《概率论与数理统计》

习题解答(第二版)

编者：伍霖

指导老师：顾燕

南京航空航天大学

前言

本书对南京航空航天大学《概率论与数理统计》课程习题册习题进行的完整详细的解答. 编写此书的目的不仅是为方便同学们检查复习，而且也为课程的教学提供了参考资料. 选择编写电子版是为了让解答更规范，为同学们的应试提供了解题模板.

在本书的编写过程中，我得到了数学学院顾燕老师的详细指导与院长蒋建林老师的大力支持，在此对二位老师的关心与帮助表示由衷的感谢！在本书编写完成后，我有幸得到了梁巧欣、陈家栋、肖昊哲等同学的仔细审阅，指出了错误之处，并提供了修改意见，在此对以上同学的审阅表示衷心的感谢！由于作者本人能力有限，纰漏之处还请见谅，如有修改意见请发送邮件至 wulin0919@nuaa.edu.cn.

最后祝愿每位同学都能顺利地完成《概率论与数理统计》这门课程的学习！

作者 **伍霖**

2024 年 12 月 5 日

(2024 年 12 月 5 日更新版)

目录

第一章 概率论的基本概念

1.1 用集合的形式写出下列随机试验的样本空间 S 和随机事件 A：

(1)掷一枚骰子，观察向上一面的点数. 事件 A 表示“出现奇数点”；

(2)对一个目标进行射击，一旦击中就停止射击，观察射击的次数. 事件 A 表示“射击次数不超过 3 次”；

(3)把单位长度的一根细棒折成三段，观察各段的长度，事件 A 表示“三段细棒能构成一个三角形”.

解：(1)$S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$

(2)假设第 n 次第一次击中目标，则 $S=\{1,2,3,\ldots,n\}$，$A=\{1,2,3\}$

(3)假设三段细棒的长度分别为 x，y，z，则 $S=\{(x,y,z)|x+y+z=1,\ x,y,z>0\}$，有

$$A=\{(x,y,z)|x+y+z=1,\ x+y>z,\ x+z>y,\ y+z>x,\ x,y,z>0\}.\square$$

1.2 设 A，B，C 为三个事件，用 A，B，C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(3) A，B，C 中至少有一个发生；

(4) A，B，C 都发生；

(5) A，B，C 中都不发生；

(6) A，B，C 中不多于一个发生；

(7) A，B，C 中不多于两个发生；

(8) A，B，C 中至少有两个发生.

解：(1)$P\left(A\bar{B}\bar{C}\right)$；(2)$P\left(AB\bar{C}\right)$；(3)$P(A\cup B\cup C)$；(4)$P(ABC)$；(5)$P\left(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\right)$；

(6)$P\left(\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{B}\bar{C}\right)$；(7)$P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}\right)=P\left(\overline{A\cap B\cap C}\right)$；(8)$P(AB\cup AC\cup BC)$.$\square$

注：德摩根定律：$\overline{\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n}=\bigcap\limits_{n\geq 1}\bar{A}_n$；$\overline{\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n}=\bigcup\limits_{n\geq 1}\bar{A}_n$.

1.3 化简下列各式：

(1) $AB\cup A\bar{B}$；

(2)$(A\cup B)\cup\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)$；

(3)$\left(\overline{A\cup B}\right)\cap\left(A-\bar{B}\right)$.

解：(1)$AB\cup A\bar{B}=A$

(2)$(A\cup B)\cup\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)=S$

(3)$\left(\overline{A\cup B}\right)\cap\left(A-\bar{B}\right)=\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)\cap\left(A-\bar{B}\right)=\varnothing$.□

1.4 某建筑倒塌(记为事件 A)的原因有以下 3 个：地震(记为事件 A_1)；台风(记为事件 A_2)；暴雨(记为事件 A_3). 已知台风时必定有暴雨，请用 A_1，A_2，A_3 来表示 A.

解：注意到

$$A=A_1\cup A_2\cup(A_3-A_2)=A_1\cup A_3$$

其中 $A_2\subseteq A_3$.□

1.5 设 A，B，C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，求 A，B，C 至少一个发生的概率.

解： A，B，C 至少一个发生的概率 $P(A\cup B\cup C)$，那么有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-0-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}.\square\end{aligned}$$

注： A 与 B 不能同时发生，B 与 C 不能同时发生，由此可得 A，B 和 C 均不能同时发生，即 $P(ABC)=0$；或因为 $ABC\subseteq AB$，那么有 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0\Longleftrightarrow P(ABC)=0$.

1.6 设 A，B 是两个事件，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.7$，$P(A\cup B)=0.8$. 试求 $P(A-B)$ 与 $P(B-A)$.

解：注意到

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.5+0.7-0.8=0.4$$

那么有

$$\begin{aligned}P(A-B)&=P(A)-P(AB)=0.5-0.4=0.1\\P(B-A)&=P(B)-P(AB)=0.7-0.4=0.3.\square\end{aligned}$$

1.7 一份试卷上有 6 道题，某位学生在解答时由于粗心随机的犯了 4 处不同的错误，试求：

(1)这 4 处错误发生在最后一道题的概率；

(2)这 4 处错误发生在不同题上的概率；

(3)至少有 3 道题全对的概率.

解：(1)设这 4 处错误发生在最后一道题为 A 事件，则有

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{1}{6\times6\times6\times6}=\frac{1}{1296}$$

(2)设这 4 处错误发生在不同题上为 B 事件，则有

$$P(B)=\frac{k}{n}=\frac{6\times5\times4\times3}{6\times6\times6\times6}=\frac{5}{18}$$

(3)设至少有 3 道题全对为 C 事件，其对立事件为事件 B，则有

$$P(C)=P\left(\bar{B}\right)=1-P(B)=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}.\square$$

1.8 已知 $P\left(\bar{A}\right)=0.3$，$P(B)=0.4$，$P\left(A\bar{B}\right)=0.5$，求条件概率 $P\left(B|A\cup\bar{B}\right)$.

解：注意到

$$\begin{aligned}P\left(B|A\cup\bar{B}\right)&=\frac{P\left[B\cap\left(A\cup\bar{B}\right)\right]}{P\left(A\cup\bar{B}\right)}=\frac{P(AB)}{P(A)+P\left(\bar{B}\right)-P\left(A\bar{B}\right)}\\&=\frac{P(A)-P\left(A\bar{B}\right)}{\left[1-P\left(\bar{A}\right)\right]+\left[1-P(B)\right]-P\left(A\bar{B}\right)}\\&=\frac{\left[1-P\left(\bar{A}\right)\right]-P\left(A\bar{B}\right)}{\left[1-P\left(\bar{A}\right)\right]+\left[1-P(B)\right]-P\left(A\bar{B}\right)}\\&=\frac{(1-0.3)-0.5}{(1-0.3)+(1-0.4)-0.5}=\frac{1}{4}=0.25.\square\end{aligned}$$

1.9 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$.

解：因为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB)}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\Longrightarrow P(AB)=\frac{1}{12}$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{P(B)}=\frac{1}{2}\Longrightarrow P(B)=\frac{1}{6}$$

所以有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.\square$$

1.10 已知在 10 件产品中有 2 件次品，在其中取两次，每次取一件，作不放回抽样，求下列事件的概率：

(1)两件都是正品;

(2)两件都是次品;

(3)一件正品,一件次品;

(4)第二次取出的是次品.

解:(1)设抽出两件都是正品为 A 事件,则有

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{8\times 7}{10\times 9}=\frac{28}{45}$$

(2)设抽出两件都是次品为 B 事件,则有

$$P(B)=\frac{k}{n}=\frac{2\times 1}{10\times 9}=\frac{1}{45}$$

(3)设抽出一件正品,一件次品为 C 事件,则有

$$P(C)=\frac{k}{n}=\frac{8\times 2+2\times 8}{10\times 9}=\frac{16}{45}$$

(法二)

$$P(C)=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)=1-\frac{28}{45}-\frac{1}{45}=\frac{16}{45}$$

(4)设第二次取出的是次品为 D 事件,则有

$$P(D)=\frac{k}{n}=\frac{8\times 2+2\times 1}{10\times 9}=\frac{1}{5}.\square$$

1.11 设甲袋中装有 n 只白球,m 只红球;乙袋中装有 N 只白球,M 只红球. 今从甲袋中任意取一球放入乙袋中,再从乙袋中任意取一球,问取到白球的概率是多少?

解:设取到白球为 A 事件,则有

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{N+1}{(N+1)+M}+\frac{m}{m+n}\cdot\frac{N}{N+(M+1)}\\&=\frac{n(N+1)+mN}{(m+n)(N+M+1)}.\square\end{aligned}$$

1.12 某年级有甲,乙,丙三个班级,各班人数分别占年级总人数的 $\frac{1}{4}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{5}{12}$. 已知甲,乙,丙三个班级中集邮人数分别占该班总人数的 $\frac{1}{2}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{5}$,试求:

(1)从该年级中随机选取一人,此人为集邮者的概率;

(2)从该年级中随机选取一人,发现此人是集邮者,此人属于乙班的概率.

解:(1)设随机抽取到甲班为 A 事件,随机抽取到乙班为 B 事件,随机抽取到丙班为 C 事件,随机抽取一人为集邮者为 D 事件,则有

$$P(D)=P(AD)+P(BD)+P(CD)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{12}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{24}$$

(2)即求

$$P(B|D)=\frac{P(BD)}{P(D)}=\frac{P(D|B)P(B)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{7}{24}}=\frac{2}{7}.\square$$

1.13 一个学生接连参加同一课程的两次考试，第一次及格的概率为 p. 若第一次及格则第二次及格的概率也是 p；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\frac{p}{2}$. 求：

(1)若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率；

(2)若已知他第二次已经及格,求他第一次及格的概率.

解：(1)设第一次及格为 A 事件，第二次及格为 B 事件，至少有一次及格为 C 事件，则有

$$P(A)=p,\ P(B|A)=p,\ P(B|\bar{A})=\frac{p}{2}$$

那么可以得到

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\Longrightarrow P(AB)=P(B|A)P(A)=p\cdot p=p^2$$

$$P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}\Longrightarrow P(B)=[1-P(A)]P(B|\bar{A})+P(AB)$$

$$=(1-p)\cdot\frac{p}{2}+p^2=\frac{1}{2}p(p+1)$$

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=p+\frac{1}{2}p(p+1)-p^2=\frac{1}{2}p(3-p)$$

(2)即求

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{p^2}{\frac{1}{2}p(p+1)}=\frac{2p}{p+1}.\square$$

1.14 一个盒子装有 6 只乒乓球，其中 4 只是新球. 第一次比赛时随机从盒子里取出 2 只球，使用后放回盒子里. 第二次比赛时又随机从盒子里取出 2 只球. 求：

(1)第二次取出的球全是新球的概率；

(2)已知第二次取出的球全是新球，第一次比赛时取的球恰含一个新球的概率.

解：(1)设第一次取出的球全是新球为 A_1 事件，一新一旧为 A_2 事件，全是旧球为 A_3 事件，第二次取出的球全是新球为 B 事件，则有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)\\&=\frac{C_2^2}{C_6^2}\cdot\frac{C_4^2}{C_6^2}+\frac{C_3^2}{C_6^2}\cdot\frac{C_4^1\cdot C_2^1}{C_6^2}+\frac{C_4^2}{C_6^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_6^2}\\&=\frac{1}{15}\times\frac{6}{15}+\frac{3}{15}\times\frac{4\times 2}{15}+\frac{6}{15}\times\frac{1}{15}=\frac{4}{25}\end{aligned}$$

(2)即求

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_2)\cdot P(A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{15}\cdot\frac{4\cdot 2}{15}}{\frac{4}{25}}=\frac{2}{3}.\square$$

1.15 袋子中装有 m 枚正品硬币，n 枚次品硬币(次品硬币的两面均印有国徽). 在袋子中任取一枚，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽. 问这枚硬币是正品的概率为多少?

解：设硬币是正品为 A 事件，硬币是次品为 B 事件，投掷 r 次每次都得到国徽为 C 事件，则有

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(C|A)P(A)}{P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot\frac{m}{m+n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot\frac{m}{m+n}+1\cdot\frac{n}{m+n}}=\frac{m}{2^r\cdot n+m}.\square$$

1.16 设甲，乙，丙三人同时独立的向同一目标各射击一次，命中率分别是 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，现已知目标被击中，求它被乙击中的概率是多少?

解：设甲，乙，丙三人分别命中目标为 A，B，C 事件，目标被击中为 D 事件，且甲，乙，丙三人是否射中目标的事件相互独立，则有

$$\begin{aligned}P(D)&=P(A\cup B\cup C)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}\end{aligned}$$

所以有

$$P(B|D)=\frac{P(BD)}{P(D)}=\frac{P(B)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{8}{9}}=\frac{9}{16}.\square$$

1.17 设根据以往记录的数据分析，某船只运输的某种物品损坏情况共有三种：损坏 2%(记为事件 A_1)，损坏 10%(记为事件 A_2)，损坏 90%(记为事件 A_3). 现从已被运输的物品中随机抽取损坏 3 件，发现这三件都是好的(事件 B)(这里假设物品件数很多，取出一件后不影响取后一件的好坏的概率). 在如下两种情况下，求 $P(A_1|B)$，$P(A_2|B)$，$P(A_3|B)$：

(1) $P(A_1)=0.8$，$P(A_2)=0.15$，$P(A_3)=0.05$；

(2) $P(A_1)=0.7$，$P(A_2)=0.15$，$P(A_3)=0.05$.

解：(1)运输的物品分成三部分：A_1 为一部分里面的物品损坏了 2%；A_2 为一部分里面的物

品损坏了 10%；A_3为一部分里面的物品损坏了 90%，从这三部分中抽取，利用全概率公式有

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$
$$=0.98^3\times0.8+0.9^3\times0.15+0.1^3\times0.05=0.862354$$

因此有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.98^3\times0.8}{0.862354}=0.873138$$
$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.9^3\times0.15}{0.862354}=0.126804$$
$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)}=\frac{0.1^3\times0.05}{0.862354}=5.79809\times10^{-5}$$

(2)运输的物品分成四部分：A_1为一部分里面的物品损坏了 2%；A_2为一部分里面的物品损坏了 10%；A_3为一部分里面的物品损坏了 90%；B_0为一部分里面的物品完好，从这四部分中抽取，因为

$$P(B_0)=1-[P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)]=0.1$$

利用全概率公式有

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)+P(B|B_0)P(B_0)$$
$$=0.98^3\times0.7+0.9^3\times0.15+0.1^3\times0.05+1^3\times0.1=0.868234$$

因此有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.98^3\times0.7}{0.868234}=0.758821$$
$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.9^3\times0.15}{0.868234}=0.125945$$
$$PP(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)}=\frac{0.1^3\times0.05}{0.868234}=5.75881\times10^{-5}.\square$$

1.18 设A，B是两个事件，已知$P(A)=0.3$，$P(B)=0.6$，试在下列两种情况下分别求出$P(A|B)$，$P\left(\bar{A}\middle|\bar{B}\right)$，$P\left(\bar{A}\cup B\right)$：

(1)事件A，B互不相容；

(2)事件A，B有包含关系；

(3)事件A，B相互独立.

解：(1)事件 A 与 B 互不相容，即$P(AB)=0$，则有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0$$

$$P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(AB)]}{1-P(B)}$$

$$=\frac{1-(0.3+0.6-0)}{1-0.6}=0.25$$

$$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)=1-P(A)+P(B)-[P(B)-P(AB)]$$

$$=1-P(A)+P(AB)=1-0.3+0=0.7$$

(2)事件 A 与 B 有包含关系，即 $P(AB)=P(A)$，则

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{0.3}{0.6}=0.5$$

$$P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(AB)]}{1-P(B)}=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(A)]}{1-P(B)}=1$$

$$P(\bar{A}\cup B)=1-P(A)+P(AB)=1-P(A)+P(A)=1$$

(3)事件 A 与 B 相互独立，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，则有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)=0.3$$

$$P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(AB)]}{1-P(B)}=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]}{1-P(B)}$$

$$=\frac{[1-P(A)][1-P(B)]}{1-P(B)}=1-P(A)=1-0.3=0.7$$

$$P(\bar{A}\cup B)=1-P(A)+P(AB)=1-P(A)+P(A)P(B)=1-0.3+0.3\times 0.6=0.88.\square$$

1.19 设情报员能破译一份密码的概率为 0.6. 试问，至少要使用多少名情报员才能使破译一份密码的概率大于 0.95?(假定各情报员能否破译密码是相互独立的)

解：设第 i 名情报员能破译一份密码为 A_i 事件，破译一份密码为 B 事件，假设至少需要 n 名情报员才能使破译一份密码的概率大于 0.95，即求在 $P(B)>0.95$ 条件下 n 的最小值，因为每名情报员破译一份密码相互独立，则有

$$P(B)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\bar{A}_i)$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]=1-(1-0.6)^n>0.95$$

则有

$$0.4^n<0.05\Longleftrightarrow n\ln(0.4)<\ln(0.05)\Longleftrightarrow n>\frac{\ln(0.05)}{\ln(0.4)}=3.27\Longleftrightarrow n_{\min}=4$$

即至少需要 4 名情报员才能使破译一份密码的概率大于 0.95.□

1.20 某厂生产的钢琴中有 70%可以直接出厂，剩下的钢琴经过调试后，其中 80%可以出厂，20%被定为不合格品. 现该厂生产了$n(\geq 2)$架钢琴，假定各钢琴质量相互独立. 试求：

(1)所有钢琴能出厂的概率；

(2)恰好有两架钢琴不能出厂的概率.

解: (1)设第i台钢琴能出厂为A_i事件，所有钢琴能出厂为B事件，且各钢琴质量相互独立，则有

$$P(B)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i)=(0.7+0.3\cdot 0.8)^n=0.94^n$$

(2)设恰有两架钢琴不能出厂为C事件，则

$$\begin{aligned}P(\mathrm{C})&=C_n^2 P^2\left(\bar{A}_i\right)P^{n-2}(A_i)=C_n^2[1-P(A_i)]^2 P^{n-2}(A_i)\\&=\frac{n(n-1)}{2}\times(1-0.94)^2\times 0.94^{n-2}\\&=\frac{0.06^2\times 0.94^{n-2}\times n(n-1)}{2}\\&=0.00203712\times 0.94^n n(n-1).\square\end{aligned}$$

第二章 随机变量及其分布

2.1 袋子中有 4 只黑球，2 只白球，每次取一个，不放回，直到取到黑球为止，令 X 为“取到的白球个数”，求 X 的分布律.

解：随机变量 X 可能的取值为 0，1，2，则有

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

.□

2.2 (1)给出随机变量 X 的取值及其对应的概率为 $P(X=k)=\frac{1}{3^k}$，$k=1,2,...$，判断它是否为随机变量的分布律；

(2)设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{a}{N}$，$k=1,2,...,N$，试确定常数 a.

解：(1)由题意可得

$$P(X=1)=\frac{1}{3}，P(X=2)=\frac{1}{3^2}，\cdots，P(X=k)=\frac{1}{3^k}$$

那么有

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\neq 1$$

即不是随机变量的分布律

(2)由题意可得

$$P(X=1)=\frac{a}{N}，P(X=2)=\frac{a}{N}，\cdots，P(X=k)=\frac{a}{N}$$

那么有

$$\sum_{k=1}^{N}P(X=k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{a}{N}=\frac{a}{N}\cdot N=a=1\Longrightarrow a=1.\square$$

2.3 若有彼此独立工作的同类设备 90 台，每台发生故障的概率为 0.01. 现配备三个修理工人，每人分块包修 30 台，求设备发生故障而无人修理的概率. 若三人共同负责维修 90 台，这时设备发生故障而无人修理的概率是多少？

解：(方案一)

以 X 记第 1 个人维护的 30 台中同时发生故障的台数，以 $A_i\,(i=1,2,3)$ 表示事件第 i 个人

维护 30 台中发生故障不能及时维修，则知 90 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\right)=1-P^3(X<2)=1-\left[\sum_{k=0}^{1}P(X=k)\right]^3$$

因为$X\sim B(30,0.01)$，所以可得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=1-[C_{30}^0\times(0.01)^0\times(0.99)^{30}+C_{30}^1\times(0.01)^1\times(0.99)^{29}]^3\\&=0.104571\end{aligned}$$

(方案二)

以 Y 记 90 台中同一时刻发生故障的台数，此时$Y\sim B(90,0.01)$，故 90 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P(Y\geq 4)=1-\sum_{k=0}^{3}C_{90}^k\cdot(0.01)^k\cdot(0.99)^{90-k}=0.0383203.\square$$

2.4 已知随机变量 X 的概率分布为$P(X=1)=0.2$，$P(X=2)=0.3$，$P(X=3)=0.5$，试写出其分布函数并画出相应的图形.

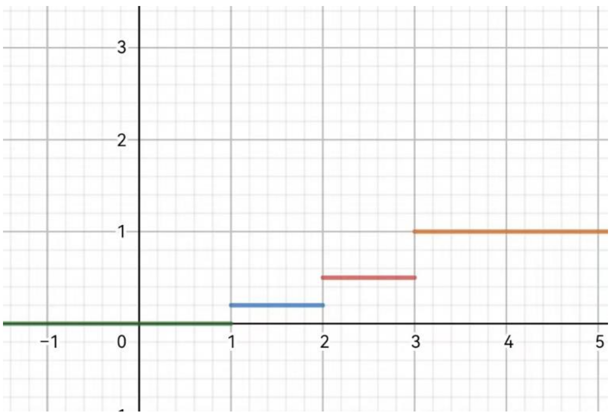
解：随机变量X对应的分布律为

X	1	2	3
$P(X)$	0.2	0.3	0.5

那么随机变量X的分布函数$F(x)$为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\0.2, & 1\leqslant x<2\\0.5, & 2\leqslant x<3\\1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

其函数图像如下



.$\square$

2.5 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.4, & -1\leqslant x<1\\ 0.8, & 1\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$，求 X 的分布律.

解：随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.4, & -1\leqslant x<1\\ 0.8, & 1\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

随机变量 X 对应的分布律为

X	-1	1	3
$P(X)$	0.4	0.4	0.2

.□

2.6 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0<x<1\\ \frac{2}{9}, & 3<x<6\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，若 $P(X>k)=\frac{2}{3}$，求 k 的取值范围.

解：注意到

$$P(X>k)=1-P(X\leqslant k)=\frac{2}{3}\Longrightarrow P(X\leqslant k)=\frac{1}{3}$$

结合随机变量 X 的概率密度图形可得 $1\leqslant k\leqslant 3$.□

2.7 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，以 Y 表示 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X<\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，求 Y 的分布律.

解：设随机变量 X 的分布函数分别为 $F(x)$，那么有

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x^2, & 0<x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

所以 $P\left(X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，可知 $Y\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$，即随机变量 Y 对应的分布律为

Y	0	1	2	3
$P(Y)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

.□

2.8 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1\\ a\ln x, & 1<x<\mathrm{e}\\ 1, & x\geqslant \mathrm{e}\end{cases}$，求：

(1)常数 a；

(2)概率密度 $f(x)$；

(3) $P(X<2)$，$P(0<X\leqslant 3)$，$P(2<X<2.5)$.

解：(1)因为 $F(\mathrm{e}-0)=F(\mathrm{e})=a=1$，即连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1\\ \ln x, & 1<x<\mathrm{e}\\ 1, & x\geqslant \mathrm{e}\end{cases}$$

(2)概率密度为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 1<x<\mathrm{e}\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

(3)利用分布函数定义有

$$P(X<2)=F(2)=\ln 2$$
$$P(0<X\leqslant 3)=F(3)-F(0)=1-0=1$$
$$P(2<X<2.5)=F(2.5)-F(2)=\ln(2.5)-\ln 2=\ln\left(\frac{5}{4}\right).\square$$

2.9 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2\\ \dfrac{a}{x^2}, & x\geqslant 2\end{cases}$，求：

(1)常数 a；

(2)分布函数 $F(x)$.

解：(1)因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{4}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}\frac{a}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{a+1}{2}=1$，即 $a=1$

(2)随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2\\ \dfrac{1}{x^2}, & x\geqslant 2\end{cases}$$

随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_0^x \frac{1}{4}dx, & 0\leqslant x<2\\ \int_0^2 \frac{1}{4}dx+\int_2^x \frac{1}{x^2}dx, & x\geqslant 2\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{4}x, & 0\leqslant x<2\\ 1-\frac{1}{x}, & x\geqslant 2\end{cases}.\square$$

2.10 设随机变量 X 服从 $[a,b]\ (a>0)$ 上的均匀分布，且 $P(0<X<3)=\frac{1}{4}$，$P(X>4)=\frac{1}{2}$，求：

(1)X 的概率密度；

(2)$P(1<X<5)$.

解：由题意可得 $X\sim U(a,b),(a>0)$，则

(1)因为 $P(3\leqslant X\leqslant 4)=P(X>4)-P(0<X<3)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，所以概率密度为

$$f(x)=\frac{P(3\leqslant X\leqslant 4)}{4-3}=\frac{1}{4}\Longrightarrow b-a=4$$

又因为

$$P(X>4)=\frac{1}{2}\Longrightarrow \frac{a+b}{2}=4$$

由此可得 $a=2$，$b=6$，即 $X\sim U(2,6)$，所以 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 2\leqslant x\leqslant 6\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

(2)显然有 $P(1<X<5)=P(2\leqslant X<5)=(5-2)\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.\square$

2.11 设顾客到银行窗口等待服务的时间 X(单位：分)服从参数为 5 的指数分布，某顾客在窗口等待服务，如超过 10 分钟，他就离开，他一个月到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，求 Y 的分布律，并求 $P(Y\geqslant 1)$.

解：随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0\end{cases}$$

随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1-e^{-\frac{x}{5}}, & x>0\end{cases}$$

则

$$P(X>10)=1-P(X\leqslant 10)=1-F_X(10)=1-(1-e^{-2})=e^{-2}$$

因此有$Y \sim B(5, e^{-2})$，即随机变量 Y 对应的分布律为

Y	0	1	2	3	4	5
$P(Y)$	$(1-e^{-2})^5$	$5e^{-2}(1-e^{-2})^4$	$10e^{-4}(1-e^{-2})^3$	$10e^{-6}(1-e^{-2})^2$	$5e^{-8}(1-e^{-2})$	e^{-10}

于是

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y=0) = 1-(1-e^{-2})^5. \square$$

2.12 设$X \sim N(3,4)$，求：

(1)$P(2<X<5)$，$P(-4<X<10)$，$P(|X|>2)$，$P(X>3)$；

(2)确定 C，使得$P(X>C)=P(X<C)$.

解：由题意可知$\mu=3$，$\sigma=2$

(1)利用标准正态分布函数可得

$$P(2<X<5)=P\left(\frac{2-3}{2}<\frac{X-3}{2}<\frac{5-3}{2}\right)=P\left(-\frac{1}{2}<\frac{X-3}{2}<1\right)$$
$$=\Phi(1)-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)=\Phi(1)-\left[1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\Phi(1)+\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-1=0.5328$$
$$P(-4<X<10)=P\left(\frac{-4-3}{2}<\frac{X-3}{2}<\frac{10-3}{2}\right)=P\left(-\frac{7}{2}<\frac{X-3}{2}<\frac{7}{2}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{7}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{7}{2}\right)=\Phi\left(\frac{7}{2}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{7}{2}\right)\right]=2\Phi\left(\frac{7}{2}\right)-1=0.9995$$
$$P(|X|>2)=1-P(|X|\leqslant 2)=1-P(-2\leqslant X\leqslant 2)=1-P\left(\frac{-2-3}{2}\leqslant\frac{X-3}{2}\leqslant\frac{2-3}{2}\right)$$
$$=1-P\left(-\frac{5}{2}\leqslant\frac{X-3}{2}\leqslant-\frac{1}{2}\right)=1-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)+\Phi\left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$=1-\left[1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\left[1-\Phi\left(\frac{5}{2}\right)\right]=1+\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{5}{2}\right)=0.6977$$
$$P(X>3)=P\left(\frac{X-3}{2}>\frac{3-3}{2}\right)=P\left(\frac{X-3}{2}>0\right)=\frac{1}{2}$$

(2)因为$P(X>C)=P\left(\frac{X-3}{2}>\frac{C-3}{2}\right)=P(X<C)=P\left(\frac{X-3}{2}<\frac{C-3}{2}\right)$，于是$\frac{C-3}{2}$是$Z=\frac{X-3}{2}\sim N(0,1)$的对称轴，即$\frac{C-3}{2}=0 \Longleftrightarrow C=3$.□

2.13 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且二次方程$y^2+4y+X=0$无实根的概率为 0.5，求：

(1)μ；

(2)若进一步有$P(4<X<8)=0.3$，求$P(X<0)$.

解：二次方程$y^2+4y+X=0$无实根，即$\Delta=4^2-4\cdot1\cdot X=16-4X<0\Longleftrightarrow X>4$，于是

有$P(X>4)=\frac{1}{2}$

(1)因为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$和$P(X>4)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{4-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}$，所以$\frac{4-\mu}{\sigma}$是$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$的对称轴，即$\frac{4-\mu}{\sigma}=0\Longleftrightarrow\mu=4$

(2)因为$P(4<X<8)=P\left(\frac{4-4}{\sigma}<\frac{X-4}{\sigma}<\frac{8-4}{\sigma}\right)=P\left(0<\frac{X-4}{\sigma}<\frac{4}{\sigma}\right)=0.3$，有

$$P(X<0)=P\left(\frac{X-4}{\sigma}<\frac{0-4}{\sigma}\right)=P\left(\frac{X-4}{\sigma}<-\frac{4}{\sigma}\right)=P\left(\frac{X-4}{\sigma}>\frac{4}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(\frac{X-4}{\sigma}>0\right)-P\left(\frac{4}{\sigma}>\frac{X-4}{\sigma}>0\right)=\frac{1}{2}-0.3=0.2.\square$$

2.14 设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{c}{x}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}, & x>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，其中$c>0$为常数. 求：

(1)常数c；

(2)设$Y=\ln X$，且Y的分布函数为$G(y)$，求Y概率密度函数$g(y)$；

(3)$G(Y)$的概率密度函数.

解：(1)因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{c}{x}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}\mathrm{d}x=c\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}\mathrm{d}(\ln x)\xlongequal{t=\ln x}c\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$
$$=2c\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=2c\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{2\pi}\,c=1$$

于是可得$c=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

(2)设随机变量X的分布函数为$F_X(x)$，即因为

$$G(y)=P(Y\leqslant y)=P(\ln X\leqslant y)=P(X\leqslant \mathrm{e}^y)=F_X(\mathrm{e}^y)$$

且有$\mathrm{e}^y>0$，于是

$$g(y)=G'(y)=F_X'(\mathrm{e}^y)\cdot(\mathrm{e}^y)'=f(\mathrm{e}^y)\cdot\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^y\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^y}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(\ln \mathrm{e}^y)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$$

即$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$，$y\in\mathbb{R}$

(3)因为$Y=\ln X$，$X>0$，$Y\in\mathbb{R}$，于是$G(Y)\in[0,1]$，设$Z=G(Y)$，由于Z在$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$上的概率密度为0，又因为$G(Y)$是单调函数，因此$G(Y)$必存在反函数$G^{-1}(Y)$，所以当$Z\in[0,1]$时有

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(G(Y)\leqslant z)=P(Y\leqslant G^{-1}(z))=G(G^{-1}(z))=z$$

可得

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1, & z\in[0,1]\\ 0, & \text{else}\end{cases}.\square$$

注：高斯积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ 计算过程如下

$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \overset{\substack{x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta}}{=\!=\!=} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}\rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho$$

$$=2\pi\cdot\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\overset{u=\frac{\rho^2}{2}}{=\!=\!=}2\pi\cdot\int_0^{+\infty}e^{-u}du=2\pi$$

于是有 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$.

2.15 设 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y=X^2$ 的分布律.

解：随机变量 $Y=X^2$ 可能的取值为 0，1，4，9，于是有

$$P(Y=0)=P(X=0)=\frac{1}{5},\ P(Y=1)=P(X=-1)+P(X=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{15}=\frac{7}{30}$$

$$P(Y=4)=P(X=-2)=\frac{1}{5},\ P(Y=9)=P(X=3)=\frac{11}{30}$$

即随机变量 Y 的分布律为

Y	0	1	4	9
$P(Y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

.□

2.16 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=2X^2-1$ 及 $Z=\frac{1}{2}|X|$ 的概率密度.

解：随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$x\in\mathbb{R}$，设随机变量 X，Y，Z 对应的分布函数分别为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，$F_Z(z)$，则

(1)当 $y\leqslant-1$ 时，$f_Y(y)=0$；当 $y>-1$ 时有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(2X^2-1\leqslant y)=P\left(|X|\leqslant\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)=F_X\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)-F_X\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)$$

于是有

$$\begin{aligned}f_Y(y)=F_Y'(y)&=F_X'\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)'-F_X'\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)\cdot\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)'\\&=f_X\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{y+1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}+f_X\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{y+1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{y+1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)^2}{2}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y+1)}}\mathrm{e}^{-\frac{y+1}{4}}\end{aligned}$$

即随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y+1)}}\mathrm{e}^{-\frac{y+1}{4}}, & y>-1\\0, & y\leqslant-1\end{cases}$$

(2)当 $z<0$ 时，$f_Z(z)=0$；当 $z\geqslant 0$ 时有

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\left(\frac{1}{2}|X|\leqslant z\right)=P(|X|\leqslant 2z)=F_X(2z)-F_X(-2z)$$

于是有

$$\begin{aligned}f_Z(z)=F_Z'(z)&=F_X'(2z)\cdot(2z)'-F_X'(-2z)\cdot(-2z)'\\&=2f_X(2z)+2f_X(-2z)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(2z)^2}{2}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(-2z)^2}{2}}=\sqrt{\frac{8}{\pi}}\mathrm{e}^{-2z^2}\end{aligned}$$

即随机变量 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{8}{\pi}}\mathrm{e}^{-2z^2}, & z\geqslant 0\\0, & z<0\end{cases}.\square$$

2.17 设随机变量 X 服从 $[1,2]$ 服从均匀分布，试求随机变量 $Y=\mathrm{e}^{2X}$ 的概率密度.

解：由题意可得 $X\sim U(1,2)$，即 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 1\leqslant x\leqslant 2\\0, & \text{else}\end{cases}$，于是设随机变量 X，Y 对应的分布函数分别为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则当 $y<\mathrm{e}^2$ 时，$f_Y(y)=0$；当 $y\geqslant\mathrm{e}^2$ 时有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\mathrm{e}^{2X}\leqslant y)=P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\ln y\right)=F_X\left(\frac{1}{2}\ln y\right)$$

于是有

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=F_X'\left(\frac{1}{2}\ln y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\ln y\right)'=f_X\left(\frac{1}{2}\ln y\right)\cdot\frac{1}{2y}=\frac{1}{2y}$$

即随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & e^2\leqslant y\leqslant e^4\\ 0, & \text{else}\end{cases}.\square$$

注：y的取值由$1\leqslant\dfrac{1}{2}\ln y\leqslant 2$可得$e^2\leqslant y\leqslant e^4$.

2.18 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，求$Y=\sin X$的概率密度.

解：随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，于是设随机变量$X$，$Y$对应的分布函数分别为$F_X(x)$，$F_Y(y)$，则当$y\leqslant 0$时，$f_Y(y)=0$；当$y>0$时有

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)\\&=P(0\leqslant X\leqslant \arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\leqslant X\leqslant \pi)\\&=F_X(\arcsin y)-F_X(0)+F_X(\pi)-F_X(\pi-\arcsin y)\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=F_Y'(y)=F_X'(\arcsin y)\cdot(\arcsin y)'-F_X'(\pi-\arcsin y)\cdot(\pi-\arcsin y)'\\&=\frac{2}{\pi^2}\cdot\arcsin y\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{2}{\pi^2}\cdot(\pi-\arcsin y)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\end{aligned}$$

即随机变量Y的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}.\square$$

2.19 在半径为R，中心在坐标原点的圆周上任意抛掷一个点(即所抛点的极角均匀分布在区间$(-\pi,\pi)$内)，试求连接所抛点与点$(-R,0)$的弦长的分布函数与概率密度.

解：设极角为θ，该点的横坐标为$X=R\cos\theta$，$|X|\leqslant R$. 则

$$\begin{aligned}F_X(x)&=P(X\leqslant x)=P(R\cos\theta\leqslant x)\\&=P\left(-\pi<\theta\leqslant-\arccos\frac{x}{R}\right)+P\left(\arccos\frac{x}{R}\leqslant\theta<\pi\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left(\pi-\arccos\frac{x}{R}\right)\end{aligned}$$

所以X的概率密度函数为

$$f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{R^2-x^2}}, & |x|\leqslant R\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

同理可得该点纵坐标$Y=R\sin\theta$的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{R^2-y^2}}, & |y|\leqslant R\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

该点与$(-R,0)$所成的弦的长度$Z=2R\cos\dfrac{\theta}{2}$，当$0<z\leqslant 2R$时，有

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P\left(2R\cos\frac{\theta}{2}\leqslant z\right)\\&=P\left(-\pi<\theta\leqslant-2\arccos\frac{z}{2R}\right)+P\left(2\arccos\frac{z}{2R}\leqslant\theta<\pi\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left(\pi-2\arccos\frac{z}{2R}\right)\end{aligned}$$

所以Z的概率密度函数为

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{4R^2-z^2}}, & 0<z\leqslant 2R\\ 0, & \text{else}\end{cases}.\square$$

第三章 多维随机变量及其分布

3.1 盒子里装有 3 只红球和 2 只白球，在其中任取 4 只球. 以 X 表示表示取到的白球数，以 Y 表示取到的红球数，写出 X 和 Y 的联合分布律.

解：显然有 $X+Y=4$，那么有

$$P(X=2,Y=2)=\frac{C_3^2\cdot C_2^2}{C_5^4}=\frac{3}{5}，P(X=1,Y=3)=\frac{C_3^3\cdot C_2^1}{C_5^4}=\frac{2}{5}$$

即 X 和 Y 的联合分布律为

Y \ X	1	2	$P(Y=j)$
2	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
3	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
$P(X=i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

.□

3.2 将一枚硬币抛 3 次，以 X 表示 3 次中出现正面的次数，以 Y 表示三次中正反面次数之差的绝对值. 写出 X 和 Y 的联合分布律和各自的边缘分布律.

解：X 可能的取值为 0，1，2，3；Y 可能的取值为 1，3，则 X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律为

Y \ X	0	1	2	3	$P(Y=j)$
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$P(X=i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

.□

3.3 设二维随机变量(X,Y)在以$(-1,0)$，$(0,1)$和$(1,0)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布，求：

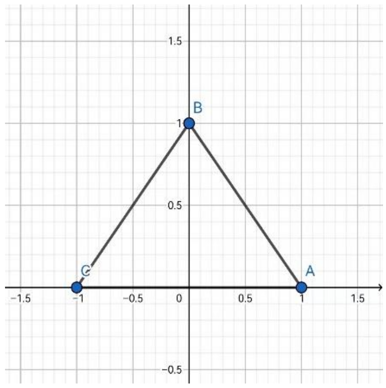
(1)(X,Y)的联合概率密度函数；

(2)X 和 Y 各自的边缘概率密度.

解：(1)设三角形区域为 S，因为二维随机变量 (X,Y) 服从均匀分布，则 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in S\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

其图像如下



(2)设 X 和 Y 各自的边缘概率密度函数为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$．则当 $|x|>1$ 时，$f_X(x)=0$；当 $-1\leqslant x<0$ 时有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{x+1}\mathrm{d}y=x+1$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{-x+1}\mathrm{d}y=-x+1$$

即 X 的边缘概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0\\ -x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

当 $y<0$，$y>1$ 时，$f_Y(y)=0$；当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时有

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{y-1}^{1-y}\mathrm{d}x=(1-y)-(y-1)=2-2y$$

即 Y 的边缘概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}2-2y, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}.\square$$

3.4 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}kxy, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，求：

(1)常数 k；

(2) $P\left(X+Y>\dfrac{1}{2}\right)$；

(3) X 和 Y 各自的边缘概率密度；

(4)条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$；

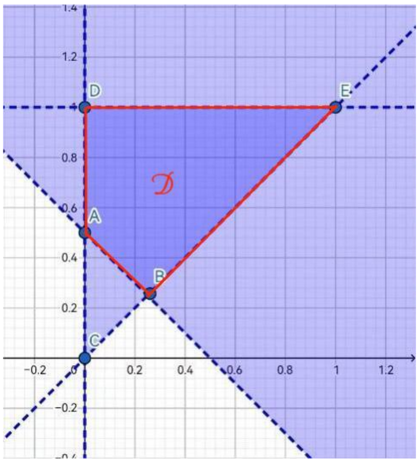
(5)判断 X 和 Y 是否相互独立.

解：(1)因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y kxy\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}k\int_0^1 y^3\mathrm{d}y = \frac{1}{8}k = 1$，即 $k = 8$

(2)注意到

$$P\left(X+Y>\frac{1}{2}\right) = 1-\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_0^y 8xy\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1}{2}-y} 8xy\,\mathrm{d}x$$
$$= 1-\frac{1}{256}-\frac{5}{768} = \frac{95}{96}$$

其图像如下



(3)设 X 和 Y 各自的边缘概率密度函数为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$. 则当 $x<0$，$x>1$ 时，$f_X(x)=0$；当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时有

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_x^1 8xy\,\mathrm{d}y = 4x(1-x^2)$$

即 X 的边缘概率密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2), & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

当 $y<0$，$y>1$ 时，$f_Y(y)=0$；当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时有

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^y 8xy\,\mathrm{d}x = 4y^3$$

即 Y 的边缘概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3, & 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

(4)当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时有

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{8xy}{4y^3} = \frac{2x}{y^2}$$

即条件概率密度函数$f_{X|Y}(x|y)$为

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, & 0\leqslant x\leqslant y\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

当$0\leqslant x\leqslant 1$时有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{8xy}{4x(1-x^2)}=\frac{2y}{1-x^2}$$

即条件概率密度函数$f_{Y|X}(y|x)$为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^2}, & x\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

(5)因为$f(x,y)=8xy$，而$f_X(x)f_Y(y)=4x(1-x^2)\cdot 4y^3=16x(1-x^2)y^3$，因此不独立.□

3.5 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为$f(x,y)=A\,\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$，求常数$A$及条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

解: 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为$f(x,y)=A\,\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$，注意到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2-x^2}\mathrm{d}y\\&=-A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}(x-y)\\&=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=A\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}=A\pi=1\end{aligned}$$

即$A=\dfrac{1}{\pi}$，那么联合概率密度函数为$f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 而

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2-x^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y=-\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}(x-y)\\&=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\end{aligned}$$

因此有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.\square$$

3.6 设随机变量X和Y相互独立，X在$[0,1]$上服从均匀分布，Y服从参数为2的指数分布，

求：

(1)(X,Y)的联合概率密度函数；

(2)含有 a 的方程$a^2+2aX+Y=0$有实根的概率.

解：(1)设 X 和 Y 各自的边缘概率密度函数为$f_X(x)$，$f_Y(y)$，则

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{else}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

因为随机变量 X 和 Y 相互独立，则(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$$

即

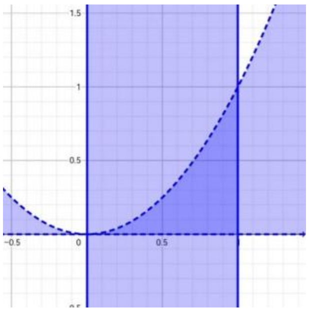
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0\leqslant x\leqslant 1, y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

(2)方程$a^2+2aX+Y=0$有实根，即$\Delta=(2X)^2-4\cdot 1\cdot Y=4X^2-4Y\geqslant 0\Longleftrightarrow X^2\geqslant Y$，于是

有

$$P(X^2\geqslant Y)=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=\int_0^1\left(1-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$
$$=1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\Phi(0)]=1-\sqrt{2\pi}(0.8413-0.5)=0.1445.\square$$

其图像如下



.□

3.7 已知(X,Y)的联合分布律为：

X \ Y	1	2	3
0	0.2	0.3	0.1
1	0.1	0	0.3

分别求$Z_1=X+Y$，$Z_2=XY$，$Z_3=\max\{X,Y\}$，$Z_4=\min\{X,Y\}$的分布律.

解：由题意可列联合分布律为

P	0.2	0.3	0.1	0.1	0	0.3
(X,Y)	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
$Z_1=X+Y$	1	2	3	2	3	4
$Z_2=XY$	0	0	0	1	2	3
$Z_3=\max\{X,Y\}$	1	2	3	1	2	3
$Z_4=\min\{X,Y\}$	0	0	0	1	1	1

所以有

$Z_1=X+Y$	1	2	3	4
P	0.2	0.4	0.1	0.3

$Z_2=XY$	0	1	3
P	0.6	0.1	0.3

$Z_3=\max\{X,Y\}$	1	2	3
P	0.3	0.3	0.4

$Z_4=\min\{X,Y\}$	0	1
P	0.6	0.4

.□

3.8 设随机变量 X 的分布律为：$P(X=0)=\frac{1}{3}$，$P(X=1)=\frac{2}{3}$，随机变量 Y 的分布律为：$P(Y=-1)=\frac{1}{3}$，$P(Y=0)=\frac{1}{3}$，$P(Y=1)=\frac{1}{3}$. 若$P(X^2=Y^2)=1$，求：

(1)(X,Y)的联合分布律；

(2)$Z=XY$的分布律.

解：(1)假设随机变量 X 和 Y 相互独立，则

$$P(X^2=Y^2)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=-1)$$
$$=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=-1)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}\neq 1$$

因此随机变量 X 和 Y 不独立. 由题意可列(X,Y)的联合分布律

X \ Y	-1	0	1	$P(X=j)$
0	$P(X=0,Y=-1)$	$P(X=0,Y=0)$	$P(X=0,Y=1)$	$\frac{1}{3}$
1	$P(X=1,Y=-1)$	$P(X=1,Y=0)$	$P(X=1,Y=1)$	$\frac{2}{3}$
$P(Y=i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

解方程可得

$$P(X=0,Y=-1)=0\ ,\ P(X=0,Y=0)=\frac{1}{3},\ P(X=0,Y=1)=0$$
$$P(X=1,Y=-1)=\frac{1}{3}\ ,\ P(X=1,Y=0)=0,\ P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$$

即(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1	$P(X=j)$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P(Y=i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(2)由(1)可列联合分布律

P	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
(X,Y)	$(0,-1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$Z=XY$	0	0	0	-1	0	1

所以$Z=XY$的分布律为

$Z=XY$	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

.□

3.9 设随机变量 X 和 Y 相互独立，分别服从参数为λ_1和λ_2的泊松分布. 求：

(1)$Z=X+Y$ 的分布律；

(2)$P(X=k|Z=m)$，其中$k\leqslant m$，m 已知.

解：随机变量X和Y各个值的概率分别为

$$P(X=k)=\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!},\ P(Y=k)=\frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!},\ k=0,1,2,\cdots$$

所以$Z=X+Y$，所以有

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}=\lambda_2^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=0}^{k}\frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^i}{i!\,(k-i)!}$$

$$=\frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^i\cdot\frac{k!}{i!\,(k-i)!}=\frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^i\cdot C_k^i$$

$$=\frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\cdot\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)+1\right]^k=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

(2)注意到

$$P(X=k|Z=m)=\frac{P(X=k,Z=m)}{P(Z=m)}=\frac{P(X=k,Y=m-k)}{P(Z=m)}$$

$$=\frac{P(X=k)P(Y=m-k)}{P(Z=m)}=\frac{\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!}\cdot\frac{\lambda_2^{(m-k)}e^{-\lambda_2}}{(m-k)!}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!}}$$

$$=\frac{\lambda_2^m\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!\,(m-k)!}\cdot\frac{m!}{(\lambda_1+\lambda_2)^m e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}$$

$$=\frac{m!}{k!\,(m-k)!}\cdot\frac{\lambda_2^m}{(\lambda_1+\lambda_2)^m}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k=\frac{\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{m-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^m}C_m^k,\ k\leqslant m.\square$$

3.10 设随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & 0<x<1, 0<y<1-x\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，

求$Z=X+Y$的概率密度函数.

解：注意到

$$F_Z=P(Z\leqslant z)=\iint_{x+y\leqslant z}f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)\,dx\right]dy$$

$$\xlongequal{x=u-y}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}f(u-y,y)\,du\right]dy=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-y,y)\,dy\right]du$$

即随机变量Z的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,dx$$

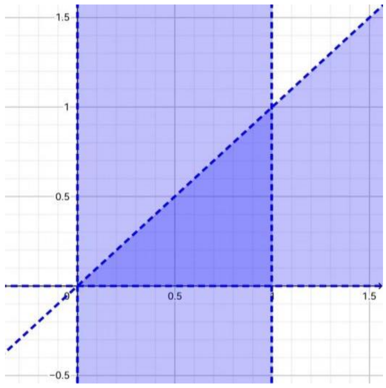
则当$z\leqslant 0$，$z\geqslant 1$时，$f_Z(z)=0$；当$0<z<1$时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z 24x(z-x)\mathrm{d}x=24z\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^z-24\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^z=4z^3$$

即随机变量 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}4z^3, & 0<z<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

其图像如下



.□

注：$0<x<1$，$0<y<1-x \Longrightarrow 0<z-x<1-x \Longrightarrow 0<x<z<1$.

3.11 设随机变量 X 和 Y 相互独立，X 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布，求：

(1)$Z=X+Y$ 的概率密度函数；

(2)$Z=2X+Y$ 的概率密度函数.

解：(1)设 X 和 Y 各自的边缘概率密度函数为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，则

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{else}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

由于 X 和 Y 相互独立，则随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

则当 $z\leqslant 0$ 时，$f_Z(z)=0$；当 $0<z<1$ 时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^z e^{-y}\mathrm{d}y=1-e^{-z}$$

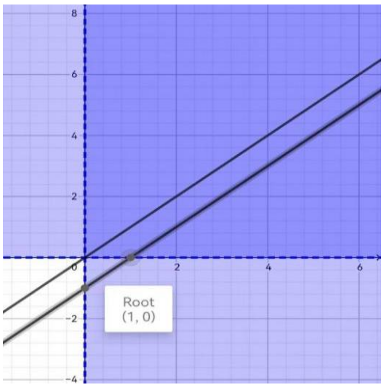
当 $z\geqslant 1$ 时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{z-1}^{z}e^{-y}\mathrm{d}y=e^{1-z}-e^{-z}$$

即随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1\\ e^{1-z}-e^{-z}, & z\geqslant 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

其图像如下



(2)注意到

$$F_Z=P(Z\leqslant z)=\iint_{2x+y\leqslant z} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\frac{z-y}{2}} f(x,y)\,dx\right]dy$$

$$\xlongequal{2x=u-y}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f\left(\frac{z-y}{2},y\right)du\right]dy=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z-y}{2},y\right)dy\right]du$$

即随机变量$Z=2X+Y$的概率密度函数

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z-y}{2},y\right)dy=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(\frac{z-y}{2}\right)f_Y(y)\,dy$$

则当$z\leqslant 0$时，$f_Z(z)=0$；当$0<z<2$时有

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(\frac{z-y}{2}\right)f_Y(y)\,dy=\frac{1}{2}\int_{0}^{z} e^{-y}\,dy=\frac{1}{2}(1-e^{-z})$$

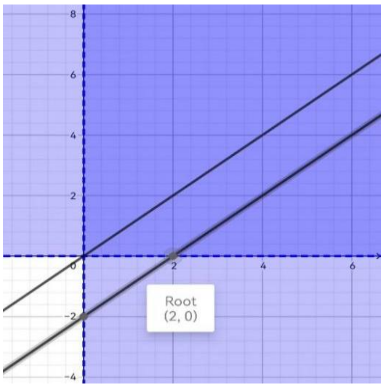
当$z\geqslant 2$时有

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(\frac{z-y}{2}\right)f_Y(y)\,dy=\frac{1}{2}\int_{z-2}^{z} e^{-y}\,dy=\frac{1}{2}(e^{2-z}-e^{-z})$$

即随机变量$Z=2X+Y$的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0<z<2\\ \frac{1}{2}(e^{2-z}-e^{-z}), & z\geqslant 2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

其图像如下



.□

注：$0\leqslant x\leqslant 1, y>0 \Longrightarrow 0\leqslant \frac{z-y}{2}\leqslant 1 \Longrightarrow z-2\leqslant y\leqslant z.$

3.12 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$，求$Z=X-Y$的概率密度函数.

解：注意到

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}=f_X(x)f_Y(y)$$

有$\rho=0$，即随机变量X和Y相互独立. 又因为$X\sim N(0,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(0,\sigma_2^2)$，所以

$$Z=X-Y\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

因此有

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}},\quad z\in\mathbb{R}.\square$$

(法二)

注意到

$$\begin{aligned}F_Z=P(Z\leqslant z)&=\iint_{x-y\leqslant z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z+y}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\&\xlongequal{x=u+y}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}f(u+y,y)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u+y,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u\end{aligned}$$

即随机变量$Z=X-Y$的概率密度函数

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z+y,y)\,\mathrm{d}y$$

因此有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(z+y)^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)y^2+2z\sigma_2^2y+\sigma_2^2z^2\right]}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[y^2+2\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}y+\frac{\sigma_2^2z^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left\{y^2+2\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}y+\left[\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]^2-\left[\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]^2+\frac{\sigma_2^2z^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left\{\left[y+\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]^2+\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2z^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}\right\}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[y+\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]^2-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[y+\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]^2}\mathrm{d}\left[y+\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]$$

$$\xlongequal{t=y+\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}t^2}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{u=\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}t}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\cdot\frac{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\cdot\frac{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\left(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}}$$

于是可得$Z=X-Y\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，因此有

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}},\quad z\in\mathbb{R}$$

3.13 设随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，均服从参数为$\frac{1}{\theta}$的指数分布，试求$Y=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$和$Z=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$各自的概率密度函数.

解：相互独立的随机变量X_i的概率密度函数为$f_{X_i}(x)=\begin{cases}\theta\mathrm{e}^{-\theta x}, & x>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，随机变量$X_i$的概率分布函数为$F_{X_i}(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\theta x}, & x>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，于是有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}\leqslant y\right)=P(X_1\leqslant y,X_2\leqslant y,\cdots,X_n\leqslant y)$$

$$=P(X_1\leqslant y)P(X_2\leqslant y)\cdots P(X_n\leqslant y)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leqslant y)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(y)=\prod_{i=1}^{n}(1-\mathrm{e}^{-\theta y})=(1-\mathrm{e}^{-\theta y})^n$$

即随机变量Y的概率密度函数为

$$f_Y(y)=[F_Y(y)]'=\begin{cases} n\theta \mathrm{e}^{-\theta y}(1-\mathrm{e}^{-\theta y})^{n-1}, & y>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

而又有

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z\leqslant z)=P\left(\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}\leqslant z\right)=1-P\left(\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}>z\right) \\ &=1-P(X_1>z,X_2>z,\cdots,X_n>z)=1-P(X_1>z)P(X_2>z)\cdots P(X_n>z) \\ &=1-[1-P(X_1\leqslant z)][1-P(X_2\leqslant z)]\cdots[1-P(X_n\leqslant z)] \\ &=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(X_i\leqslant z)]=1-\prod_{i=1}^{n}[1-F_{X_i}(z)]=1-\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\theta z}=1-(\mathrm{e}^{-\theta z})^n \end{aligned}$$

即随机变量Z的概率密度函数为

$$f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\begin{cases} n\theta \mathrm{e}^{-n\theta z}, & z>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}.\square$$

第四章 随机变量的数字特征

4.1 设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

求 $E(X)$，$E(X^2)$，$E(2X^2+3)$.

解： 由题目可得

P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
X	-1	0	1	2
X^2	1	0	1	4
$2X^2+3$	5	3	5	11

于是有

$$E(X)=\sum_{i=1}^{N}P_ix_i=\frac{1}{5}\times(-1)+\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{5}\times 1+\frac{1}{10}\times 2=0.2$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{N}P_ix_i=\frac{1}{5}\times 1+\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{5}\times 1+\frac{1}{10}\times 4=0.8$$

$$E(2X^2+3)=\sum_{i=1}^{N}P_ix_i=\frac{1}{5}\times 5+\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{5}\times 5+\frac{1}{10}\times 11=4.6.\square$$

注： $E(2X^2+3)=2E(X^2)+3=2\times 0.8+3=4.6.$

4.2 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$，$x\in\mathbb{R}$，求 $E(X)$，$D(X)$.

解： 随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$，$x\in\mathbb{R}$，于是有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty}x^{3-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(3)=2!=2$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2.\square$$

4.3 设随机变量 X 服从几何分布，其分布律为 $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$，$k=1,2,\ldots$，

$0<p<1$是常数. 求$E(X)$，$D(X)$.

解：随机变量X服从几何分布，其分布律为

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\dots,\ 0<p<1$$

于是有

$$E(X)=\sum_{k=1}^{N}P_k x_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p(1-p)^{k-1}=\frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^k$$

考虑级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$，$|x|<1$，注意到

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$
$$=x\cdot\frac{(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2},\ |x|<1$$

于是有$\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^k=S(1-p)=\frac{1-p}{p^2}$，因此可得

$$E(X)=\frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^k=\frac{p}{1-p}\cdot\frac{1-p}{p^2}=\frac{1}{p}$$
$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{N}P_k x_k=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot p(1-p)^{k-1}$$
$$=\frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^k$$

考虑级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$，$|x|<1$，注意到

$$\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(x^n)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\right)'=\left(x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)'$$
$$=\left[x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'\right]'=\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\right]'=\left[x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right]'=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'$$
$$=\frac{(1-x)^2-x\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4}=\frac{x+1}{(1-x)^3},\ |x|<1$$

于是有$S(x)=x\cdot\frac{x+1}{(1-x)^3}=\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$，$|x|<1$，因此可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^k=S(1-p)=\frac{(1-p)(2-p)}{p^3}$$

即有

$$E(X^2)=\frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^k=\frac{p}{1-p}\cdot\frac{(1-p)(2-p)}{p^3}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.\square$$

4.4 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,1)$，且X，Y相互独立. 求：

(1)$E|X-\mu|$；

(2)$E(\mathrm{e}^X)$；

(3)$E|X-Y|$；

(4)$D|X-Y|$.

解：(1)设$Z=X-\mu\sim N(0,\sigma^2)$，于是有

$$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

(2)注意到

$$\begin{aligned}E(\mathrm{e}^X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+(x-\mu)+\mu}\mathrm{d}(x-\mu)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+(x-\mu)}\mathrm{d}(x-\mu)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}+t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{\mu}\cdot\sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{\sigma^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\cdot\sqrt{\pi}=\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\end{aligned}$$

(3)设$Z=X-Y\sim N(0,\sigma^2+1)$，于是有

$$E(|Z|)=\sqrt{\sigma^2+1}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sqrt{\frac{2(\sigma^2+1)}{\pi}}$$

(4)注意到

$$E(|Z|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|^2 f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+1)}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+1)}}\int_0^{+\infty}z^2\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}\mathrm{d}z$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+1)}}\cdot(\sigma^2+1)\int_0^{+\infty}z\,\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}\right]$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+1)}}\cdot(\sigma^2+1)\cdot\left[z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}\mathrm{d}z\right]$$
$$=\sqrt{\frac{2(\sigma^2+1)}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}\mathrm{d}z$$
$$=\sqrt{\frac{2(\sigma^2+1)}{\pi}}\cdot\sqrt{2(\sigma^2+1)}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left[\frac{z}{\sqrt{2(\sigma^2+1)}}\right]^2}\mathrm{d}\left[\frac{z}{\sqrt{2(\sigma^2+1)}}\right]$$
$$=\frac{2(\sigma^2+1)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{2(\sigma^2+1)}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sigma^2+1$$

于是有

$$D(|Z|)=E(|Z|^2)-E^2(|Z|)=(\sigma^2+1)-\frac{2(\sigma^2+1)}{\pi}=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(\sigma^2+1).\square$$

(法二)

注意到

$$D(|X-Y|)=D(|Z|)=E(|Z|^2)-E^2(|Z|)=E(Z^2)-E^2(|Z|)$$
$$=D(Z)+E^2(Z)-E^2(|Z|)$$
$$=(\sigma^2+1)+0-\frac{2(\sigma^2+1)}{\pi}=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(\sigma^2+1).\square$$

4.5 二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}12y^2,\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\\ 0,\ \text{else}\end{cases}$，求$E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$，$E(X^2+Y^2)$.

解：直接利用定义可得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y=\frac{4}{5}$$
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y^3\mathrm{d}y=\frac{3}{5}$$
$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^3\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$
$$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x^2+y^2)y^2\mathrm{d}y=\frac{16}{15}.\square$$

(法二)

注意到

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^x 12y^2\mathrm{d}y=4x^3$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_y^1 12y^2\mathrm{d}x=12y^2(1-y)$$

于是有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 4x^4\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$$
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 12y^3(1-y)\mathrm{d}y=\frac{3}{5}.\square$$

4.6 将 n 只球($1\sim n$ 号)随机地放进 n 只盒子($1\sim n$ 号)中去，一只盒子装一只球. 若一只球装入与球同号的盒子中称为一个配对. 记 X 为总配对数，求 $E(X)$.

解：设若第 i 号球放入第 i 号盒子中 $X_i=1$；若第 i 号球未放入第 i 号盒子中 $X_i=0$，则总的配对数 X 可表示成 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则有 $P(X_i=1)=\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$，于是有

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\frac{1}{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1.\square$$

4.7 某产品的次品率为 0.1，检测员每天检验 4 次，每次随机地取 10 件产品进行检验，如发现其中的次品数多于 1，就去调整设备，以 X 表示一天中调整设备的次数，求 $E(X)$. (设各产品是否为次品是相互独立的)

解：设 Y 表示检验 1 次需要调整设备的次数，于是有

$$P(Y=0)=C_{10}^{1}0.9^9\times0.1+0.9^{10}=0.736099$$
$$P(Y=1)=1-P(Y=0)=0.263901$$

则随机变量 Y 的分布律为

Y	0	1
P	0.736099	0.263901

因此有

$$E(Y)=0\times0.736099+1\times0.263901=0.263901$$
$$E(X)=4E(Y)=4\times0.263901=1.0556.\square$$

4.8 一工厂生产的某种设备的寿命 X 年服从指数分布，概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，工厂规定，出售的设备若在出售一年之内可以调换. 若工厂售出一台设备盈利 100 元，调换一台设备厂方需要花费 300 元，试求厂方出售一台设备净盈利的数学期望.

解：设出售一台设备净盈利为 Y，则 Y 可能的取值为 100，-200，于是有

$$P(Y=100)=P(X>1)=1-P(X\leqslant 1)=1-\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x=1-\int_0^1\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x$$

$$=1-\int_0^1 e^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{4}\right)=1-\int_0^{\frac{1}{4}}e^{-t}\mathrm{d}t=1-(-e^{-t})\Big|_0^{\frac{1}{4}}=1-\left(1-e^{-\frac{1}{4}}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$$

$$P(Y=-200)=P(X\leqslant 1)=\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x=1-e^{-\frac{1}{4}}$$

则随机变量 Y 的分布律为

Y	100	-200
P	$e^{-\frac{1}{4}}$	$1-e^{-\frac{1}{4}}$

因此有

$$E(Y)=100\times e^{-\frac{1}{4}}-200\times\left(1-e^{-\frac{1}{4}}\right)=300e^{-\frac{1}{4}}-200=33.6\,(\text{元}).\square$$

4.9 设 X 为随机变量，C 是常数，证明：当 $C\neq E(X)$ 时，$D(X)<E\{(X-C)^2\}$.

证明：注意到

$$\begin{aligned}D(X)&=E(X^2)-E^2(X)\\&=E\{(X-C)^2+2CX-C^2\}-E^2(X)\\&=E\{(X-C)^2\}+2CE(X)-E^2(X)-C^2\\&=E\{(X-C)^2\}-\{E(X)-C\}^2\end{aligned}$$

因为 $C\neq E(X)\Longleftrightarrow\{E(X)-C\}^2>0$，于是

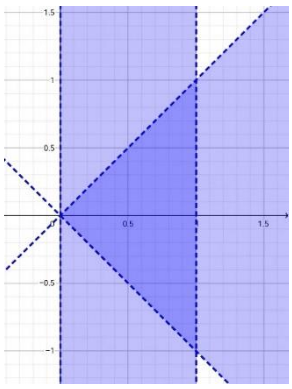
$$D(X)=E\{(X-C)^2\}-\{E(X)-C\}^2<E\{(X-C)^2\}.\square$$

4.10 设随机变量 (X,Y) 具有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，求 $E(X)$，$E(Y)$，$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

解：直接利用定义可得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_{-x}^{x}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_{-x}^{x}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$
$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_{-x}^{x}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.\square$$

其图像如下



.□

4.11 设 X，Y 是随机变量，且有 $E(X)=3$，$E(Y)=1$，$D(X)=4$，$D(Y)=9$，令 $Z=5X-Y+15$，分别在以下三种情况下求$E(Z)$和$D(Z)$：

(1)X，Y相互独立；

(2)X，Y不相关；

(3)X，Y相关系数为 0.25.

解：(1)X 和 Y 相互独立，于是有$E(XY)=E(X)E(Y)$，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，可得

$$E(Z)=E(5X-Y+15)=5E(X)-E(Y)+15=5\times3-1+15=29$$
$$D(Z)=D(5X-Y+15)=5^2D(X)+D(Y)=5^2\times4+9=109$$

(2)X 和 Y 不相关，于是有$E(XY)=E(X)E(Y)$，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，可得

$$E(Z)=E(5X-Y+15)=5E(X)-E(Y)+15=5\times3-1+15=29$$
$$D(Z)=D(5X-Y+15)=5^2D(X)+D(Y)=5^2\times4+9=109$$

(3)X 和 Y 相关系数为 0.25，于是有$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=0.25\times2\times3=1.5$，可得

$$E(Z)=E(5X-Y+15)=5E(X)-E(Y)+15=5\times3-1+15=29$$
$$\begin{aligned}D(Z)&=D(5X-Y+15)=5^2D(X)+D(Y)-2\times5\operatorname{Cov}(X,Y)\\&=5^2\times4+9-2\times5\times1.5=94.\square\end{aligned}$$

4.12 设二维随机变量(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant1\\0, & \text{else}\end{cases}$,验证$X$和$Y$是不相关的，但$X$和$Y$不是互相独立的.

解：直接利用定义可得

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},\ -1\leqslant x\leqslant1$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},\ -1\leqslant y\leqslant1$$

而

$$\frac{1}{\pi}=f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}=\frac{4}{\pi^2}\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

于是X和Y不独立，因此有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=0$$
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=0$$
$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

而

$$E(XY)=E(X)E(Y)=0\Longleftrightarrow\rho_{XY}=0$$

因此X和Y不相关.□

4.13 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且设X，Y相互独立，令$Z_1=\alpha X+\beta Y$，$Z_2=\alpha X-\beta Y$，求Z_1，Z_2的相关系数$\rho_{Z_1Z_2}$，其中α，β为常数.

解：因为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且X和Y相互独立，由此可得X和Y不相关，即有$\operatorname{Cov}(X,Y)=0$，亦即$\rho_{XY}=0$，那么有

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(Z_1,Z_2)&=\operatorname{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=\operatorname{Cov}(\alpha X,\alpha X-\beta Y)+\operatorname{Cov}(\beta Y,\alpha X-\beta Y)\\&=\operatorname{Cov}(\alpha X,\alpha X)-\operatorname{Cov}(\alpha X,\beta Y)+\operatorname{Cov}(\beta Y,\alpha X)-\operatorname{Cov}(\beta Y,\beta Y)\\&=\alpha^2\operatorname{Cov}(X,X)-\alpha\beta\operatorname{Cov}(X,Y)+\beta\alpha\operatorname{Cov}(Y,X)-\beta^2\operatorname{Cov}(Y,Y)\\&=\alpha^2\operatorname{Cov}(X,X)-\beta^2\operatorname{Cov}(Y,Y)=\alpha^2D(X)-\beta^2D(Y)\\&=\alpha^2\cdot\sigma^2-\beta^2\cdot\sigma^2=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\end{aligned}$$

于是有

$$D(Z_1)=D(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2 D(X)+\beta^2 D(Y)=\alpha^2\cdot\sigma^2+\beta^2\cdot\sigma^2=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$
$$D(Z_2)=D(\alpha X-\beta Y)=\alpha^2 D(X)+\beta^2 D(Y)=\alpha^2\cdot\sigma^2+\beta^2\cdot\sigma^2=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$
$$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\cdot\sqrt{D(Z_2)}}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}\cdot\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.\square$$

注：二维正态随机变量(X,Y)，X和Y相互独立的充要条件是参数$\rho_{XY}=0$.

4.14 设A和B是试验E的两个事件，且$P(A)>0$，$P(B)>0$，并定义随机变量X，Y如下：

$$X=\begin{cases}1,\ A\text{发生}\\0,\ A\text{不发生}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1,\ B\text{发生}\\0,\ B\text{不发生}\end{cases}$$

证明若$\rho_{XY}=0$，则X和Y必定相互独立.

解：随机变量X和Y的分布律分别为

X	0	1
P	$1-P(A)$	$P(A)$

Y	0	1
P	$1-P(B)$	$P(B)$

即二维随机变量(X,Y)的混合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	$P(X=j)$
0	$P(\bar{A}\bar{B})$	$P(\bar{A}B)$	$1-P(A)$
1	$P(A\bar{B})$	$P(AB)$	$P(A)$
$P(Y=i)$	$1-P(B)$	$P(B)$	1

那么随机变量$Z=XY$分布律为

$Z=XY$	0	1
P	$P(\bar{A}\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(A\bar{B})$	$P(AB)$

于是有

$$E(X)=P(A),\ E(Y)=P(B),\ E(XY)=P(AB)$$
$$D(X)=P(A)[1-P(A)],\ D(Y)=P(B)[1-P(B)]$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=P(AB)-P(A)P(B)$$

则 X 和 Y 的相关系数为

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=0$$

由此我们可以得到

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

即事件 A 和事件 B 相互独立，即 X 和 Y 相互独立.□

补充题目 4.1 若 $X\sim N(0,\sigma^2)$，求 $|X|$，X^2 的期望.

解： 随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$，$x\in\mathbb{R}$，那么有

$$E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{u=t^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}u^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}u^{\frac{3}{2}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\cdot\sqrt{\pi}=\sigma^2.\square$$

注：$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$，$x\in(0,1)\Longrightarrow\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\pi}$.

补充题目 4.2 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $(X-\mu)$，$|X-\mu|$，$\mathrm{e}^{X-\mu}$，$(X-\mu)^2$ 的期望.

解： 随机变量 $Y=X-\mu\sim N(0,\sigma^2)$ 的概率密度函数为 $f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$，$y\in\mathbb{R}$，即有

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y=0$$

$$E(|Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$

$$=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E(\mathrm{e}^{Y})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{y}f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{\sigma^2}{2}}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\xlongequal{t=\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}\cdot\sqrt{\pi}=\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}$$
$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\mathrm{e}^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$
$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_{0}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{u=t^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_{0}^{+\infty}u^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_{0}^{+\infty}u^{\frac{3}{2}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\cdot\sqrt{\pi}=\sigma^2.\square$$

补充题目 4.3 若独立变量X，$Y\sim N(0,1)$，求$\sqrt{X^2+Y^2}$的期望.

解：注意到

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

于是有

$$E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\rho^2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\square$$

注：$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\sigma^3\Longleftrightarrow\int_{0}^{+\infty}x^2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^3.$

补充题目 4.4 若$X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma_2^2)$，且X和Y相互独立，求$D(|X-\mu|)$，$D(|X-Y|)$.

解：因为$X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$，有$Z=X-\mu\sim N(0,\sigma_1^2)$，于是有

$$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma_1^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{0}^{+\infty}z\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma_1^2}}\mathrm{d}z=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot\sigma_1^2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma_1^2}}\mathrm{d}\left(\frac{z^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$=\frac{2\sigma_1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sigma_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E(|Z|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}z^2f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma_1^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_1}\right)^2\mathrm{e}^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_1}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_1}\right)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\int_{0}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{u=t^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\int_{0}^{+\infty}u^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\int_{0}^{+\infty}u^{\frac{3}{2}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\cdot\sqrt{\pi}=\sigma_1^2$$

$$D(|Z|)=E(|Z|^2)-E^2(|Z|)=\sigma_1^2-\frac{2}{\pi}\sigma_1^2=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma_1^2$$

又因为$X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma_2^2)$，且X和Y相互独立，所以$Z=X-Y\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，于是有

$$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f(z)\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

$$E(|Z|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|^2f(z)\mathrm{d}z=\sigma_1^2+\sigma_2^2$$

$$D(|Z|)=E(|Z|^2)-E^2(|Z|)=\sigma_1^2+\sigma_2^2-\frac{2}{\pi}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(\sigma_1^2+\sigma_2^2).\square$$

第五章 大数定律及中心极限定理

5.1 计算器在进行加法时，将每个加数舍入最靠近它的整数，设所有误差是独立的且在$(-0.5, 0.5)$上服从均匀分布. 求：

(1)若将 1500 个数相加，问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少?

(2)最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.9?

解：(1)设设随机变量X表示误差，则$X \sim U(-0.5, 0.5)$，于是有

$$E(X)=0，D(X)=\frac{(a+b)^2}{12}=\frac{(0.5+0.5)^2}{12}=\frac{1}{12}$$

每个误差之间相互独立且同分布，由中心极限定理可得

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-nE(X)}{\sqrt{nD(X)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\sim N(0,1)$$

当n充分大的时候有

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|>15\right)=1-P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|\leqslant 15\right)=1-P\left(\frac{-15}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{1500}X_k}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\leqslant\frac{15}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\right)$$

$$=1-P\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{1500}X_k}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\leqslant\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\approx 1-\left[\Phi\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)-\Phi\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\right]$$

$$=2-2\Phi(1.34)=2-2\times 0.9099=0.1802$$

(2)即求在满足$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|<10\right)\geqslant 0.9$条件下$n$的最大值，则

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|<10\right)=P\left(-10<\sum_{k=1}^{n}X_k<10\right)=P\left(-\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}<\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{\sqrt{\frac{n}{12}}}<\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)$$

$$\approx\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)-\Phi\left(-\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)=2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)-1\geqslant 0.9$$

于是有

$$\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) \geqslant 0.95 = \Phi(1.645) \Longleftrightarrow \frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \geqslant 1.645 \Longleftrightarrow n \leqslant 443.45$$

综上$n_{\max} = 443$，即最多可有 443 个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.9.□

5.2 某单位设置一台电话总机，共有 200 架分机，设每个电话分机是否使用外线通话是相互独立的，设每时刻每个分机有 5%的概率要使用外线通话，问总机需要多少外线才能以不低于 90%的概率保证每个分机要使用外线时可供使用?

解：设随机变量X表示一个电话分机是否需要使用外线，则$X \sim B(1, 0.05)$，于是有

$$E(X) = 1\times 0.05 = 0.05,\ D(X) = 1\times 0.05\times 0.95 = 0.0475$$

每个电话分机是否需要使用外线相互独立且同分布，由中心极限定理可得

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nE(X)}{\sqrt{nD(X)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - 0.05n}{\sqrt{0.0475n}} \sim N(0,1)$$

当n充分大的时候，设总机需要的外线的个数为N，即求在满足$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant N\right) \geqslant 0.9$条件下$N$的最小值，则

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant N\right) = P\left(\frac{\sum_{k=1}^{200} X_k - 0.05\cdot 200}{\sqrt{0.0475\cdot 200}} \leqslant \frac{N - 0.05\cdot 200}{\sqrt{0.0475\cdot 200}}\right)$$

$$= P\left(\frac{\sum_{k=1}^{200} X_k - 10}{\sqrt{9.5}} \leqslant \frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\right) \approx \Phi\left(\frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\right) \geqslant 0.9$$

于是有

$$\Phi\left(\frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\right) \geqslant 0.9 = \Phi(1.28) \Longleftrightarrow \frac{N-10}{\sqrt{9.5}} \geqslant 1.28 \Longleftrightarrow N \geqslant 13.945$$

综上$N_{\min} = 14$，即总机需要 14 条外线才能以不低于 90%的概率保证每个分机要使用外线时可供使用.□

5.3 设随机变量$X_1, X_2, ..., X_{100}$相互独立，且都服从区间$[0,1]$上的均匀分布，又设$Y = X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_{100}$，求$P(Y < 10^{-40})$的近似值.

解：注意到

$$Y=X_1\cdot X_2\cdot\cdots\cdots X_{100}\Longleftrightarrow \ln Y=\ln X_1+\ln X_2+\cdots\cdots+\ln X_{100}$$

于是随机变量$\ln X_1$，$\ln X_2$，$\cdots$，$\ln X_{100}$相互独立且同分布，则有

$$E(\ln X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\ln x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=x(\ln x-1)|_0^1=-1$$

$$E[(\ln X)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}\ln^2x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln^2x\,\mathrm{d}x=x\ln^2x|_0^1-\int_0^1x\,\mathrm{d}(\ln^2x)$$

$$=-2\int_0^1x\cdot\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=-2\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=-2\times(-1)=2$$

$$D(\ln X)=E[(\ln X)^2]-[E(\ln X)]^2=2-(-1)^2=1$$

由中心极限定理可得

$$Z_n=\frac{\sum_{k=1}^n\ln X_k-E\left(\sum_{k=1}^n\ln X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^n\ln X_k\right)}}=\frac{\sum_{k=1}^n\ln X_k-nE(\ln X)}{\sqrt{nD(\ln X)}}$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^n\ln X_k+n}{\sqrt{n}}=\frac{\ln Y_n+n}{\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

当n充分大的时候有

$$P(Y<10^{-40})=P(\ln Y<\ln 10^{-40})=P(\ln Y<-40\ln 10)$$

$$=P\left(\frac{\ln Y+100}{\sqrt{100}}<\frac{-40\ln 10+100}{\sqrt{100}}\right)$$

$$=P\left(\frac{\ln Y+100}{\sqrt{100}}<0.79\right)\approx\Phi(0.79)=0.7852.\square$$

5.4 结合习题 3.9，试用中心极限定理证明：$\sum_{k=0}^n\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}\to\frac{1}{2}$，$n\to+\infty$.

证明：设随机变量$X\sim\pi(1)$，则$Y_n=\sum_{i=1}^nX_i\sim\pi(n)$，于是有

$$E(X)=\lambda=1,\ D(X)=\lambda=1$$

由中心极限定理可得

$$Z_n=\frac{\sum_{i=1}^nX_i-E\left(\sum_{i=1}^nX_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^nX_i\right)}}=\frac{\sum_{i=1}^nX_i-nE(X)}{\sqrt{nD(X)}}=\frac{\sum_{i=1}^nX_i-n}{\sqrt{n}}=\frac{Y_n-n}{\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

当n充分大的时候有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}=P(Y_n\leqslant n)=P\left(\frac{Y_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{n-n}{\sqrt{n}}\right)=P\left(\frac{Y_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant 0\right)\approx\Phi(0)=\frac{1}{2}.\square$$

第六章 样本及抽样分布

6.1 设$X_1,X_2,...,X_n$是从$X\sim N(3.4,6^2)$中抽取容量为n的样本. 求：

(1)求样本均值$\bar{X}$的分布；

(2)如果要求其样本均值$\bar{X}$位于区间$(1.4,5.4)$内的概率不小于0.95，问样本容量n至少应取多大?

解：(1)因为$X\sim N(3.4,6^2)$，样本容量为n，于是有

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(3.4,\frac{6^2}{n}\right)$$

(2)即求在满足$P\left(1.4<\bar{X}<5.4\right)\geqslant 0.95$条件下$n$的最小值，则有

$$\begin{aligned}P\left(1.4<\bar{X}<5.4\right)&=P\left(\frac{1.4-3.4}{\frac{6}{\sqrt{n}}}<\frac{\bar{X}-3.4}{\frac{6}{\sqrt{n}}}<\frac{5.4-3.4}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right)\\&=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}<\frac{\bar{X}-3.4}{\frac{6}{\sqrt{n}}}<\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\approx\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\\&=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1\geqslant 0.95\end{aligned}$$

于是有

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geqslant 0.975=\Phi(1.96)\Longleftrightarrow\frac{\sqrt{n}}{3}\geqslant 1.96\Longleftrightarrow n\geqslant 34.5744$$

综上$n_{\min}=35$.□

6.2 设$X_1,X_2,...,X_n\,(n\geqslant 2)$为来自总体$N(0,1)$的样本，$\bar{X}$为样本均值，记$Y_i=X_i-\bar{X}$，$i=1,2,...,n$. 求：

(1)Y_i的方差$D(Y_i)$，$i=1,2,...,n$；

(2)$D\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right]$；

(3)Y_1与Y_n的协方差$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$.

解：(1)注意到

$$D(Y_i)=D\left(X_i-\bar{X}\right)=D\left(X_i-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i-\frac{1}{n}\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n}X_k\right]$$

$$=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i\right]+D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n}X_k\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2D(X_i)+\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n}X_k\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2D(X_i)+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n}D(X_k)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2D(X_i)+\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)\cdot D(X_i)$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}$$

(法二)

$$D(Y_i)=D\left(X_i-\bar{X}\right)=D(X_i)+D\left(\bar{X}\right)-2\mathrm{Cov}\left(X_i,\bar{X}\right)$$

$$=D(X_i)+D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)-2\mathrm{Cov}\left(X_i,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)$$

$$=D(X_i)+\frac{1}{n^2}\cdot nD(X_i)-2\mathrm{Cov}\left(X_i,\frac{1}{n}X_i\right)$$

$$=D(X_i)+\frac{1}{n}D(X_i)-\frac{2}{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_i)=1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n}=\frac{n-1}{n}$$

(2)因为$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$，于是有

$$D\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right]=D[(n-1)S^2]=\sigma^4\cdot D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]$$

$$=\sigma^4\cdot 2(n-1)=2(n-1)\sigma^4=2(n-1)$$

(3)注意到

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=\mathrm{Cov}\left(X_1-\bar{X},X_n-\bar{X}\right)$$

$$=\mathrm{Cov}(X_1,X_n)-\mathrm{Cov}\left(X_1,\bar{X}\right)-\mathrm{Cov}\left(\bar{X},X_n\right)+\mathrm{Cov}\left(\bar{X},\bar{X}\right)$$

$$=\mathrm{Cov}\left(\bar{X},\bar{X}\right)-\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)-\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k,X_n\right)$$

$$=\mathrm{Cov}\left(\bar{X},\bar{X}\right)-\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{1}{n}X_1\right)-\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{n}X_n,X_n\right)$$

$$=D\left(\bar{X}\right)-\frac{1}{n}D(X_1)-\frac{1}{n}D(X_n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}.\square$$

6.3 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$为来自总体X的样本，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$. $\bar{X}$，S^2分别表示样本均值与样本方差，求$E\left(\bar{X}\right)$，$D\left(\bar{X}\right)$，$E(S^2)$.

解： 直接利用定义可得

$$E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

$$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(X_i^2)=D(X_i)+E^2(X_i)=\sigma^2+\mu^2,\ E(\bar{X}^2)=D(\bar{X})+E^2(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$$

$$E(S^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}^2\right)\right]=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-\frac{n}{n-1}E(\bar{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n-1}\cdot n(\sigma^2+\mu^2)-\frac{n}{n-1}\cdot\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)=\sigma^2.\square$$

6.4 (1)设X_1,X_2,X_3,X_4为来自总体$X\sim N(0,4)$的样本. $Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$服从$\chi^2$分布，试求 a，b；并问自由度为多少?

(2)设$X_1,X_2,...,X_{15}$是来自总体$X\sim N(0,4)$的样本，则随机变量$Y=\dfrac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$服从何种分布?写出推导过程；

(3) 设 $X_1,X_2,...,X_9$ 是取自正态总体的简单随机样本，$Y_1=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}X_i$，$Y_2=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=7}^{9}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，若统计量$Z=\dfrac{c(Y_1-Y_2)}{S}\sim t(n)$，求 c，n.

解：(1)因为有$X_1-2X_2\sim N(0,20)$，$3X_3-4X_4\sim N(0,100)$，即可得

$$Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2=20a\left(\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2+100b\left(\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}}\right)^2\sim\chi^2(2)$$

于是有$20a=1$，$100b=1$，解得$a=\dfrac{1}{20}$，$b=\dfrac{1}{100}$，自由度$n=2$

(2)因为有$\sum\limits_{i=1}^{10}\left(\dfrac{X_i}{2}\right)^2\sim\chi^2(10)$，$\sum\limits_{i=11}^{15}\left(\dfrac{X_i}{2}\right)^2\sim\chi^2(5)$，即可得

$$Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}=\frac{\dfrac{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}X_i^2}{10}}{\dfrac{\frac{1}{4}\sum_{i=11}^{15}X_i^2}{5}}=\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{10}X_i^2}{10}}{\dfrac{\sum_{i=11}^{15}X_i^2}{5}}\sim F(10,5)$$

(3)设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$Y_1-Y_2=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}X_i-\frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9}X_i\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{2}\right)\Longleftrightarrow\frac{Y_1-Y_2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}}\sim N(0,1)$$

$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\Longleftrightarrow\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$$

又因为Y_1，Y_2，S^2相互独立，即

$$Z=\frac{c(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{c\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}\times\left(\frac{Y_1-Y_2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{2}}}=\frac{c}{\sqrt{2}}\times\frac{\left(\frac{Y_1-Y_2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}}\right)}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}}\sim t(n)$$

因此有$c=\sqrt{2}$，$n=2$.□

6.5 若随机变量$X\sim t(n)$，则$Y=X^2$服从何种分布?写出推导过程.

解：设$X=\frac{T}{\sqrt{\frac{Z}{n}}}$，其中$T\sim N(0,1)$，$Z\sim\chi^2(n)$，于是有$T^2\sim\chi^2(1)$，则

$$Y=X^2=\frac{T^2}{\frac{Z}{n}}=\frac{\frac{T^2}{1}}{\frac{Z}{n}}\sim F(1,n).\square$$

6.6 设$X_1,X_2,...,X_{16}$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X}$，S^2分别表示样本均值与样本方差，求k值使得$P\left(\bar{X}>\mu+kS\right)=0.95$成立.

解：注意到

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\sim N(0,1),\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

则有

$$Y=\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2\cdot(n-1)}}}=\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}{\frac{S}{\sigma}}=\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sim t(n-1)$$

即有

$$P\left(\bar{X}>\mu+kS\right)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S}>k\right)=P\left(\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}-\mu}{S}>\sqrt{n}\,k\right)\Longleftrightarrow P(Y>4k)=0.95$$

于是有

$$4k=t_{0.95}(15)\Longleftrightarrow k=\frac{1}{4}t_{0.95}(15)=-\frac{1}{4}t_{0.05}(15)=-\frac{1}{4}\times1.7531=-0.438275.\square$$

第七章 参数估计

7.1 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 为未知参数.

$X_1,X_2,...,X_n$ 是从该总体中抽取的样本. 试求未知参数 θ 的矩估计量和极大似然估计量.

解：(1)**矩估计**：注意到

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

因此有矩估计量

$$\hat{\theta}=\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}=\frac{1-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1}=\frac{n-2\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i-n}$$

(2)**最大似然估计**：注意到

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}[(\theta+1)x_i{}^{\theta}]=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i{}^{\theta}$$

有

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

求导可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\ln L(\theta)]=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得极大似然估计量

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1.\square$$

7.2 总体 X 服从 $N(1,\sigma^2)$ 分布，σ^2 为未知参数，$X_1,X_2,...,X_n$ 为总体的一组样本. 求：

(1)σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1^2$；

(2)σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2^2$；

(3)$\hat{\sigma}_1^2$ 和 $\hat{\sigma}_2^2$ 是否为参数 σ^2 的的无偏估计?为什么?

解：(1)**矩估计**：

$$E(X)=1,\ D(X)=\sigma^2,\ E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\sigma^2+1$$

因此有矩估计量

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-1$$

(2)最大似然估计：注意到

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x_i-1)^2}{2\sigma^2}}\right]=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n\prod_{i=1}^{n}e^{-\frac{(x_i-1)^2}{2\sigma^2}}$$

有

$$\ln L(\sigma)=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2-n\ln\left(\sqrt{2\pi}\,\sigma\right)$$

求导可得

$$\frac{d}{d\sigma}[\ln L(\sigma)]=\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2-\frac{n}{\sigma}=0$$

解得极大似然估计量

$$\hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2$$

(3)注意到

$$E(\hat{\sigma}_1^2)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-1\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-1=E(X^2)-1=\sigma^2+1-1=\sigma^2$$

$$E(\hat{\sigma}_2^2)=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[(X_i-1)^2]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2-2X_i+1)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[E(X_i^2)-2E(X_i)+1]=E(X^2)-2E(X)+1=\sigma^2+1-2\times1+1=\sigma^2$$

因此$\hat{\sigma}_1^2$，$\hat{\sigma}_2^2$均是无偏估计.□

7.3 设$X_1,X_2,\ldots,X_5$为来自总体$X\sim\pi(\lambda)$的样本，且样本观测值为$1,2,3,3,1$. 求：

(1)求λ最大似然估计值；

(2)求$P(X=0)$的最大似然估计值.

解：(1)因为$P(X=x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$，注意到

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i!}=e^{-n\lambda}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

有

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \ln\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$$

求导可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[\ln L(\lambda)] = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0$$

解得极大似然估计量

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{1}{5}(1+2+3+3+1) = 2$$

(2)因为$P(X=0) = \dfrac{\lambda^0 \mathrm{e}^{-\lambda}}{0!} = \mathrm{e}^{-\lambda}$，于是$\hat{P}(X=0) = \mathrm{e}^{-\hat{\lambda}} = \mathrm{e}^{-2}$.□

7.4 设总体 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,x}\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}, & x>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$，其中$\mu$是未知参数.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$是从该总体中抽取的一个简单随机样本. 求：

(1)总体X的期望$E(X)$；

(2)未知参数μ的矩估计量$\hat{\mu}$；

(3)未知参数μ的最大似然估计量$\bar{\mu}$；

(4)验证$\bar{\mu}$为μ的无偏估计.

解：(1)直接计算可得

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\ln x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(\mu-t)^2}{2}} \cdot \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(\mu-t)^2}{2}+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{[t-(\mu+1)]^2}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{[t-(\mu+1)]^2}{2}}\mathrm{d}[t-(\mu+1)] \xlongequal{u=t-(\mu+1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) \xlongequal{x=\frac{u}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(2)矩估计：由(1)可知$E(X) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}$，因此有矩估计量

$$\hat{\mu}=\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-\frac{1}{2}$$

(3)注意到

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\mu)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x_i}\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\ln x_i)^2}{2}}\right]=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\ln x_i)^2}{2}}$$

有

$$\ln L(\mu)=-n\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mu-\ln x_i)^2$$

求导可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}[\ln L(\mu)]=-\sum_{i=1}^{n}(\mu-\ln x_i)=-n\mu+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得极大似然估计量

$$\bar{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

(4)注意到

$$E(\bar{\mu})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln X_i)=E(\ln X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\ln x f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\ln x\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}\mathrm{d}(\ln x)$$

$$\xlongequal{t=\ln x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-t)^2}{2}}\mathrm{d}t\xlongequal{u=t-\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(u+\mu)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=\mu$$

因此$\bar{\mu}$是μ的无偏估计.□

7.5 设总体 X 的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，其中$\theta>0$是未知参数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$是从该总体中抽取的一个样本. 求：

(1)未知参数θ的矩估计$\hat{\theta}$；

(2)$D\left(\hat{\theta}\right)$.

解：(1)矩估计：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{6}{\theta^3}\int_0^{\theta}(-x^3+\theta x^2)\mathrm{d}x=\frac{\theta}{2}$$

因此有矩估计量

$$\hat{\theta}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

(2)直接计算即可，因为

$$D(\hat{\theta})=D\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{4}{n^2}\times n\times D(X)=\frac{4}{n}D(X)$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{6}{\theta^3}\int_0^{\theta}(-x^4+\theta x^3)\mathrm{d}x=\frac{3\theta^2}{10}$$

即

$$D(\hat{\theta})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{4}{n}[E(X^2)-E^2(X)]=\frac{4}{n}\times\left(\frac{3\theta^2}{10}-\frac{\theta^2}{4}\right)=\frac{\theta^2}{5n}.\square$$

7.6 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x\geq\mu\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，其中 $\theta>0$，θ，μ 是未知参数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为取自 X 的样本. 求 θ，μ 的矩估计与极大似然估计量.

解：(1)矩估计：注意到

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\frac{x-\mu}{\theta}}\int_0^{+\infty}(\theta t+\mu)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$
$$=\theta\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\mu\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$
$$=\theta[-(t+1)\mathrm{e}^{-t}|_0^{+\infty}]+\mu(-\mathrm{e}^{-t}|_0^{+\infty})=\theta+\mu$$
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x=-\int_{\mu}^{+\infty}x^2\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\right)$$
$$=-\left(x^2\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\Big|_{\mu}^{+\infty}\right)+\int_{\mu}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}(x^2)$$
$$=\mu^2+2\theta\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x=\mu^2+2\theta(\theta+\mu)$$

因此有 $\begin{cases}\bar{X}=\theta+\mu\\ \overline{X^2}=\mu^2+2\theta(\theta+\mu)\end{cases}$，解得

$$\hat{\mu}=\bar{X}-\sqrt{\overline{X^2}-\bar{X}^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}$$

$$\hat{\theta}=\sqrt{\overline{X^2}-\bar{X}^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}$$

(2)最大似然估计：注意到

$$L(\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i-\mu}{\theta}}\right]=\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}e^{-\frac{x_i-\mu}{\theta}}$$

有

$$\ln L(\theta,\mu)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu}{\theta}$$

求偏导可得

$$\frac{\partial}{\partial\theta}[\ln L(\theta,\mu)]=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu}{\theta^2}=0$$

因此有

$$\hat{\theta}+\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

求偏导可得

$$\frac{\partial}{\partial\mu}[\ln L(\theta,\mu)]=\frac{n}{\theta}>0$$

方程无解，即取

$$\hat{\mu}=\min\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n\}$$
$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\min\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n\}.\square$$

7.7 设总体 X 的分布律为：$P(X=1)=\theta^2$，$P(X=2)=2\theta(1-\theta)$，$P(X=3)=(1-\theta)^2$，其中$0\leqslant\theta\leqslant1$为未知参数. X_1,X_2,X_3,X_4为来自总体X的简单随机样本. 求：

(1)若样本观察值为$1,1,3,3$，试求参数θ的矩估计值和最大似然估计值；

(2)以 $N_i(i=1,2,3)$ 分别表示 X_1,X_2,X_3,X_4 中等于 i 的个数. 试求a_1，a_2，a_3，使得 $N=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$为θ的无偏估计量.

解：(1)矩估计：注意到

$$E(X)=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta$$

因此有

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{2}\times\left[3-\frac{1}{4}\times(1+1+3+3)\right]=\frac{1}{2}$$

最大似然估计：注意到

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)=\theta^2\times\theta^2\times(1-\theta)^2\times(1-\theta)^2=\theta^4(1-\theta)^4$$

有

$$\ln L(\theta)=4\ln\theta+4\ln(1-\theta)$$

求导可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\ln L(\theta)]=\frac{4}{\theta}-\frac{4}{1-\theta}=\frac{4(1-2\theta)}{\theta(1-\theta)}=0$$

解得极大似然估计量

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}$$

(2)因为

$$\begin{aligned}E(N)&=E\left(\sum_{i=1}^{3}a_iN_i\right)=\sum_{i=1}^{3}a_iE(N_i)=a_1E(N_1)+a_2E(N_2)+a_3E(N_3)\\&=a_1\times4\times\theta^2+a_2\times4\times2\theta(1-\theta)+a_3\times4\times(1-\theta)^2\\&=4(a_1-2a_2+a_3)\theta^2+8(a_2-a_3)\theta+4a_3=\theta\end{aligned}$$

比较系数可得

$$\begin{cases}a_1-2a_2+a_3=0\\a_2-a_3=\dfrac{1}{8}\\a_3=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{4}\\a_2=\dfrac{1}{8}\\a_3=0\end{cases}.\square$$

7.8 设总体 X 服从 $\left[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}\right]$ 上的均匀分布，其中 $\theta>0$ 是未知参数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是从该总体中抽取的一个样本．试求 θ 矩估计与极大似然估量．

解：(1)矩估计：注意到

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}}=\theta$$

因此有

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

(2)最大似然估计：注意到

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}1=1\equiv\mathrm{Const}$$

又因为$\begin{cases} x_i \geqslant \theta - \dfrac{1}{2} \\ x_i \leqslant \theta + \dfrac{1}{2} \end{cases}$恒成立，因此

$$\max\{X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n\} - \frac{1}{2} \leqslant \hat{\theta} \leqslant \min\{X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n\} + \frac{1}{2}$$

即

$$\hat{\theta} \in \left[\max\{X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n\} - \frac{1}{2},\ \min\{X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n\} + \frac{1}{2}\right].\square$$

7.9 设$X_1, X_2, ..., X_n$是从该总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，其中μ已知.

(1)证明：$\bar{\sigma} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}|X_1 - \mu|$是$\sigma$的无偏估计；

(2)试求k使得$\hat{\sigma} = k\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i - \mu|$是$\sigma$的无偏估计，并比较$\hat{\sigma}$，$\bar{\sigma}$的有效性.

解：(1)因为$Y = X_1 - \mu \sim N(0, \sigma^2)$，于是有

$$\begin{aligned} E(\bar{\sigma}) &= E\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}|X_1 - \mu|\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}E(|X_1 - \mu|) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}E(|Y|) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}|y| f(y)\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}|y| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{\sigma}\int_{0}^{+\infty}y\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y \\ &= \sigma\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \overset{t = \frac{y^2}{2\sigma^2}}{=\!=\!=} \sigma\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \sigma \end{aligned}$$

因此$\bar{\sigma} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}|X_1 - \mu|$是$\sigma$的无偏估计.

(2)注意到

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}) &= E\left(k\sum_{i=1}^{n}|X_i - \mu|\right) = kE\left(\sum_{i=1}^{n}|X_i - \mu|\right) = k\sum_{i=1}^{n}E(|X_i - \mu|) \\ &= k \times n \times E(|X - \mu|) = nk \times E(|X_1 - \mu|) = nk \times \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = \sigma \end{aligned}$$

解得

$$k = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

下面比较$\hat{\sigma}$，$\bar{\sigma}$的有效性，即比较$D(\hat{\sigma})$，$D(\bar{\sigma})$，则

$$D(\bar{\sigma})=D\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}|X_1-\mu|\right)=\frac{\pi}{2}D(|X_1-\mu|)=\frac{\pi}{2}D(|Y|)=\frac{\pi}{2}[E(|Y|^2)-E^2(|Y|)]$$

$$=\frac{\pi}{2}[E(Y^2)-E^2(|Y|)]=\frac{\pi}{2}[D(Y)+E^2(Y)-E^2(|Y|)]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\sigma^2+0-\frac{2}{\pi}\sigma^2\right)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma^2=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sigma^2$$

$$D(\hat{\sigma})=D\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|\right)=\frac{\pi}{2n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|\right)$$

$$=\frac{\pi}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}D(|X_i-\mu|)=\frac{\pi}{2n^2}\times n\times D(|X-\mu|)$$

$$=\frac{\pi}{2n}D(|X_1-\mu|)=\frac{\pi}{2n}D(|Y|)=\frac{\pi}{2n}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma^2=\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sigma^2$$

因为$n\geqslant 1\Longleftrightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sigma^2\leqslant\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sigma^2\Longleftrightarrow D(\hat{\sigma})\leqslant D(\bar{\sigma})$，即$\hat{\sigma}$比$\bar{\sigma}$更加有效.□

7.10 从一批钉子中随机抽取 16 枚, 测得其长度(单位：cm)为：2.14,，2.10，2.13，2.15，2.13，2.12，2.13，2.10，2.15，2.12，2.14，2.10，2.13，2.11，2.14，2.11. 假设钉子的长度X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，在下列两种情况下分别求总体均值μ的置信度为 90%的置信区间.

(1)已知$\sigma=0.01$；

(2)σ未知.

解：通过样本总体可求得

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=2.125,\ S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{X}-X_i\right)^2}=0.01713,\ \alpha=0.1$$

(1)因为$Y=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，$z_{0.05}=1.645$，$\sigma=0.01$，则有

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，即置信区间为

$$\left(2.125-\frac{0.01}{\sqrt{16}}\times1.645,2.125+\frac{0.01}{\sqrt{16}}\times1.645\right)=(2.121,2.129).□$$

(2)因为$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$，$t_{0.05}(15)=1.7531$，则有

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

μ 的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，即置信区间为

$$\left(2.125-\frac{0.01713}{\sqrt{16}}\times 1.7531,2.125+\frac{0.01713}{\sqrt{16}}\times 1.7531\right)=(2.117,2.132).\square$$

7.11 已知一种元件的使用寿命服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ，σ^2未知. 从中随机抽取 25 件，测得其寿命的平均值为 1003 小时，标准差为 10 小时. 求总体方差σ^2的置信水平为 0.95 的置信区间.

解：通过样本总体可求得

$$\bar{X}=1003，S=10，\alpha=0.05$$

因为$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，于是$\chi^2_{0.025}(24)=39.364$，$\chi^2_{0.975}(24)=12.401$，则有

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=1-\alpha$$

σ^2的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$，即置信区间为

$$\left(\frac{(25-1)\times 10^2}{39.364},\frac{(25-1)\times 10^2}{12.401}\right)=(60.9694,193.5328).\square$$

7.12 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是从该总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，其中 μ 已知，σ 未知. 验证 $Y=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$. 利用这一结果构造$\sigma^2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

解：注意到

$$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)，\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)，Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$$

则有

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}<\sigma^2<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)=1-\alpha$$

即σ^2的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)},\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)}\right)$.□

第八章 假设检验

8.1 (1)对于某正态总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，作假设检验H_0：$\mu=\mu_0$，H_1：$\mu \neq \mu_0$. 若选择显著性水平$\alpha=0.05$时接受H_0，则对于显著性水平$\alpha=0.01$，结论是接受H_0还是拒绝H_0?为什么?

(2)设总体 X 的分布律为$P(X=1)=\theta$，$P(X=2)=2\theta$，$P(X=3)=1-3\theta$，作假设检验H_0：$\theta=0.1$，H_1：$\theta=0.2$. 现抽取容量为 3 的样本X_1,X_2,X_3，若拒绝域为$\{X_1=1,X_2=2,X_3=3\}$，则犯第一类错误及第二类错误的概率是多少?

解：(1)因为当$\alpha=0.05$时，接受原假设H_0：$\mu=\mu_0$时有$|z|=\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}$；当$\alpha=0.01$时，$|z|=\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|<z_{0.025}<z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.005}$，即接受原假设$H_0$

(2)犯第一类错误(弃真)的概率为

$$P(X_1=1,X_2=2,X_3=3|\theta=0.1)=\theta\times 2\theta\times(1-3\theta)|_{\theta=0.1}=0.014$$

犯第二类错误(取伪)的概率为

$$\begin{aligned}P(X_1\neq 1\cup X_2\neq 2\cup X_3\neq 3|\theta=0.2)&=1-P(X_1=1,X_2=2,X_3=3|\theta=0.2)\\&=1-\theta\times 2\theta\times(1-3\theta)|_{\theta=0.2}=1-0.032=0.968.\square\end{aligned}$$

8.2 假设随机变量 X 服从正态分布$N(\mu,1)$，$X_1,X_2,...,X_{10}$是来自 X 的一组样本，要检验H_0：$\mu=0$，H_1：$\mu\neq 0$.

(1)若取显著性水平$\alpha=0.05$，拒绝域为$W=\left\{\left|\bar{X}\right|\geq C\right\}$，求 C 的值；

(2)如果以$R=\left\{\left|\bar{X}\right|\geq 1.05\right\}$作为该检验的拒绝域，试求检验的显著性水平$\alpha$.

解：(1)因为当$\alpha=0.05$时，$|z|=\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=\left|\dfrac{\bar{X}-0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=\sqrt{10}\left|\bar{X}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}$，即接受原假设$H_0$，因为拒绝域$W=\left\{\left|\bar{X}\right|\geq C\right\}$，则

$$C=\frac{z_{0.025}}{\sqrt{10}}=\frac{1.96}{\sqrt{10}}=0.619806$$

(2) $|z|=\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=\left|\frac{\bar{X}-0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=\sqrt{10}\left|\bar{X}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}$ 接受原假设H_0，因为拒绝域$R=\left\{\left|\bar{X}\right|\geqslant 1.05\right\}$，则

$$\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{10}}=1.05 \Longleftrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1.05\times\sqrt{10}=3.32 \Longleftrightarrow \alpha=0.001.\square$$

8.3 某正态总体有一容量为 100 的样本，其观测值给出，可以算得 $\bar{x}=2.81$，$\sum_{i=1}^{100}(x_i-\bar{x})^2=225$，试在显著性水平$\alpha=0.05$下检验假设：

(1) H_0：$\mu=2.5$，H_1：$\mu\neq 2.5$；

(2) H_0'：$\sigma^2=2.35$，H_1'：$\sigma^2\neq 2.35$(要求在(1)的基础上检验).

解：通过样本总体可求得

$$\bar{X}=2.81,\ S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{99}\times 225}=1.508$$

(1)因为$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$，则当$\alpha=0.05$时，接受原假设$H_0$：$\mu=2.5$时有

$$|t|=\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right|=\left|\frac{2.81-2.5}{\frac{1.508}{\sqrt{100}}}\right|=2.0557>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(99)=1.984$$

因此需要拒绝原假设H_0：$\mu=2.5$，接受备择假设H_1：$\mu\neq 2.5$

(2)因为$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，则当$\alpha=0.05$时，原假设为$H_0'$：$\sigma^2=2.35$，若想接受原假设，则有

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

解得

$$74.22<95.7447<129.56$$

条件成立，因此接受原假设H_0'：$\sigma^2=2.35.\square$

8.4 要求一种元件使用寿命不得低于 1000 小时. 今从一批这种元件中随机抽取 25 件，测得其寿命的平均值为 950 小时，已知该种元件寿命服从标准差为$\sigma=100$小时的正态分布. 试在显著性水平$\alpha=0.05$下确定这批元件是否合格?

解：通过样本总体可求得

$$\bar{X}=950,\ \sigma=100,\ \alpha=0.05$$

因为有 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，若接受原假设 H_0：$\mu\geqslant 1000$，则有

$$z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{950-\mu}{\frac{100}{\sqrt{25}}}=\frac{950-\mu}{20}\leqslant\frac{950-1000}{20}=-2.5<-z_\alpha=-z_{0.05}=-1.645$$

落在拒绝域内，因此需要拒绝原假设 H_0：$\mu\geqslant 1000$，接受备择假设 H_1：$\mu<1000$.□

8.5 某种导线要求其电阻的标准差不得超过 0.005 欧. 今在生产的一批导线中取样品 9 根，测得 $s=0.007$ 欧，设总体为正态分布，问在水平 $\alpha=0.05$ 下能否认为这批导线的标准差显著偏大?

解：通过样本总体可求得

$$S=0.007,\ \alpha=0.05$$

因为有 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，若接受原假设 H_0：$\sigma^2\leqslant 0.005^2$，则有

$$\chi^2(n-1)=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{8\times 0.007^2}{\sigma^2}\geqslant\frac{8\times 0.007^2}{0.005^2}=15.68>\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(8)=15.507$$

落在拒绝域内，因此需要拒绝原假设 H_0：$\sigma^2\leqslant 0.005^2$，接受备择假设 H_1：$\sigma^2>0.005^2$.□

8.6 某种灯泡的寿命要求不小于 2000 小时. 已知某厂生产的灯泡寿命服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布，μ，σ^2 均未知. 现从该厂生产的产品中随机地抽取 20 只进行测试，测得它们的平均寿命 $\bar{x}=2050$ 小时，样本标准差 $s=490$ 小时，试问：在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下，能否认为这批灯泡的平均寿命不小于 2000 小时?

解：通过样本总体可求得

$$\bar{X}=2050,\ S=490,\ \alpha=0.01,\ n=20$$

因为总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，于是有 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$，若接受原假设 H_0：$\mu\geqslant 2000$，则有

$$t=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{2050-\mu}{\frac{490}{\sqrt{20}}}\leqslant\frac{2050-2000}{\frac{490}{\sqrt{20}}}=0.45634>-t_\alpha(n-1)=-t_{0.01}(19)=-2.5395$$

落在拒绝域外，因此需要接受原假设 H_0：$\mu\geqslant 2000$.□