{0.9y}{1+2x}$ 代入欧拉公式，注意到 $h=0.02$ ，有

$$y_{n+1} = y_n - h\frac{0.9y_n}{1+2x_n} = \left(1 - \frac{0.018}{1+2x_n}\right)y_n$$

计算结果如表 **7-1** 所示。

表 7-1 计 算 结 果

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$\varepsilon_n = y(x_n) - y_n$
0	0	1.000 0	1.000 0	0
1	0.02	0.982 0	0.982 5	0.000 5
2	0.04	0.965 5	0.966 0	0.000 5
3	0.06	0.948 9	0.950 3	0.001 4
4	0.08	0.933 6	0.935 4	0.001 8
5	0.10	0.919 2	0.921 3	0.002 1

表中 $y(x_n)$ 一列是所求问题的准确解 $y(x)$ 在 $x = x_n$ 处的值，ε_n 一列为近似值 y_n 的误差。用隐式欧拉公式有

$$y_{n+1} = y_n - h\frac{0.9}{1+2x_n}\, y_{n+1}$$

这是关于 y_{n+1} 的线性方程，解之可得

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + h\dfrac{0.9}{1+2x_{n+1}}}$$

解之，有

$y_0 = 1.0000$ ，$y_1 = 0.9830$ ，$y_2 = 0.9669$ ，$y_3 = 0.9516$ ，$y_4 = 0.9370$ ，$y_5 = 0.9232$

用梯形公式有

$$y_{n+1} = y_n - 0.009\left(\frac{y_n}{1+2x_n} + \frac{y_{n+1}}{1+2x_{n+1}}\right)$$

解此关于 y_{n+1} 的方程有

$$y_{n+1} = y_n \frac{1 - \dfrac{0.009}{1+2x_n}}{1 + \dfrac{0.009}{1.04+2x_n}}$$

解之，有

$y_0 = 1.0000$ ，$y_1 = 0.98250$ ，$y_2 = 0.96595$ ，$y_4 = 0.93537$ ，$y_5 = 0.92120$

比较三种数值解可见，它们都是真解的近似解，欧拉法数值偏小，隐式欧拉法数值偏大，梯形法最精确（已有 4 位有效数字）。

3.用反复迭代（反复校正）的欧拉预报-校正法求解初值问题

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

其中 $x \in [0, 0.2]$，取步长 $h = 0.1$，每步迭代误差不超过 10^{-5}。

解 反复迭代（反复校正）的欧拉预报-校正法

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})\right] \end{cases}$$

$k - 0,1,2,\cdots; n = 0,1,2,\cdots$

将 $f(x, y) = -y$，$h = 0.1$ 代入，有

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = 0.9\, y_n \\ y_{n+1}^{(k+1)} = 0.95\, y_n - 0.05\, y_{n+1}^{(k)} \end{cases}$$

由 $y(0) = y_0 = 1$ 计算得

$y_1^{(1)} = 0.905000$， $y_1^{(2)} = 0.904750$
$y_1^{(3)} = 0.904763$， $y_1^{(4)} = 0.904762$

由$\left|y_1^{(4)} - y_1^{(3)}\right| < 10^{-5}$，故取 $y(0.2) \approx y_2 = y_2^{(4)} = 0.818594$

4.用梯形法和改进欧拉法解初值问题

$$\begin{cases} y' = x^2 + x - y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

取步长$h = 0.1$，计算到$x = 0.5$，并与准确值$y = e^{-x} + x^2 - x + 1$相比较。

解　用改进欧拉法求解公式。得

$$y_{n+1} = y_n + 0.05\left\{(x_n^2 + x_n - y_n) + x_{n+1}^2 + [y_n + 0.1(x_n^2 + x_n - y_n)]\right\}$$

$$= y_n + 0.05(1.9x_n^2 + 2.1x_n - 1.9y_n + 0.11)$$

取步长$h = 0.1$，计算到$x = 0.5$，即$n = 0,1,2,3,4,5$。计算结果如下表所示。

用梯形法求解公式，得

$$y_{n+1} = y_n + 0.05(x_n^2 + x_n - y_n + x_{n+1}^2 + x_{n+1} - y_{n+1})$$

$$= \frac{1}{1.05}\left[y_n + 0.05(2x_n^2 + 2.2x_n - y_n + 0.11)\right]$$

取步长$h = 0.1$，计算到$x = 0.5$，即$n = 0,1,2,3,4,5$。计算结果如表 **7-2** 所示。

表 7-2 计 算 结 果

x_n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
改进欧拉法	**0.005 50**	**0.021 93**	**0.050 15**	**0.090 94**	**0.145 00**
梯形法	**0.005 24**	**0.021 41**	**0.049 37**	**0.089 91**	**0.143 73**
准确解	**0.005 16**	**0.021 27**	**0.049 18**	**0.089 68**	**0.143 47**

5.用改进欧拉法计算积分

$$y = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

在 **x=0.5, 0.75, 1** 时的近似值。

解　根据题意，取$h = 0.25$，积分改写成微分方程

$$\begin{cases} y' = e^{-x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

改进欧拉法

$$\begin{cases} y_p = y_n + e^{-x_n^2} \\ y_c = y_n + e^{-x_{n+1}^2} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

计算结果如表 7-3 所示。

表 7-3 计 算 结 果

n	1	2	3	4
x	0.25	0.50	0.75	1.00
y	0.969 706 531	1.828 813 454	2.503 105 258	2.971 936 391

所以，当 x=0.5, 0.75, 1 时，所求 y 值分别为 1.828 813 454、2.503 105 258、2.971 936 391。.

6.用欧拉预报-校正公式求解初值问题

$$\begin{cases} y' + y + y^2 \sin x = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

要求步长 $h = 0.2$，计算 $y(1.2)$， $y(1.4)$ 的近似值。

解 由题意知 $f(x, y) = -y - y^2 \sin x$

改进欧拉法

$$\begin{cases} y_p = y_n + h(-y_n - y_n^2 \sin x_n) \\ y_c = y_n + h(-y_p + y_p^2 \sin x_{n+1}) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

由 $y(1) = y_0 = 1$ 知 $x_0 = 1$，取步长 $h = 0.2$，计算如下：

n=0 时

$$\begin{cases} y_p = y_0 + h(-y_0 - y_0^2 \sin x_0) = 1 + 0.2(-1 - 1^2 \sin 1) \approx 0.631706 \\ y_c = y_0 + h(-y_p - y_p^2 \sin x_1) = 1 + 0.2(-0.631706 - 0.631706^2 \sin 1.2) \approx 0.799272 \\ y_1 = \frac{1}{2}(y_p + y_c) = \frac{1}{2}(0.631706 + 0.799272) \approx 0.715489 \end{cases}$$

n=1 时

$$\begin{cases} y_p = y_1 + h(-y_1 - y_1^2 \sin x_1) = 0.715489 + 0.2(-0.715489 - 0.715489^2 \sin 1.2) \approx 0.476964 \\ y_c = y_1 + h(-y_p - y_p^2 \sin x_2) = 0.715489 + 0.2(-0.476964 - 0.476964^2 \sin 1.4) \approx 0.575259 \\ y_2 = \frac{1}{2}(y_p + y_c) = \frac{1}{2}(0.476964 + 0.575259) \approx 0.526112 \end{cases}$$

7.对初值问题 $y'+y=0$， $y(0)=1$，证明用梯形欧拉格式求得的近似解为

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n \quad (x = nh)$$

$$y_{n+1} = \frac{1-\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}} y_n = \frac{2-h}{2+h} y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{n+1} y_0$$

但

$$y_0 = y(0) = 1$$

所以

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

由于

$$\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n = \left(1 - \frac{2h}{2+h}\right)^n = \left[\left(1 - \frac{h}{1+h/2}\right)^{\frac{1}{h}}\right]^x \quad (x = nh)$$

所以 当 $h \to 0$ 时 $y_n \to e^{-x}$

8.用欧拉法解初值问题

$$\begin{cases} y' = ax + b \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

证明其截断误差

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{2} a n h^2$$

这里 $x_n = nh$； y_n 是欧拉方法的近似解； $y(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx$ 为原初值问题的精确解。

解 已知 $x_0 = 0$， $y_0 = 0$， $x_n = nh$，由欧拉法，有

$y_1 = bh$

$y_2 = bh + (ax_1 + b) = 2bh + ahx_1$

$y_3 = 2bh + ahx_1 + h(ax_2 + b) = 3bh + ah(x_1 + x_2)$

……

$y_n = (n-1)bh + ah(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2}) + h(ax_{n-1} + b)$

$= nbh + ah^2[1 + 2 + \cdots + (n-1)]$

$= bx_n + ah^2 \dfrac{(n-1)n}{2} = bx_n + \dfrac{1}{2} ax_{n-1}x_n$

由已知 $y(x) = \dfrac{1}{2}ax^2 + bx$，有

$y(x_n) - y_n = \dfrac{1}{2}ax_n^2 + bx_n - (bx_n + \dfrac{1}{2}ax_{n-1}x_n) = \dfrac{1}{2}ahx_n = \dfrac{1}{2}anh^2$

9．证明对于任意参数 **t**，下列公式是二阶的

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + th, y_n + thk_1) \\ k_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hk_1) \end{cases}$$

解 对 k_2，k_3 在 (x_n, y_n) 处二元凯勒展开

$k_2 = f(x_n, y_n) + thf_x(x_n, y_n) + thf_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n) + O(h^2) = y'(x_n) + thy''(x_n) + O(h^2)$

$k_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-th)k_1) = y'(x_n) + (1-t)hy''(x_n) + O(h^2)$

将 k_2，k_3 代入，有

$y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(k_2 + k_3) = y(x_n) + hy'(x_n) + \dfrac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$

又，将 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处泰勒展开

$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \dfrac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$

局部截断误差

$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$

故所给龙格-库塔公式对于任意参数 t 是二阶的。

10.用经典龙格-库塔法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -2sy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

其中 $x \in [0, 0.4]$，取步长 $h = 0.2$。

解 $f(x, y) = -2xy$, $h = 0.2$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = -2x_n y_n \\ k_2 = -2(x_n + 0.1)(y_n + 0.1k_1) \\ k_3 = -2(x_n + 0.1)(y_n + 0.1k_2) \\ k_4 = -2(x_n + 0.2)(y_n + 0.2k_3) \end{cases}$$

当 $n = 0$ 时，$x_0 = 0, y_0 = 1$

$k_1 = -2 \times 0 \times 1 = 0$

$k_2 = -2(0 + 0.1)(1 + 0.1 \times 0) = -0.2$

$k_3 = -2(0 + 0.1)[1 + 0.1(-0.2)] = -0.196$

$k_4 = -2(0 + 0.2)[1 + 0.2(-0.196)] = -0.38432$

$y(0.2) \approx y_1 = 0.960789333$

当 $n = 1$ 时，$x_1 = 0.2, y_1 = 0.960783333$

$k_1 = -2 \times 0.2 \times 0.96078333 = -0.384315733$

$k_2 = -2(0.2 + 0.1)(0.960789333) + 0.1(-0.384315733)$

$= -0.55342416$

$k_3 = -0.54326815$, $k_4 = -0.85555437$

$y(0.4) \approx y_2 = -0.846347508$

11.写出经典龙格-库塔法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的计算公式，并取步长 $h = 0.2$，计算 $y(0.4)$ 的近似值。

解 由题意知 $f(x, y) = -y + x + 1$，所以有

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) = -y_n + x_n + 1 \\ k_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}k_1) = -(y_n + \dfrac{h}{2}k_1) + (x_n + \dfrac{h}{2}) + 1 \\ \quad = -y_n - \dfrac{0.2}{2}(-y_n + x_n + 1) + x_n + \dfrac{0.2}{2} + 1 = -0.9y_n + 0.9x_n + 1 \\ k_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}k_2) = -(y_n + \dfrac{h}{2}k_2) + (x_n + \dfrac{h}{2}) + 1 \\ \quad = -y_n - \dfrac{0.2}{2}(-0.9y_n + 0.9x_n + 1) + x_n + \dfrac{0.2}{2} + 1 = -0.91y_n + 0.91x_n + 1 \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) = -(y_n + hk_3) + (x_n + h) + 1 \\ \quad = -y_n - 0.2(-0.91y_n + 0.91x_n + 1) + x_n + 0.2 + 1 = -0.818\ y_n + 0.818\ x_n + 1 \end{cases}$$

代入，有 $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx 0.818733\ \ y_n + 0.181267\ \ x_n + 0.2$

由于 $y(0) = y_0 = 1$，取 $x_0 = 0$， $x_1 = x_0 + h = 0.2$，取步长 $h = 0.2$，有

$y(0.2) \approx y_1 = 1.018733$ ， $y(0.4) \approx y_2 = 1.070324$

12.用二阶泰勒展开法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{0.9y}{1+2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

从 $x = 0$ 到 $x = 0.1$ 的数值解，去步长 $h = 0.02$ 。

解　因为

$$y' = -\frac{0.9y}{1+2x} \qquad y'' = \frac{2.61y}{(1+2x)^2}$$

故泰勒级数格式

$$y_{n+1} = y_n - \frac{0.9hy_n}{1+2x_n} + \frac{2.61h^2y_n}{2(1+2x_n)^2}$$

取 $n = 0,1,2,3,4$，有

$y_0 = 1.00000$， $y_1 = 0.98252$， $y_3 = 0.96599$

$y_3 = 0.95032$， $y_4 = 0.93544$， $y_5 = 0.92129$

具有 **3** 位有效数字。

13.建立求解初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的数值方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$$

其中 $f_n = f(x_n, y_n)$, $f_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$，并说明这是几阶格式。

解　对 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处泰勒展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{1}{2!}y''(x_n)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(\varepsilon_n)h^3$$

再把 $f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) = y'(x_{n-1})$ 在 x_n 处泰勒展开

$$y'(x_{n-1}) = y'(x_n) + y''(x_n)(-h) + \frac{1}{2!}y'''(\eta_n)(-h)^2$$

于是

$$y(x_n) + \frac{h}{2}[3y'(x_n) - y'(x_{n-1})]$$

$$= y(x_n) + \frac{h}{2}\{3y'(x_n) - [y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{h^2}{2}y'''(\eta_n)]\}$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) - \frac{1}{4}h^3y'''(\eta_n)$$

与 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处泰勒展开式相比较有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{2}[3y'(x_n) - y'(x_{n-1})] + O(h^3)$$

对上式略去 $O(h^3)$，则有

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})]$$

为考虑局部截断误差，设 $y(x_n) = y_n$， $y(x_{n-1}) = y_{n+1}$，于是所建立格式

$$y_{n+1} = y(x_n) + \frac{h}{2}[3y'(x_n) - y'(x_{n-1})]$$

从而局部截断误差

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$$

因此是二阶格式。

14.已知常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的单步数值方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}[f(x_n, y_n) + 2f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

求其局部截断误差和阶数，并证明该方法是无条件稳定的。

解　将初值问题的解 y_{n+1} 在 x_n 处泰勒展开

$$y_{n+1} = y(x_n) + \frac{h}{3}[y'(x_n) + 2y'(x_n) + 2y''(x_n)] + O(h^3)$$

将 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处泰勒展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$$

局部截断误差

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) - y_{n+1} &= hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) - hy'(x_n) - \frac{2}{3}h^2y'(x_n) + O(h^3) \\ &= -\frac{1}{6}h^2y'(x_n) + O(h^3) \end{aligned}$$

该方法局部截断误差为 $O(h^2)$，是一阶的。

对模型方程 $y' = \lambda y(\lambda > 0)$，所给方程的形式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}(\lambda y_n + 2\lambda y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{3}\lambda h}{1 - \frac{2}{3}\lambda h} y_n$$

记 δ_n 为 y_n 处的扰动，则有

$$y_{n+1} + \delta_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{3}\lambda h}{1 - \frac{2}{3}\lambda h}(y_n + \delta_n)$$

上二式相减

$$\delta_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{3}\lambda h}{1 - \frac{2}{3}\lambda h}\delta_n$$

因恒有

$$\left|\frac{1+\frac{1}{3}\lambda h}{1-\frac{2}{3}\lambda h}\right|<1$$

故$|\delta_{n+1}|<|\delta_n|$总是成立，即此该方法是无条件稳定的。

15.解初值问题 $y'=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$，用显式二步法 $y_{n+1}=\alpha_0 y_n+\alpha_1 y_{n-1}+h(\beta_0 f_0+\beta_1 f_{n-1})$，其中 $f_n=f(x_n,y_n)$，$f_{n-1}=f(x_{n-1},y_{n-1})$。确定参数$\alpha_0$，$\alpha_1$，$\beta_0$，$\beta_1$使方法阶数尽可能高，并确定局部截断误差。

解　根据局部截断误差定义，用泰勒展开确定参数满足的方程。先将 y_{n+1} 在 x_n 处泰勒展开

$$\begin{aligned}y_{n+1}&=\alpha_0 y_n+\alpha_1 y_{n-1}+h(\beta_0 f_n+\beta_1 f_{n-1})\\&=\alpha_0 y(x_n)+\alpha_1 y(x_n-h)+h(\beta_0 y'(x_n)+\beta_1 y'(x_n-h))\\&=\alpha_0 y(x_n)+\alpha_1[y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{3}y'''(x_n)\\&\quad+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n)+O(h^5)]+\beta_0 hy'(x_n)+\beta_1 h[y'(x_n)\\&\quad-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y'''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y^{(4)}(x_n)+O(h^{(4)})]\end{aligned}$$

再将 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处泰勒展开

$$\begin{aligned}y(x_{n+1})&=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)\\&\quad+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n)+O(h^5)\end{aligned}$$

将上二式作比较，若要使方法阶数尽量高，有

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^4)$$

即有

$$\begin{cases} 1-\alpha_0-\alpha_1=0 \\ 1+\alpha_1-\beta_0-\beta_1=0 \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\alpha_1+\beta_1=0 \\ \dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\alpha_1-\dfrac{1}{2}\beta_1=0 \end{cases}$$

整理后，有

$$\begin{cases} \alpha_0+\alpha_1=1 \\ -\alpha_1+\beta_0+\beta_1=1 \\ \alpha_1-2\beta_1=1 \\ -\alpha_1+3\beta_1=1 \end{cases}$$

解得

$$\alpha_0=-4，\ \alpha_1=5，\ \beta_0=4，\ \beta_1=2$$

此时公式

$$y_{n+1}=-4y_n+5y_{n-1}+2h(2f_n+f_{n-1})$$

局部截断误差

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{1}{6}h^4y^{(4)}(x_n)+O(h^5)$$

该方法为三阶。

16.设有求常微分方程初值问题$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$的公式

$$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$$

试用泰勒展开法求该二步公式的局部截断误差并回答该方法是几阶精度的。

[提示：其局部截断误差定义为$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_{n-1})-2hf(x_n,y(x_n))$，其中$y(x_n)$

$(k=n-1,n,n+1)$为常微分方程的精确解。]

解　由已知$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$有局部截断误差

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1})-y_{n+1} \\ &= y(x_{n+1})-y(x_{n-1})-2hf(x_n,y(x_n)) \\ &= y(x_{n+1})-y(x_{n-1})-2hy'(x_n) \end{aligned}$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{6} y'''(x_n)$$

$$-[y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) - \frac{h^3}{6} y'''(x_n)]$$

$$-2hy'(x_n) + O(h^4)$$

$$= \frac{h^3}{3} y'''(x_n) + O(h^4) = O(h^3)$$

因此该公式的局部截断误差为$O(h^3)$，具有二阶精度。

17.选取参数 **p**、**q**，使公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hk_1 \\ k_1 = f(x_n + ph, y_n + qhk_1) \end{cases}$$

具有二阶精度。

解　此为隐式公式。

对k_1在(x_n, y_n)处二元泰勒展开

$$k_1 = f(x_n, y_n) + phf_x(x_n, y_n) + qhf_y(x_n, y_n)k_1 + O(h^2)$$

$$= y'(x_n) + phf_x(x_n, y_n) + qhf_y(x_n, y_n)[y'(x_n) + phf_x(x_n, y_n) + qhf_y(x_n, y_n)k_1 + O(h^2)] + O(h^2)$$

$$= y'(x_n) + phf_x(x_n, y_n) + qhf_y(x_n, y_n)y'(x_n) + O(h^2)$$

$$= y'(x_n) + [phf_x(x_n, y_n) - qhf_x(x_n, y_n)] + [qhf_y(x_n, y_n) + qhf_y(x_n, y_n)y'(x_n)] + O(h^2)$$

$$= y'(x_n) + (p-q)hf_x(x_n, y_n) + qhy''(x_n) + O(h^2)$$

将k_1代入给出的微分方程，有

$$y_{n+1} = y_n + hk_1$$

$$= y_n + hy'(x_n) + (p-q)h^2 f_x(x_n, y_n) + qh^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

又，将$y(x_{n+1})$在x_n处泰勒展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$$

比较上二式，可得

$$\begin{cases} p - q = 0 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

解之

$$p = \frac{1}{2}$$

此时公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hk_1 \\ k_1 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}k_1) \end{cases}$$

为二阶龙格-库塔公式，该方法常称为隐式中点方法，又可写成

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2})$$

18.证明下列格式具有三阶精度

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_2 + 3k_3)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1)$$

证

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)y'(x)$$

$$y'''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y'(x)[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial f}(x, y) + y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)] + y'''(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + [y'(x)]^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + y''(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = y'(x_n)$$

将k_2、 k_3在(x_n, y_n)处二元泰勒展开

$$
\begin{aligned}
k_2 &= f(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1) \\
&= f(x_n, y_n) + \frac{h}{3}\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{h}{3}k_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) \\
&+ \frac{1}{2}[\frac{h^2}{9}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n, y_n) + \frac{2h^2}{9}k_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_n, y_n) + \frac{h^2}{9}k_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_n, y_n)] + O(h^3) \\
&= y'(x_n) + \frac{h}{3}[\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + y'(x_n)\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)] \\
&+ \frac{h^2}{18}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n, y_n) + 2y'(x_n)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_n, y_n) + [y'(x_n)]^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_n, y_n)\} + O(h^3)
\end{aligned}
$$

$$
= y'(x_n) + \frac{h}{3}y''(x_n) + \frac{h^2}{18}[y'''(x_n) - y''(x_n)\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)] + O(h^3)
$$

$$
\begin{aligned}
k_3 &= f(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}k_1) \\
&= f(x_n, y_n) + \frac{2h}{3}\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{2h}{3}k_2\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) \\
&+ \frac{1}{2}\{\frac{4h^2}{9}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n, y_n) + 2\times\frac{4h^2}{9}k_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_n, y_n) + \frac{4h^2}{9}k_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_n, y_n)\} + O(h^3) \\
&= y'(x_n) + \frac{2h}{3}\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + [y'(x_n) + \frac{h}{3}y''(x_n) + O(h^2)]\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)\} \\
&+ \frac{2h}{9}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n, y_n) + 2y'(x_n)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_n, y_n) + [y'(x_n)]^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_n, y_n)\} + O(h^3) \\
&= y'(x_n) + \frac{2h}{3}\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + [y'(x_n) + \frac{h}{3}y''(x_n)]\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)\} \\
&+ \frac{2h^2}{9}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n, y_n) + 2y'(x_n)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_n, y_n) + [y'(x_n)]^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_n, y_n)\} + O(h^3) \\
&= y'(x_n) + \frac{2h}{3}[y''(x_n) + \frac{h}{3}y'(x_n)\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)] + \frac{2h^2}{9}[y'''(x_n) - y''(x_n)\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)] + O(h^3) \\
&= y'(x_n) + \frac{2h}{3}y''(x_n) + \frac{2h^2}{9}y'''(x_n) + O(h^3)
\end{aligned}
$$

又，将 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处泰勒展开

$$
y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + O(h^4)
$$

局部截断误差

$$
\begin{aligned}
&y(x_{n+1}) - y_{n+1} \\
&= hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{6} y'''(x_n) + O(h^4) - \frac{1}{4} hy'(x_n) \\
&- \frac{3}{4} h[y'(x_n) + \frac{2h}{3} y''(x_n) + \frac{2h^2}{9} y'''(x_n) + O(h^3)] \\
&= O(h^4)
\end{aligned}
$$

故所给格式是 **3** 阶的。

19.用四阶亚当斯显式公式求初值问题

$$
\begin{cases} y' = \dfrac{2}{3} xy^{-2} \\ y(0) = 1 \end{cases}
$$

的数值解，其中 $x \in [0.1, 1.2]$，取步长 $h = 0.1$，并与精确解比较。

解　记 $f(x, y) = \dfrac{2}{3} xy^{-2}$，取 $h = 0.1, x_n = nh, n = 0,1,2,\cdots 12$，先用经典龙格-库塔法计算初值

$y_0 = 1,\quad y_1 = 1.003322$，　$y_2 = 1.013159$，　$y_3 = 1.029142$

线性四阶亚当斯显式公式

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[&55 f(x_n, y_n) - 59 f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\
&+ 37 f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9 f(x_{n-3}, y_{n-3})]
\end{aligned}
$$

$n = 3,4,5,\cdots,11$

原初值问题的精确解 $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$，经计算数值解有 **4** 位有效数字，如表 **7-4** 所示。

表 7-4 计 算 结 果

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$\lvert y(x_n) - y_n \rvert$
4	**0.4**	**1.050 695**	**1.050 718**	2.3×10^{-5}
5	**0.5**	**1.077 171**	**1.077 217**	4.6×10^{-5}
6	**0.6**	**1.107 865**	**1.107 932**	6.6×10^{-5}
7	**0.7**	**1.142 086**	**1.421 650**	7.9×10^{-5}
8	**0.8**	**1.179 189**	**1.179 274**	8.4×10^{-5}
9	**0.9**	**1.218 605**	**1.218 689**	8.4×10^{-5}
10	**1.0**	**1.259 842**	**1.259 921**	7.9×10^{-5}
11	**1.1**	**1.302 487**	**1.302 559**	7.2×10^{-5}
12	**1.2**	**1.346 198**	**1.346 263**	6.5×10^{-5}

20.用改进欧拉法和经典龙格-库塔格式求解初值问题

$$\begin{cases} y' = 3y + 2z, & y(0) = 0 \\ z' = 4y + z, & z(0) = 1 \end{cases}$$

取步长 $h = 0.1$ 算到 $x = 1$，并与精确解 $y(x) = \frac{1}{3}(e^{5x} - e^{-x})$，$z(x) = \frac{1}{3}(e^{5x} + 2e^{-x})$ 相比较。

解 改进欧拉法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0.05\{3y_n + 2z_n + 3[y_n + 0.1(3y_n + 2z_n)] + 2[z_n + 0.1(4y_n + z_n)]\} \\ \quad = 1.385\, y_n + 0.24\, z_n \\ z_{n+1} = z_n + 0.05\{4y_n + z_n + 4[y_n + 0.1(3y_n + 2z_n)] + [z_n + 0.1(4y_n + z_n)]\} \\ \quad = 0.48\, y_n + 1.145\, z_n \end{cases}$$

经典龙格-库塔法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ z_{n+1} = z_n + \frac{0.1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\ k_1 = 3y_n + 2z_n \\ l_1 = 4y_n + z_n \\ k_2 = 3(y_n + 0.05k_1) + 2(z_n + 0.05l_1) = 3.85\, y_n + 2.4 z_n \\ l_2 = 4(y_n + 0.05k_1) + (z_n + 0.05l_1) = 4.8 y_n + 1.45\, z_n \\ k_3 = 3(y_n + 0.05k_2) + 2(z_n + 0.05l_2) = 4.0575\, y_n + 2.505\, z_n \\ l_3 = 4(y_n + 0.05k_2) + (z_n + 0.05l_2) = 5.01 y_n + 1.5525\, z_n \\ k_4 = 3(y_n + 0.1k_3) + 2(z_n + 0.1l_3) = 5.21925\, y_n + 3.062\, z_n \\ l_4 = 4(y_n + 0.1k_3) + (z_n + 0.1l_3) = 6.134\, y_n + 2.15725\, z_n \end{cases}$$

代入，有

$$\begin{cases} y_{n+1} = 1.4005708\, y_n + 0.247866\, z_n \\ z_{n+1} = 0.495900\, y_n + 1.1527041\, z_n \end{cases}$$

计算结果如表 7-5 所示。

表 7-5 计 算 结 果

x_n	改进欧拉法		经典龙格-库塔法		精确解	
	y_n	z_n	y_n	z_n	y_n	z_n
0.1	**0.24**	**1.145**	**0.247 961 3**	**1.152 704 1**	**0.247 961 3**	**1.152 798 7**
0.2	**0.607 2**	**1.426 225**	**0.632 871 5**	**1.451 643 7**	**0.633 183 7**	**1.451 914 4**
0.3	**1.183 266**	**1.924 483 6**	**1.241 952**	**1.987 156 5**	**1.246 957 0**	**1.987 775 2**
0.4	**2.100 699 4**	**2.771 501 3**	**2.237 934 3**	**2.908 591 5**	**2.239 578 7**	**2.909 898 7**
0.5	**3.574 628 9**	**4.181 704 6**	**3.855 325**	**4.462 536 9**	**3.858 654 7**	**4.465 185 1**
0.6	**5.954 470 1**	**6.503 873 5**	**6.505 773 6**	**7.055 841 6**	**6.512 241 76**	**7.061 053 4**
0.7	**9.807 806**	**10.305 080 7**	**10.860 703**	**11.359 51**	**10.872 955 6**	**11.369 854 09**
0.8	**16.057 119**	**16.507 093**	**18.026 826**	**18.479 975**	**18.049 607 0**	**18.498 936 0**
0.9	**26.200 811**	**26.608 038**	**29.828 414**	**30.241 445**	**29.870 187 2**	**30.276 756 9**

1.0	**42.674 052**	**43.042 592**	**49.272 649**	**49.651 347**	**49.348 426 6**	**49.716 306 0**

21.用经典龙格-库塔格式求解初值问题

$$\begin{cases} y''-2y^3=0, & 1\le x\le 1.5 \\ y(1)=y'(1)=-1 \end{cases}$$

取步长$h=0.1$算到$x=1.5$，并与精确解$y=\dfrac{1}{x-2}$相比较。

解 令$y'=z$，则方程组化为

$$\begin{cases} y'=z, & y(1)=-1 \\ z'=2y^3, & z(1)=-1 \end{cases}$$

经典龙格-库塔法

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \\ z_{n+1}=z_n+\dfrac{h}{6}(l_1+2l_2+2l_3+l_4) \\ k_1=z_n \\ l_1=2y_n^3 \\ k_2=z_n+0.05l_1 \\ l_2=2(y_n+0.05k_1)^3 \\ k_3=z_n+0.05l_2 \\ l_3=2(y_n+0.05k_2)^3 \\ k_4=z_n+0.1l_3 \\ l_4=2(y_n+0.1k_3)^3 \end{cases}$$

消去k_1，k_2，k_3，k_4,上述公式可简化为

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hz_n+\frac{0.01}{6}(l_1+l_2+l_3) \\ z_{n+1}=z_n+\frac{0.1}{6}(l_1+2l_2+2l_3+l_4) \\ l_1=2y_n^3 \\ l_2=2(y_n+0.05z_n)^3 \\ l_3=2\left(y_n+0.05z_n+\frac{0.01}{4}l_1\right)^3 \\ l_4=2\left(y_n+0.1z_n+\frac{0.01}{2}l_2\right)^3 \end{cases}$$

计算结果如表 **7-6** 所示（取 **7** 位小数）。

表 7－6 计算结果

x_n	y_n	z_n	$y(x_n)$	$z(x_n)$	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$
1.1	-1.111 106 2	-1.234 573 3	-1.111 111 1	-1.234 567 9	0.49×10^{-5}
1.2	-1.249 986 1	-1.562 512 7	-1.250 000 0	-1.562 500 0	1.39×10^{-5}
1.3	-1.428 404 1	-2.040 840 5	-1.428 571 4	-2.040 816 3	1.673×10^{-4}
1.4	-1.666 445 5	-2.777 625 9	-1.666 666 7	-2.777 777 8	2.212×10^{-4}
1.5	-1.999 624 0	-3.999 573 7	-2.000 000 0	-4.000 000 0	3.76×10^{-4}

22.对二阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \qquad a \le x \le b \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = \beta \end{cases}$$

写出欧拉方法求解的计算公式。

解 令 $z = y'$，则二阶方程化为等价的一阶方程组

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x,y,z) \qquad a \le x \le b \\ y(a) = \alpha \\ z(a) = \beta \end{cases}$$

则有欧拉法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_n \\ z_{n+1} = z_n + hf(x_n + y_n + z_n) \quad n = 0, 1, \ldots n\text{-}1 \\ y_0 = \alpha \\ z_0 = \beta \end{cases}$$

由于$y_1 = y_0 + hz_0 = \alpha + h\beta, z_n = \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h}$，所以

$$\frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{h} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + hf(x_n + y_n + \frac{y_{n+1} - y_n}{h})$$

或

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 f\left(x_{n-1}, y_{n-1}, \frac{y_n - y_{n-1}}{h}\right)$$

$$n = 1, 2 \ldots$$

故求解初值问题的欧拉公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 f\left(x_{n-1}, y_{n-1}, \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h}\right) \\ y_0 = \alpha, y_1 = \alpha + h\beta \end{cases}$$

7.3 同步练习题及解答

1. 用欧拉法解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

其中 $x \in [0,\ 1]$，取步长 $h = 0.1$ 。

解 欧拉法的计算公式

$$y_{n+1} = y_n + 0.1(-y_n + x_n + 1) = 0.9y_n + 0.1x_n + 0.1$$

$n = 0$ 时，$y_1 = 0.9y_n + 0.1x_n + 0.1 = 1.000\ 000$，其余 $n=1,2,\ldots,10$ 的计算结果如表 7-7 所示。

表 7-7 计算结果

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
0	0.0	1.000 000	6	0.6	1.131 441
1	0.1	1.000 000	7	0.7	1.178 297
2	0.2	1.010 000	8	0.8	1.230 467
3	0.3	1.029 000	9	0.9	1.287 420
4	0.4	1.056 000	10	1.0	1.348 678
5	0.5	1.090 490			

2.取步长 h=0.1，用改进欧拉法解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y \quad 0 \le x \le 1.0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

并将数值求解与准确解e^{-x}相比较。

解 $f(x,y) = -y$，$h = 0.1$

改进欧拉法

$$\begin{cases} y_p = y_n + 0.1(-y_n) = 0.9y_n \\ y_c = y_n + 0.1(-y_p) = 0.91y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) = \frac{1}{2}(0.9y_n + 0.91y_n) = 0.905y_n \end{cases}$$

计算结果如表 7-8 所示。

表 7-8 计算结果

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$\vert y(x_n)-y_n \vert$

1	0.1	0.905 00	0.904 84	0.000 16
2	0.2	0.819 03	0.818 73	0.000 30
3	0.3	0.741 22	0.740 82	0.000 40
4	0.4	0.670 80	0.670 32	0.000 48
5	0.5	0.607 07	0.606 53	0.000 54
6	0.6	0.549 39	0.548 81	0.000 58
7	0.7	0.497 20	0.496 59	0.000 61
8	0.8	0.449 97	0.449 33	0.000 64
9	0.9	0.407 22	0.406 57	0.000 65
10	1.0	0.368 53	0.367 88	0.000 65

3．用经典龙格-库塔格式求解初值问题

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3y}{1+x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

其中 $0 \le x \le 1$，取步长 $h=0.2$。

解　四阶经典龙格-库塔格式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = \dfrac{3y_n}{1+x_n} \\ k_2 = \dfrac{3(y_n + 0.5hk_1)}{1 + x_n + 0.5h} \\ k_3 = \dfrac{3(y_n + 0.5hk_2)}{1 + x_n + 0.5h} \\ k_4 = \dfrac{3(y_n + hk_3)}{1 + x_n + 0.5h} \end{cases}$$

计算结果如表 7-9 所示。

表 7-9 计算结果

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0.0	1.000 000				
1	0.2	1.727 548	3.000 000	3.545 455	3.694 215	4.347 107
2	0.4	2.742 951	4.318 871	4.983 312	5.136 645	5.093 308
3	0.6	4.094 181	5.877 753	6.661 453	6.818 193	7.699 856
4	0.8	5.829 211	7.676 590	8.579 718	8.739 094	9.736 667
5	1.0	7.996 012	9.715 351	10.715 351	10.899 494	12.013 664

4．用经典龙格-库塔法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

其中 x ∈ [0, 0.5]，取步长 h=0.1。

解 h=0.1，f(x, y) = - y +1，用经典龙格-库塔法，对 n=0，有

$$\begin{cases} k_1 = f(0,0) = 1 \\ k_2 = f(0+0.05, 0+0.05\times 1) = 0.95 \\ k_3 = f(0+0.05, 0+0.05\times 0.95) = 0.952\,5 \\ k_4 = f(0+0.1, 0+0.1\times 0.952\,5) = 0.904\,75 \end{cases}$$

于是有

$$y_1 = 0 + \frac{0.1}{6}(1 + 2(0.95 + 0.952\,5) + 0.904\,75 = 0.095\,162\,5$$

这个值与准确值 $y(x)=-e^{-x}+1$ 在 x=0.1 处的值 y(0,1)=0.095 162 581... 已十分接近。对 n=1, 2, 3, 4 计算结果如表 7-10 所示。

表 7-10 计算结果

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	n	x_n	y_n	$y(x_n)$
0	0	0	0	3	0.3	0.259 181 5	0.259 181 7
1	0.1	0.095 162 5	0.095 162 6	4	0.4	0.329 679 7	0.329 679 9
2	0.2	0.181 269 1	0.181 269 2	5	0.5	0.393 469 0	0.393 469 3

5．用二阶泰勒展开求解初值问题

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

的解在 x=1.5 时的近似值，取步长 h=0.25。

解 二阶泰勒展开公式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$$

用 $y' = x^2 + y^2$，$y'' = 2x + 2yy' = 2x + 2y(x^2+y^2)$，代入上式并略去高阶项 $O(h^3)$，则得求解公式

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n^2 + y_n^2) + \frac{h^2}{2}[2x_n + 2y_n(x_n^2 + y_n^2)]$$

由 $y(1)=y_0=1$，计算得

$$y(1.25) \approx y_1 = 1.687\,5$$
$$y(1.50) \approx y_2 = 3.333\,298$$

6.推导求解初值问题

$$\begin{cases} y' = f(xy) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的数值格式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_ny_n) + \frac{h^2}{2}f'(x_ny_n)[y_n + x_nf(x_ny_n)]$$

并说明其阶数。

解 对 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处泰勒展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{1}{2!}y''(x_n)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(\varepsilon_n)h^3$$

因为$y' = f(xy)$，$y'' = f'(xy)(y + xy') = f'(xy)[y + xf(xy)]$于是上式成为

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n) + hf(x_n y(x_n)) + \frac{h^2}{2} f'(x_n y(x_n))[y(x_n)$$

$$+x_n f(x_n y(x_n))] + \frac{1}{3!} y'''(\varepsilon_n) h^3$$

对上式离散化，有

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n y_n) + \frac{h^2}{2} f'(x_n y_n)[x_n + x_n f(x_n y_n)]$$

为考虑局部截断误差，设$y_n = y(x_n)$，于是

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{3!} y'''(\varepsilon_n) h^3 = O(h^3)$$

所以所给数值格式是二阶的。

7.设常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的线性公式为

$y_{n+1} = y_{n-3} + 4hf(x_{n-1}, y_{n-1})$，试求该多步公式的局部截断误差并回答它有几阶精度。

解 由已知$y_{n+1} = y_{n-3} + 4hf(x_{n-1}, y_{n-1})$有局部截断误差

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$= y(x_{n+1}) - y(x_{n-3}) - 4hf(x_{n-1}, y(x_{n-1}))$$

$$= y(x_{n+1}) - y(x_{n-3}) - 4hy'(x_{n-1})$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{6} y'''(x_n)$$

$$-[y(x_n) - 3hy'(x_n) + \frac{9h^2}{2} y''(x_n) - \frac{27h^3}{6} y'''(x_n)]$$

$$-4h[y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{h^2}{2} y'''(x_n)] + O(h^4)$$

$$= \frac{8h^3}{3} y'''(x_n) + O(h^4) = O(h^3)$$

因此该多步公式的局部截断误差$O(h^3)$有二阶精度。

8．设常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

用泰勒展开原理构造

$$y_{n+1} = a(y_n + y_{n-1}) + h(b_0 f_n + b_1 f_{n-1})$$

的两步法，使它具有二阶精度，并求局部截断误差。

解 将初值问题的解y_{n+1}在x_n处泰勒展开

$$y_{n+1}=a[y(x_n)+y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)]$$

$$+h\{b_0y'(x_n)+b_1[y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y'''(x_n)+O(h^3)]\}$$

将 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处泰勒展开

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)$$

局部截断误差

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)$$

$$-a[y(x_n)+y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)]$$

$$-h\{b_0y'(x_n)+b_1[y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y'''(x_n)+O(h^3)]\}$$

$$=(1-2a)y(x_n)+(1+a-b_0-b_1)hy'(x_n)+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+b_1)\frac{h^2}{2}y''(x_n)$$

$$-(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}a-\frac{1}{2}b_1)h^3y'''(x_n)+O(h^4)$$

要确定参数 a，b_0，b_1，可令

$$1-2a=0,1+a-b_0-b_1=0,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+b_1=0$$

解得

$$a=\frac{1}{2},\ b_0=\frac{7}{4},\ b_1=-\frac{1}{4}$$

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}(y_n+y_{n-1})+h(\frac{7}{4}f_n-\frac{1}{4}b_1f_{n-1})$$

局部截断误差

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$$

9. 分别用亚当斯显式和隐式公式解初值问题

$$\begin{cases}y'=-y+x+1\\y(0)=1\end{cases}$$

其中 $x\in[0,1]$，取步长 $h=0.1$。

解 对于显式公式，将 $f(x)=-y+x+1$，直接代入，有

$$y_{n+1}=y_n+\frac{0.1}{24}(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3})，n=3，4，\dots，9$$

直接求出 y_{n+1}，而不用迭代，得到

$$y_{n+1}=\frac{8}{8.3}y_n+\frac{1}{249}(9x_{n+1}+9+19f_n-5f_{n-1}+f_{n-2})，n=3，4，\dots 9$$

利用本题的精确解 $y(x)=e^{-x}+x$，求出初始值，再按上面的公式进行计算，结果如表 7-11 所示。

表 7-11　计算结果

	精确解	显式方法		隐式方法	
x_n	$y(x_n)$	y_n	$\|y(x_n)-y_n\|$	y_n	$\|y(x_n)-y_n\|$
0.3	1.040818 22			1.040 818 01	2.1×10^{-7}
0.4	1.070 320 05	1.070 322 92	2.87×10^{-7}	1.070 319 66	3.9×10^{-7}
0.5	1.106 530 66	1.106 535 48	4.82×10^{-7}	1.106 530 14	5.2×10^{-7}
0.6	1.148 811 64	1.148 811 41	6.77×10^{-7}	1.148 811 01	6.3×10^{-7}
0.7	1.148 811 64	1.148 811 41	6.77×10^{-7}	1.148 811 01	6.3×10^{-7}
0.8	1.148 811 64	1.148 811 41	6.77×10^{-7}	1.148 811 01	6.3×10^{-7}
0.9	1.148 811 64	1.148 811 41	6.77×10^{-7}	1.148 811 01	6.3×10^{-7}
1.0	1.148 811 64	1.148 811 41	6.77×10^{-7}	1.148 811 01	6.3×10^{-7}

10.试列出初值问题

$$\begin{cases} y_1{}' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2,\ y_1(0) = y_1{}^0 \\ y_2{}' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2,\ y_2(0) = y_2{}^0 \end{cases}$$

的改进欧拉法和经典龙格-库塔法。

解　改进欧拉法

$$\begin{cases} y_{1,n+1} = y_{1,n} + \frac{h}{2}\{a_{11}y_{1,n} + a_{12}y_{2,n} + a_{11}[y_{1,n} + h(a_{11}y_{1,n} + a_{12}y_{2,n})] + a_{11}[y_{1,n} + h(a_{11}y_{1,n} + a_{12}y_{2,n})]\} \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} + \frac{h}{2}\{a_{21}y_{1,n} + a_{22}y_{2,n} + a_{21}[y_{1,n} + h(a_{12}y_{2,n} + a_{12}y_{2,n})] \quad + a_{22}[y_{2,n} + h(a_{21}y_{1,n} + a_{22}y_{2,n})]\} \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y_{1,\ n+1} \\ y_{2,\ n+1} \end{bmatrix} = \left(I + hA + \frac{1}{2}h^2A^2\right)\begin{bmatrix} y_{1,\ n} \\ y_{2,\ n} \end{bmatrix},\ n = 0,\ 1,\ 2\cdots$$

$$\text{其中 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

经典龙格-库塔法

$$\begin{cases} y_{1,n+1} = y_{1,n} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\ k_1 = a_{11}y_{1,n} + a_{12}y_{2,n} \\ l_1 = a_{21}y_{1,n} + a_{22}y_{2,n} \\ k_2 = a_{11}\left(y_{1,n} + \frac{h}{2}k_1\right) + a_{12}\left(y_{2,n} + \frac{h}{2}l_1\right) \\ l_2 = a_{21}\left(y_{1,n} + \frac{h}{2}k_1\right) + a_{22}\left(y_{2,n} + \frac{h}{2}l_1\right) \\ k_3 = a_{11}\left(y_{1,n} + \frac{h}{2}k_2\right) + a_{12}\left(y_{2,n} + \frac{h}{2}l_2\right) \\ l_3 = a_{21}\left(y_{1,n} + \frac{h}{2}k_2\right) + a_{22}\left(y_{2,n} + \frac{h}{2}l_2\right) \\ k_4 = a_{11}\left(y_{1,n} + \frac{h}{2}k_3\right) + a_{12}\left(y_{2,n} + \frac{h}{2}l_3\right) \\ l_4 = a_{21}\left(y_{1,n} + \frac{h}{2}k_3\right) + a_{22}\left(y_{2,n} + \frac{h}{2}l_3\right) \end{cases}$$

第 8 章 试题及解答

8.1 期中试题及解答

数值计算方法期中考试试卷

一. 问答题：（每题 4 分）

1. 叙述牛顿迭代法平方收敛的条件。
2. 拉格朗日插值函数有什么特点？
3. 如何确定区间二分法的次数？
4. 用消去法解线性方程组时，为什么选主元？
5. 说明有效数字位数对绝对误差和相对误差的影响？

二．填空题：（每题 5 分）

1．用四舍五入得到的近似数 0.550，有______位有效数字，其相对误差是______

2．已知函数 $f(x)=24x^3+79x-32$，在节点2^0，2^1，2^5，2^7的函数值，则其插值多项式 $p(x)=$______________________。

3．用牛顿迭代法求方程 $x=\cos x$ 的根时，迭代公式是________________________

4．已知函数 $f(x)=47.2\ x^7+23x^4+64x^2+36x-18$，其差商 $f[2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^7]=$____________________。

5．取 $c(x_k)=$__________，迭代法$x_{k+1}=x_k+c(x_k)f(x_k)$求方程 $f(x)=x^3+3x^2+3x+1=0$ 的根时，具有平方收敛速度。

6．迭代过程$x_{k+1}=x_k+c({x_k}^2-7)$至少平方收敛到根$x^*=\sqrt{7}$时，c 的取值___

______________________。

三．计算题：（第 1~4 题，每题 5 分；5~7 题，每题 10 分）

1．设函数 $f(x)=6.5x^4+47$，用拉格朗日余项定理求以-1，0，1，2 为节点的插值多项式。

2．求$\sqrt{6}(=2.449\,489\ldots)$的有效近似值，使相对误差不超过 0.2%。

3．已知函数 $f(x)=5^x$在 x=0，1，2 处的值，用埃特金逐次线性法求$\sqrt{5}$的近似值。

4．导出计算$\frac{1}{\sqrt{a}}$ (其中 a>0)的牛顿迭代公式，并使该迭代公式无法运算和开方运算。

5. 已知连续函数 f(x)在 x= -1，0，2，3 的值分别是 -3，-2，0，4:

(1)用牛顿插值计算 f(1)。

(2)用拉格朗日插值确定 f(x)=1 时，x 的近似值。

6. 对方程 $12-3x+2\cos x=0$ 取初值$x_0=4$，构造收敛的迭代格式，并确定收敛阶。迭代法如何进行终点判断？

7．对线性方程组

3x, + 2x, - 7a:, = 28

8x, + 2x, - 3x, = - 13

4x, + 6x, - x, = 5

(1)用列主元高斯消去法求解，并计算系数行列式。

(2)用两种充分条件判断其高斯-赛德尔迭代的收敛性。

(3)对系数矩阵进行杜里特尔分解。

数值计算方法期中考试试卷答案

一、1. 若 f(x)=0 的单根附近存在连续的二阶导数，当初值在单根附近时，牛顿迭代具有平方收敛速度。

2. ③n+1 个节点的基函数是 x 的 n 次多项式；

，③基函数在节点上取值为 0，1。第 i 个节点时，基函数 li(xi)为 1，其余节点基函数均为 0；

③基函数和每一个节点都有关，和被插值函数 f(x)无关。

3．根据 $\frac{1}{2^{k+1}}(b-a) < \varepsilon$ 确定二分的次数 k，其中 a、b 为函数所在区间的两个端点，e为给定精度。

4. 线性方程组的系数矩阵非奇异时，线性方程组有惟一解，但用高斯消去法求解时，可能出现主元素$a_{kk}^{(k)}=0$，这时尽管 det A≠0，消去过程也无法再进行；或者即使$a_{kk}^{(k)}\neq 0$，但如果其绝对值很小，用它作除数也会导致其他元素的数量级急剧增大和使舍人误差扩大，造成数值不稳定，严重影响计算结果的精度。因此在每一次确定乘数之前，要增加一个选主元的过程，即将绝对值大的元素交换到主对角线的位置上来。

6. 有效数字位数越多，近似数的绝对误差越小，相对误差也越!,\；反之，有效数字位数越少，近似数的绝对误差和相对误差越大。

二、1． 3，0.090 9%

2． $24x^3+79x-32$

3．$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-\cos x_k}{1+\sin x_k}$ ，k=0，1，…

4．47. 2

5．$-\frac{3}{f'(x_k)}=-\frac{1}{{x_k}^2+2x_k+1}$

6．$-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{7}}{14}$

三、1． 4 个节点的插值多项式为 3 次多项式，即 n =3。

$$R(x)=f(x)-P(x)=\frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}\omega(x)=\frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{4!}\omega(x)$$

$R(x)=6.5(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)=6.5x^4-13x^3-6.5x^2+13x$

因为$f(x)=6.5x^4+47$，所以插值多项式 $P(x)=13x^3+6.5x^2-13x+47$

2．$\sqrt{6}=2.449\,4\ldots$， $x_k=2$，$\varepsilon_r^*=\frac{1}{2x_1}\times 10^{-(n-1)}=\frac{1}{2\times 2}\times 10^{-(n-1)}\leq 0.2\%$，

$\frac{1}{4}\times 10^{-(n-1)}=2\times 10^{-3}$，比较不等式两端，有 $n-1=3$，即 $n=4$。所以$\sqrt{6}$的近似值要取 4 位有效数字，为 2.449。

3.

x	0	1	2	$\frac{1}{2}$
f(x)	1	5	25	?

用埃特金逐次线性插值计算顺序，可得

x_i	$f(x_i)$	一次	二次
0	1		
1	5	3	
2	25	7	1

因此$\sqrt{5}$的近似值为 1。

4. 令 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$，求 $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 即等价于求方程 $\frac{1}{x^2}=a$ 的正根，取 $f(x)=\frac{1}{x^2}-a=0$，$f'(x)=-\frac{2}{x^3}$

有 $x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{\frac{1}{x^2}-a}{-\frac{2}{x^3}}=1.5x-0.5ax^3$

迭代公式 $x_{k+1}=1.5x-0.5ax^3$，$k=0$，1，2 ...

5. （1）根据已知条件列表

x	-1	0	2	3	?
f(x)	-3	-2	0	4	1

构造差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶
-1	-3			
0	-2	1		
2	0	1	0	
3	4	4	1	$\frac{1}{4}$

则牛顿插值多项式

$$N(x)=(-3)+1\times(x+1)+0\times(x+1)(x-0)+\frac{1}{2}\times(x+1)(x-0)(x-2)$$

$$f(1)\approx N(1)=1.5$$

(2) 由于f(x)是严格单调连续函数，可用反插值，将函数表转换成反函数表

y	-3	-2	0	4	1
x	-1	0	2	3	?

拉格朗日插值多项式

$$L(y)=\frac{(y+2)(y-0)(y-4)}{(-3+2)(-3-0)(-3-4)}\times(-1)+\frac{(y+3)(y-0)(y-4)}{(-2+3)(-2-0)(-2-4)}\times 0+\frac{(y+3)(y+2)(y-4)}{(0+3)(0+2)(0-4)}\times 2$$
$$+\frac{(y+3)(y+2)(y-0)}{(4+3)(4+2)(4-0)}\times 3,$$
$$x\approx L(y)|_1=\frac{11}{14}+2=\frac{39}{14}=2.785\,7$$

6．方程 $12\text{-}3x+2\cos x=0$，建立等价方程 $x=4+\frac{2}{3}\cos x$，取迭代函数 $\varphi(x)=4+\frac{2}{3}\cos x$，则$\varphi'(x)=-\frac{2}{3}\sin x$ 。

取$x_0=4$，$|\varphi(x_0)|\ |_4=--\frac{2}{3}\sin(4)=0.504\,54\neq 0$，迭代格式$x_{k+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_k$局部收敛。

由$\left|x^*\text{-}x_k\right|\leq\frac{L}{1\text{-}L}\left|x_k\text{-}x_{k-1}\right|$可知，只要相邻两次迭代值$x_k$和$x_{k-1}$的偏差足够小，就能保证迭代值$x_k$准确，因而可用$\left|x_k\text{-}x_{k-1}\right|\leq\varepsilon$来控制迭代过程的结束，其中 ε 为给定精度。

7. （1）用列主元高斯消去法求解

方程组的增广矩阵

$$\begin{bmatrix}3&2&-7&28\\8&2&-3&-13\\4&6&-1&5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{交换 1，2 行;列选主元}}\begin{bmatrix}8&2&-3&-13\\3&2&-7&28\\4&6&-1&5\end{bmatrix}$$

第一次消元，确定乘数$m_{21}=\frac{3}{8}$，$m_{21}=\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix}8&2&-3&-13\\0&\frac{10}{8}&-\frac{47}{8}&\frac{263}{8}\\0&\frac{10}{2}&\frac{1}{2}&\frac{23}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{交换 1，2 行;列选主元}}\begin{bmatrix}8&2&-3&-13\\0&\frac{10}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{23}{2}\\0&\frac{10}{8}&-\frac{47}{8}&\frac{263}{8}\end{bmatrix}$$

进行第二次消元，确定系数$m_{32}=\frac{1}{4}$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & -3 & -13 \\ 0 & \frac{10}{2} & \frac{1}{2} & \frac{32}{2} \\ 0 & 0 & -6 & 30 \end{bmatrix}$$

回代

$$\begin{cases} x_3 = -5 \\ x_2 = 2.8 \\ x_1 = -4.2 \end{cases}$$

系数行列式 $\det A = (-1)^2 8 \times \frac{10}{2} \times (-6) = -240$

（2）判断高斯-赛德尔迭代的收敛性

方法 1　系数矩阵法

将方程组进行交换后为$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -13 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 28 \end{cases}$

因为方程组系数矩阵是严格对角占优阵，所以高斯-赛德尔迭代收敛。

方法 2　迭代矩阵法

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{4}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

由于$\|J\|_\infty < 1$，故雅可比迭代收敛，相应的高斯-赛德尔迭代也收敛。

（3）对系数矩阵进行杜里特尔分解

紧凑格式为

(3)	1	(2)	2	(-7)	-7
(8)	$^8/_3$	(2)	$-^{10}/_3$	(-3)	$^{47}/_3$
(4)	$^4/_3$	(6)	-1	(-1)	24

系数矩阵为$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 8 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{8}{3} & 1 & \\ \frac{4}{3} & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \\ & -\frac{10}{3} & \frac{47}{3} \\ & & 24 \end{bmatrix}$

8.2 期末试题(A 卷)及解答

数值计算方法期末考试试卷(A 卷)

一、填空题：(5 分，每题 1 分)

1. 有 7 个节点的牛顿-柯特斯公式的代数精度为______________次。
2. 设函数 f(x)可微，则求方程 x=f(x)的根的牛顿迭代公式是____________________________。
3. 用改进的欧拉法时，需要读人数据____________________________。
4. 用龙格-库塔法时，依据_________________________判断计算终点。
5. 柯特斯系数取决于________________________________。

二、推导、计算题：(35 分，每题 5 分)

1．已知函数 $f(x) = 6^x$ 在 x ＝ 0，1，2 处的值用复化梯形法求积分 $\int_0^2 f(x)dx$ 的近似值。

2．求$\sqrt{23}$= (4.795 831 5...)至少有几位有效数字才能使相对误差不超过 0.1%。

3. 对方程 6 - 3x + cosx =0 在初值 xo = 1.5 附近，构造收敛的迭代格式$x_{k+1} = \Phi(x_k)$，k=0，1，2...

4．已知函数 $f(x)= 54.3x^3$ 十 21，在点2^0，2^1，5，2^5，2^7的函数值，求其插值多项式 $P(x_k)$，
k=0，1，2...

5．求方程 $f(x)= x^3-3x^2 + 3x-1=0$ 的根，用迭代格式$x_{k+1} = x_k + c(x_k)f(x_k)$时，确定有平方收敛速度的$c(x_k)$。

6．设函数 $f(x)= 6.5x^4+47$，用拉格朗日余项定理求以 - 1，0，1，2 为有点的插值多项式。

7．迭代过程$x_{k+1} = x_k(2-ax_k)$收敛到根$x^* = \frac{1}{a}$ (其中 a≠0)时，确定其收敛阶。

三、推导、计算题：(60 分，每题 20 分)

1．在区间[-3h，3h]上，取节点 -α，0，α，求取α和求积系数，构造代数精度尽可能高的求积公式，并确定其代数精度。

2．连续函数 f(x)在 x= -3，-1，0，4 时的值分别是 -1，0，2，10。

(1)用拉格朗日二次插值计算 f(3)。

(2)用牛顿三次插值确定 f(x)=1 时，x 的近似值。

3．对下列线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -4 \\ 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 13 \end{cases}$$

(1)加以调整，用两种充分条件判断其高斯-赛德尔迭代的收敛性。

(2)用列主元高斯消去法求解，并计算系数行列式。

数值计算方法期末考试试卷(A 卷)答案

一、1．7

2．$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - f(x_k)}{1 - f'(x_k)}$

3．x_0，y_0，h，N

4. 步数 N

5. 积分区间等分数

二、1. $\int_0^2 f(x)dx \approx T_2 = \frac{h}{2}[1+2\times 6+36] = 24.5$

2. $\sqrt{23} = 4.795\,831\,5\cdots$，$\varepsilon_r{}^* = \frac{1}{2x_1}\times 10^{-(n-1)} = \frac{1}{2\times 4}\times 10^{-(n-1)} \le 0.1\%$

$\frac{1}{8}\times 10^{-(n-1)} \le 10^{-3}$；比较不等式两端，有 $n-1 = 3$，即 $n = 4$。所以 的近似值要取 4 位有效数字，为 4.796。

3．方程 $6-3x + \cos x = 0$，等价方程 $x = 2 + \frac{1}{3}\cos x$，取迭代函数 $\varphi(x) = 2 + \frac{1}{3}\cos x$，

则$\varphi'(x) = -\frac{1}{3}\sin x$。取$x_0 = 1.5$，$|\varphi'(x_0)||_{1.5} = -\frac{1}{3}\sin(1.5) < 1$，迭代格式$x_{k+1} = 4 + \frac{1}{3}\cos x_k(k = 0，1，\cdots)$局部收敛。

4. 对于次数不大于 n 的多项式，其 n 次插值多项式即是其本身，所以 $P(x)=54.3x^3 + 21$。

5. 方程 $f(x)=x^3-3x^2 + 3x-1 = (x-1)^3=0$，取有 3 重根时的牛顿迭代法$x_{k+1} = x_k-3\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，此时 $c(x_k) = -\frac{3}{f'(x_k)} = -\frac{1}{x_k{}^2-2x_k+1}$。

6. 4 个节点的插值多项式为 3 次多项式，即 n =3。

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}\omega(x) = \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{4!}\omega(x)$$

$$R(x) = 6.5(x+1)(x-0)(x-1)(x-1) = 6.5x^4-13x^3-6.5x^2 + 13x$$

因为 $f(x) = 6.5x^4 + 47$

插值多项式 $P(x) = 13x^3 + 6.5x^2-13x + 47$

$x_{k+1} = x_k(2-ax_k)$，取迭代函数 $\varphi(x) = x(2-ax)$，则$\varphi'(x) = 2-2ax$，$\varphi'\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

7．$x_{k+1} = x_k(2-ax_k)$，取迭代函数 $\varphi(x) = x(2-ax)$，则$\varphi'(x) = 2-2ax$，$\varphi'\left(\frac{1}{a}\right) = 0$，

$\varphi''(x) = -2a\neq 0$，迭代过程$x_{k+1} = x_k(2-ax_k)$平方收敛。

三、1. 求积公式$\int_{-3h}^{3h} f(x)dx \approx Af(-\alpha) + Bf(0) + Cf(\alpha)$，有 A，B，C 和 α 四个未知数，设求积公式对于 $f(x)=1$，x，x^2，x^3均准确成立，有

$$\begin{cases} A+B+C = 6h & ① \\ -\alpha A + \alpha C = 0 & ② \\ \alpha^2 A + \alpha^2 C = 18h^3 & ③ \\ -\alpha^3 A + \alpha^3 C = 0 & ④ \end{cases}$$

因式②、④不独立，故取

$$f(x) = x^4\text{时}, \qquad \alpha^4 A + \alpha^4 C = \frac{64}{5}h^5 \qquad ⑤$$

考虑求积公式系数的对称性，有 A= C，或由②式，$\alpha\neq 0$，有 A=C

$⑤/③$ 得
$$\frac{2\alpha^4A}{2\alpha^2A}=\frac{\frac{64}{5}}{18}h^2，\alpha=\pm\sqrt{\frac{27}{5}}h$$

由⑤得 $A=C=\frac{5}{3}$，由①得 $B=\frac{3}{8}h$，所以求积公式

$$\int_{-3h}^{3h}f(x)dx\approx\frac{5}{3}hf\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}h\right)+\frac{5}{3}hf(0)+\frac{5}{3}hf\left(\sqrt{\frac{27}{5}}h\right)$$

验算求积公式的代数精度，将 $f(x)=x^5$ 代人求积公式，左边 =右边。再将 $f(x)=x^6$ 代人求积公式，左边≠右边。所以求积公式的代数精度为 5 次，即为高斯求积公式。

2．解 (1)根据已知条件列表

x	-3	-1	0	4	3
f(x)	-1	0	2	10	?

取靠近 3 的三个节点 -1，0，4 作拉格朗日二次插值

$L(x)=\frac{(x-0)(x-4)}{(-1-0)(-1-4)}\times 0+\frac{(3+1)(3-4)}{(0+1)(0-4)}\times 2+\frac{(x+1)(x-0)}{(4+1)(4-0)}\times 10$，将 $x=3$ 代入

$L(3)=\frac{(3-0)(3-4)}{(-1-0)(-1-4)}\times 0+\frac{(3+1)(3-4)}{(0+1)(0-4)}\times 2+\frac{(3+1)(3-0)}{(4+1)(4-0)}\times 10=8$，$f(3)\approx 8$。

(2)由于 f(x)是单调连续函数，用反插值，将函数表转换成反函数表

y	-1	0	2	10	1
x	-3	-1	0	4	?

构造差商表

Y	X	一阶	二阶	三阶
-1	-3			
0	-1	2		
2	0	0.5	-0.5	
10	4	0.5	0	$\frac{1}{22}$

则牛顿插值多项式

$N(y)=(-3)+2\times(y+1)+(-0.5)(y+1)y+\frac{1}{22}(y+1)(y-2)$

N(1)=(-3)+2x(]+1)+(-0.5)(I+1)1

3．(1)判断高斯-赛德尔送代的收敛性

方法 1：系数矩阵法

将方程组进行行交换后为$\begin{cases}8x_1+2x_2-3x_3=-5\\4x_1+6x_2-x_3=13\\3x_1+2x_2-7x_3=-4\end{cases}$

因为方程组系数矩阵是严格对角占优阵，高斯-赛德尔迭代收敛。

方法 2：迭代矩阵法

在进行行交换后有雅可比迭代矩阵 $J=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{4}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{bmatrix}$，由于$\|J\|_\infty < 1$，故雅可比迭代收敛，相应的高斯-赛德尔迭代也收敛。

(2)用列主元高斯消去法求解

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -4 \\ 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 13 \end{cases} \xrightarrow[\text{列选主元}]{} \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -4 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 13 \end{cases}$$

第一次消元. 确定乘数$m_{21} = \frac{3}{8}$，$m_{31} = \frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{47}{8} & -\frac{17}{8} \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{31}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{选列主元}]{\text{交换 2，3 行}} \begin{bmatrix} 8 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{31}{2} \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{47}{8} & -\frac{17}{8} \end{bmatrix}$$

进行第二次消元，确定乘$m_{32} = \frac{1}{4}$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{31}{2} \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}，\text{回代}\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

系数行列式 $\det A = (-1)^2 \times 8 \times 5 \times (-6) = -240$

8.3　期末试题(B 卷)及解答

数值计算方法期末考试试卷(B 卷)

第 1~5 题为填空题每题 2 分，共 10 分。第 6~12 题为计算题，第 8、9 题每题 10 分，第 10~12 题每题 20 分。

1. 牛顿切线法具有平方收敛速度时，所求根的特点是____。

2．已知函数 f(x)= 46. 8x^3 +26，在点2^0，2^1，5，2^5，2^7处的函数值，其插值多项式 P(x)=____________________________。

3．拉格朗日插值基函数在节点上的取值是____________________________。

4．用二分法求方程$5x^3 - x - 1 = 0$在[1，2]的近似根，误差不大于10^{-3}至少要二分____________次。

5．已知 f(x)= 85x^7 +9x^3 +6，则 f[x，2^0，2^1，⋯，2^7]=____________。

6. 迭代过程$x_{k+1}=x_k+c({x_k}^2-5)$，当局部收敛到时$\sqrt{5}$时，确定 c 的值。

7. 用迭代法$x_{k+1}=x_k+c(x_k)f(x_k)$求方程

$$f(x)=x^2-4x+4=0$$

的根时，确定使该迭代法平方收敛的 $c(x_k)$。

8. 已知函数 f(x)= 6x 在 x= 0，1，2 的值；

(1)用变步长梯形法计算$\int_0^2 f(x)dx$

(2)用复化梯形法计算$\int_0^2 f(x)dx$

9. 对方程 12-3x+2cosx=0 在初值 7 附近构造收敛的迭代格式$x_{k+1}=\Phi(x_k)$，$k=0,1,\cdots$，并确定该迭代格式收敛的阶。

10. 对下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-7x_3=-5 \\ 8x_1-2x_2+3x_3=-8 \\ 4x_1+6x_2-x_3=4 \end{cases}$$

(1)不用矩阵求逆运算，求高斯-赛德尔迭代矩阵。

(2)用杜里特尔分解法求解。

11. 已知连续函数 f(x)在 x= -3，-1，0，5 时的值分别是-1，0，2，4。

(1)用拉格朗日二次插值计算 f(3)。

(2)用牛顿三次插值求 f(x)=1 时，x 的近似值。

12. 在区间[- 2h，2h]上，取节点-λ，0，λ求取λ和求积系数，构造代数精度尽可能高的求积公式，并确定其代数精度。

数值计算方法期末考试试卷(B 卷)答案

1. 单根

2. $P(x)=46.8x^3+26$

3. 0 或 1

4. 9

5. 0

6. $x_{k+1}=x_k+c({x_k}^2-5)$，迭代函数 $\phi(x)=x+c(x^2-5)$，$\phi'(x)=1+2cx$，当局部收敛到$\sqrt{5}$ 时，$|\phi'(\sqrt{5})|=|1+2c\sqrt{5}|<1$，$-1<2c\sqrt{5}<1$，$-\frac{1}{\sqrt{5}}<c<0$

7. $f(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2=0$，用$x_{k+1}=x_k+c(x_k)f(x_k)$时，取 2 重根时的牛顿迭代法$x_{k+1}=x_k-2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，此时 $c(x_k)=-2\frac{2}{f'(x_k)}=-\frac{1}{x_k-2}$

8. (1)$f(x)=6^x$，则 $x=0$，1，2，$f(x)=1$，6，36，有 $=37$，又$T_1=\frac{2}{2}+(1+36)$，又$\int_0^2 f(x)dx\approx T_2=\frac{T_1}{2}+\frac{2}{2}\times 6=24.5$

(2) $\int_0^2 f(x)dx \approx T_2 = \frac{1}{2} + [f(0) + 2f(1) + f(2)] = \frac{1}{2}[1 + 2 \times 6 + 36] = 24.5$

9．$12\text{-}3x + 2\cos x = 0$，等价方程 $x = 4 + \dfrac{2}{3}\cos x$，取迭代函数 $\varphi(x) = 4 + \dfrac{2}{3}\cos x$，，则 $\varphi'(x) = -\dfrac{2}{3}\sin x$。取$x_0 = 7$，$|\varphi'(x_0)||_7 = -\dfrac{2}{3}\sin(7) < 1$，迭代格式$x_{k+1} = 4 + \dfrac{2}{3}\cos x_k$，k 0，1，…，局部收敛。又$\varphi'(x_0)|_7 = -\dfrac{2}{3}\sin(7) \neq 0$，$x_{k+1} = 4 + \dfrac{2}{3}\cos x_k$线性(1 阶)收敛。

10．（1）高斯-赛德尔迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -2x_2^{(k)} + 7x_3^{(k)} - 5 \\ x_2^{(k+1)} = 4x_1^{(k+1)} + 1.5x_3^{(k)} + 4 = -8x_2^{(k)} + 29.5x_3^{(k)} - 16 \\ x_3^{(k+1)} = 4x_1^{(k+1)} + 6x_3^{(k+1)} - 4 = -8x_2^{(k)} + 28x_3^{(k)} - 120 - 48x_2^{(k)} + 177x_3^{(k)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -2x_2^{(k)} + 7x_3^{(k)} - 5 \\ x_2^{(k+1)} = 8x_2^{(k)} + 29.5x_3^{(k)} - 16 \\ x_3^{(k+1)} = -56x_2^{(k)} + 205x_3^{(k)} - 120 \end{cases}$$

高斯-赛德尔迭代矩阵 $G = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 0 & -8 & 29.5 \\ 0 & -56 & 205 \end{bmatrix}$

（2）$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 8 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix}$

(1)	1	(2)	2	(-7)	-7	(-5)	-5
(8)	8	(-2)	-18	(3)	59	(-8)	32
(4)	4	(16)	$^1/_9$	(-1)	$^{184}/_9$	(-4)	$^9/_{184}$

$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 8 & 1 & \\ 4 & \frac{1}{9} & 1 \end{bmatrix}$，$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ & -18 & 59 \\ & & \frac{184}{9} \end{bmatrix}$，$y = \begin{bmatrix} -5 \\ 32 \\ \frac{184}{9} \end{bmatrix}$

由 $Ux = y$，可得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ & -18 & 59 \\ & & \frac{184}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 32 \\ \frac{184}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$

11．（1）根据已知条件列表

x	-3	-1	0	5	3
f(x)	-1	0	2	4	?

取靠近 3 的三个节点 -1，0，5，作拉格朗日二次插值

$L(x)=\frac{(x-0)(x-5)}{(-1-0)(-1-5)}\times 0+\frac{(x+1)(x-5)}{(0+1)(0-5)}\times 2+\frac{(x+1)(x-0)}{(5+1)(5-0)}\times 4$，将 $x=3$ 代入

$L(3)=\frac{(x-0)(x-5)}{(-1-0)(-1-5)}\times 0+\frac{(3+1)(3-5)}{(0+1)(0-5)}\times 2+\frac{(3+1)(3-0)}{(5+1)(5-0)}\times 4=\frac{14}{3}$，$f(3)\approx\frac{14}{3}$

（2）由于 f(x)是严格单调连续函数，可用反插值，将函数表转换成反函数表

y	-1	0	2	4	1
x	-3	-1	0	5	?

构造差商表

y	x	一阶	二阶	三阶
-1	-3			
0	-1	2		
2	0	0.5	-0.5	
4	5	2.5	0.5	0.2

则牛顿插值多项式

$$N(y)=(-3)+2\times(y+1)+(-0.5)(y+1)y+0.2(y+1)y(y-2)$$
$$N(1)=(-3)+2\times(1+1)+(-0.5)(1+1)1+0.2(1+1)1(1-2)$$
$$=-0.4$$ 当 $f(x)=1$ 时，$x\approx -0.4$

12．$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx\approx Af(-\lambda)+Bf(0)+Cf(\lambda)$ 有四个未知数，故对 $f(x)=1$，x，x^2，x^3 均准确成立，因此有

$$\begin{cases}A+B+C=4h & ①\\ -\lambda A+\lambda C=0 & ②\\ \lambda^2A+\lambda^2C=\frac{16}{3}h^3 & ③\\ -\lambda^3A+\lambda^3C=0 & ④\end{cases}$$

因为②、④不独立，故取

$f(x)=x^4$时，　　$\lambda^4A+\lambda^4C=\frac{64}{5}h^5$　　⑤

由②式，$\lambda\neq 0$，有 $A=C$，⑤/③ 得 $\frac{2\lambda^4A}{2\lambda^2A}=\frac{\frac{64}{5}}{\frac{16}{3}}h^2$，$\lambda=\pm\sqrt{\frac{12}{5}}h$，由⑤得 $A=C=\frac{10}{9}h$，

由①得

$B=\frac{16}{9}h.$

所以

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx \frac{16}{9}hf\left(-2h\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{16}{9}hf(0) + \frac{10}{9}hf\left(-2h\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

验证代数精度，将 $f(x)=x^5$ 代入求积公式，左边=右边=0。$f(x)=x^6$ 代入求积公式，左边$\neq$右边。所以，求积公式代数精度为 5 次，即为高斯求积公式。

$B = \frac{16}{9}h.$

所以

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx \frac{16}{9}hf\left(-2h\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{16}{9}hf(0) + \frac{10}{9}hf\left(-2h\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

验证代数精度，将 $f(x)=x^5$ 代入求积公式，左边=右边=0。$f(x)=x^6$ 代入求积公式，左边$\neq$右边。所以，求积公式代数精度为 5 次，即为高斯求积公式。