一、填空.

1. $P(A)=0.7$，$P(\bar{B})=0.6$，$P(A\bar{B})=0.5$. 则 $P(B|A\cup\bar{B})=$ ____

2. 实验室器皿产生细菌数在0, 1, 2, 3这四个中等可能取一整数. 且产生甲、乙这两类细菌机会相等. 则产生甲但没有产生乙的概率为 ____。

3. 设二维随机向量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)|0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布，

令 $\eta_1=\begin{cases}1 & X-Y>0\\0 & X-Y\le 0\end{cases}$，$\eta_2=\begin{cases}1 & X+Y>0\\0 & X+Y\le 0\end{cases}$，则 $Z=\eta_1\eta_2$ 的分布律为 ____

4. 设二维随机向量 $(X,Y)\sim N(1,-2,2,2,-\frac{1}{2})$，则 $E(XY)=$ ____

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots Y_5$，分别来自总体 $N(0,4)$ 和 $N(1,2)$ 的样本. 且这两组样本相互独立. S_1^2,S_2^2 分别为样本方差，则统计量 $\frac{S_1^2}{2S_2^2}$ 服从 ____ 分布（请注明自由度）

6. 设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本. 其中 μ 已知. 若 $\hat{\sigma}=k\sum_{i=1}^{n}|X-\mu|$ 是 σ 的无偏估计. 则 $k=$ ____

7. 某大学男生体重 $X\sim N(\mu,25)$，对于假设检验问题：$H_0:\mu=68kg$，$H_1:\mu>68kg$. 取显著性水平 $\alpha=0.05$，若当真实均值为69kg时. 犯第二类错误的概率不超过0.05. 则样本容量n至少为 ____

二. 设考生报名表来自三个地区. 分别有10、15、25份. 其中女生分别有3、7、5份

随机从一地区先后取2份. (1) 求先取到的报名表是女生的概率

(2) 已知后取到的为男生的. 则求先取到女生的概率

三. 有同型号车床200部. 每部开动概率为0.7. 各机床开关独立. 开动时每部消耗15单位电能

问需最少供应多少电能，才能以不低于0.95的概率保证不会因供电不足而影响生产.

四. 设随机变量X概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}Ax^2e^{-x^2} & x>0\\ & x\le 0\end{cases}$

(1) 求常数A、E(X)，并求X的分布函数 $F_X(x)$（可用 $\Phi(\cdot)$ 辅助表达）

标准正态分布函数.

(2) 求 $Y=X^2$ 的概率密度函数

五. (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{A}{x^2y}, & x>1,\ \frac{1}{x}<y<x\\ 0 & \text{else}\end{cases}$

求 (1) 常数A 及 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，$f_{Y|X}(y|x)$

(2) X、Y是否相互独立？为什么？并求 $P\{\max(X,Y)\le 2\}$

六. 若X服从期望为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布 $(\lambda>0)$，则 $Y=[X]+1$ 服从什么分布？$[\cdot]$ 为取整运算

若为离散型写出分布律. 若为连续型则写概率密度函数.

七. 包装食盐. 假设每袋净重服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，规定方差不超过 $10g^2$，

从中随机抽取10袋. 测得平均重量为499g，样本标准差为3.46g.

(1) 包装机工作是否正常？

(2) 求 μ 的置信水平为0.95的置信区间（写过程）

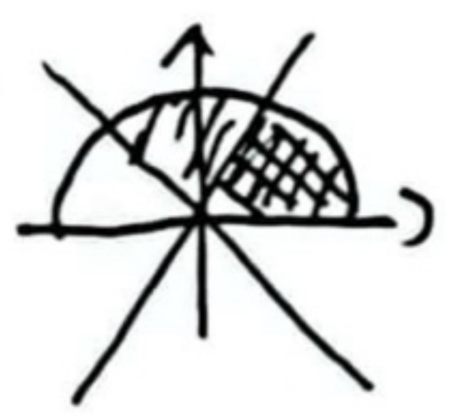
八、盒子中装有若干白、黑球. 其中白球数占比 p $(0<p<1)$ 为未知参数. 现从盒中每次任取1个球.（取后放回），直到取出白球为止. 设总体X为取出的黑球数. $X_1,X_2,\cdots X_n$ 为一组简单随机样本. 求 (1) X的分布律 (2) p 的矩估计量 $\hat{p}$ 和最大似然估计量 $\hat{p}$.

1. $\because P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0.5$

$\therefore P(AB) = 0.2 \quad \therefore P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = 0.2$

$$\therefore P(B|\bar{A}\cup\bar{B}) = \frac{P[B\cap(\bar{A}\cup\bar{B})]}{P(\bar{A}\cup\bar{B})} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\overline{AB})} = \frac{0.2}{1-0.2} = \frac{1}{4}$$

2. $\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

3. 

$P\{Z=k\} = (\frac{1}{4})^{k}\cdot(\frac{3}{4})^{1-k}, \ k=0,1$

4. $E(X)=1 \quad E(Y)=-2$

$D(X)=2 \quad D(Y)=2$

$$\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = -\frac{1}{2}$$

$\therefore E(XY) = -2-1 = -3$

5. $\frac{9S_1^2}{4} \sim \chi_1^2(9) \qquad \therefore \frac{S_1^2}{2S_2^2} \sim \frac{\chi_1^2(9)/9}{\chi_2^2(4)/4} = F(9,4)$

$\frac{4S_2^2}{2} \sim \chi_2^2(4)$

6. $E|X-\mu| = \int_{-\infty}^{\infty}|x-\mu|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$

$\therefore E(\hat{\sigma}) = k\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$

$\because$ 无偏估计 $\therefore E(\hat{\sigma}) = \sigma$

$\therefore k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

7. 对给定的$\delta>0$ $(|\mu-\mu_1|\geq\delta)$ 样本容量n满足$n\geq\frac{(u_\alpha+u_\beta)^2\sigma^2}{\delta^2}$

$\because \alpha=\beta=0.05 \quad \therefore u_\alpha=u_\beta=1.645$，对其对立假设$\mu=69$而言，取$\delta=1$

则 $n = \frac{(1.645+1.645)^2\times 25}{1} \approx 271$

二、(1). 设取到的报名表是女生记为A，考生报名表是第i个地区为 B_i

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)\cdot P(B_i)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{25}\cdot\frac{1}{3}=\frac{29}{90}.$$

(2) 设 C 为后取到的是男生的. D为先取到的是女生的.

$$P(D|C)=\frac{P(C|D)\cdot P(D)}{P(C)}=\frac{P(CD)}{P(CD)+P(C\bar{D})}$$

$$P(CD)=P(CD|B_1)\cdot P(B_1)+P(CD|B_2)\cdot P(B_2)+P(CD|B_3)\cdot P(B_3)$$

$$=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}.$$

$$P(C\bar{D})=P(C\bar{D}|B_1)P(B_1)+P(C\bar{D}|B_2)\cdot P(B_2)+P(C\bar{D}|B_3)\cdot P(B_3)$$

$$=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{8}{15}\times\frac{7}{14}\times\frac{1}{3}+\frac{20}{25}\times\frac{19}{24}\times\frac{1}{3}=\frac{41}{90}.$$

$$P(D|C)=\frac{\frac{20}{90}}{\frac{20}{90}+\frac{41}{90}}=\frac{20}{61}.$$

三、X表示200部中同时开动的机床数目. $X\sim B(200,0.7)$. $X\sim N(140,42)$.

则 $P\{X\leq n\}=0.95 \Rightarrow P\{X\leq n\}\approx\Phi\left(\frac{n-140}{\sqrt{42}}\right)=0.95$

$\frac{n-140}{\sqrt{42}}=1.64$ $n\in Z$，则 $n=151$.

至少供应 $151\times15=2265$ 单位电能.

四. (1). 由定义 $\int_0^{+\infty}Ax^2e^{-x^2}dx=0$. $A\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx=A(-\frac{1}{2})\int_0^{+\infty}x\,de^{-x^2}$

$$=\frac{A}{2}\cdot\left(xe^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)=\frac{A}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1 \quad \therefore A=\frac{4}{\sqrt{\pi}}.$$

$$E(X)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot(-\frac{1}{2})\int_0^{+\infty}x^2de^{-x^2}=\frac{-2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(x^2e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx^2\right)$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{\pi}}\cdot(-1)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

$x\leq0$ 时 $F_X(x)=0$. $x>0$ 时 $F_X(x)=\int_0^x\frac{4}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-x^2}dx=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^xe^{-x^2}dx+xe^{-x^2}\right]$

$$\therefore F_X(x)=\begin{cases}0 & x\leq0\\ \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left[xe^{-x^2}+\Phi(x)-\frac{1}{2}\right] & \text{else}.\end{cases}$$

(2). 当 $Y<0$ 时 $F_Y(y)=0$. 此时 $f_Y(y)=F_Y'(y)=0$.

当 $Y\geq 0$ 时 $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}=P\{-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

∵ $F_X(x)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}[-xe^{-x^2}+\Phi(x)-\frac{1}{2}]$ ∴ $F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})=\frac{4}{\sqrt{\pi}}[\Phi(\sqrt{y})-\Phi(-\sqrt{y})-2\sqrt{y}e^{-y}]$

$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}[2\Phi(\sqrt{y})-2\sqrt{y}e^{-y}]$.

∴ $F_Y(y)=\begin{cases}0 & Y\leq 0.\\ \frac{8}{\sqrt{\pi}}[\Phi(\sqrt{y})-\sqrt{y}e^{-y}] & else.\end{cases}$

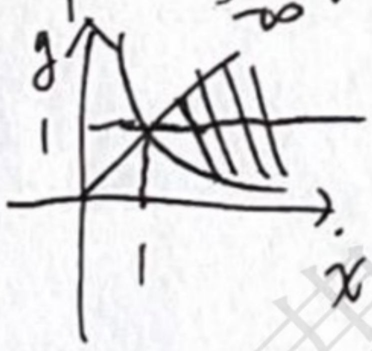
五. (1). 由定义. $\iint\limits_R \frac{A}{x^2y}d\sigma=\int_1^{+\infty}\frac{A}{x^2}dx\cdot\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{y}dy=1$. 原式$=\int_1^{+\infty}\frac{A}{x^2}\cdot 2\ln x\,dx$

$=2A\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}d\ln x$. 取 $\ln x=t$, 则 $x=e^t$, $t\in[0,+\infty)$.

原式$=2A\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=2A(te^{-t}+e^{-t})\big|_{+\infty}^{0}=2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{2x^2y}dy=\frac{2\ln x}{2x^2}=\frac{\ln x}{x^2}$. (当 $\begin{cases}x>1\\ \frac{1}{x}<y<x\end{cases}$ 时).

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$



当 $0<y\leq 1$ 时 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty}\frac{1}{2x^2y}dx=\frac{1}{2}$ $(x>1)$.

当 $1<y$ 时 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{y}^{+\infty}\frac{1}{2x^2y}dx=\frac{1}{2y^2}$

当 $(x,y)\in\{(x,y)|x>1,\frac{1}{x}<y<x\}$ 时 $f_X(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y\leq 1\\ \frac{1}{2y^2} & 1<y.\end{cases}$

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{x^2}{\ln x}\cdot\frac{1}{2x^2y}=\frac{1}{2y\ln x}$ $(x\neq 1)$.

(2). $\forall(x,y)\in D$. $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$. 不独立.

设 $Z=\max(X,Y)$. 则 $P\{Z\leq 2\}=F_Z(2)$. 由于 $y<x$. 则 $\max(X,Y)=X$

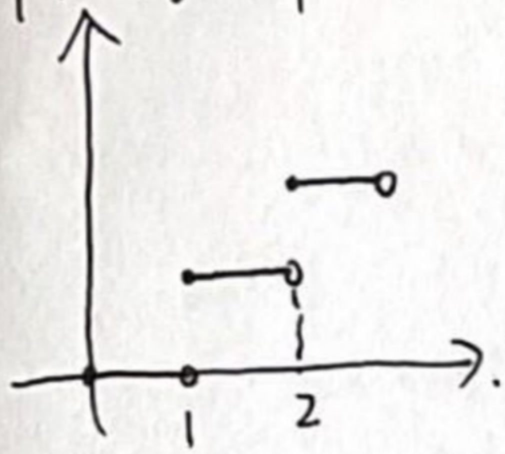
$P\{\max(X,Y)<2\}=P\{X<2\}=F_X(2)=\int_1^2 f_X(x)dx$

$\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\int_1^2\frac{\ln x}{x}d\ln x$, 令 $x=e^u$, 原式$=\int_0^{\ln 2}ue^{-u}du=ue^{-u}+e^{-u}\big|_{\ln 2}^{0}=\frac{1-\ln 2}{2}$.

六、$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\\ 0, & else.\end{cases} \Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\\ 0, & else.\end{cases}$

当 $Y<1$ 时. $F_Y(y)=0$. ∴ $f_Y(y)=0$. 当 $Y\ge 1$ 时.

$P\{Y\le y\}=P\{[X]\le y-1\}$. 显然 $y-1$. y 为正整数.



要使 $[X]\le y-1$. 则 $y-1\le X<y$.

则 $P\{Y\le y\}=P(y-1\le X\le y)=F(y)-F(y-1)$

$=e^{-\lambda(y-1)}-e^{-\lambda y}=(e^{\lambda}-1)\cdot e^{-\lambda y}$

∴ $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}-(e^{\lambda}-1)\lambda e^{-\lambda y}, & y\ge 1\\ 0, & else.\end{cases}$

七. (1) 考虑枢轴量 $\chi^2=\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2$. 作假设 $H_0: \sigma^2\le 10$ $H_1: \sigma^2>10$

$\chi^2=\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2=1.077444$, 拒绝域为 $\cancel{\chi^2\le\chi^2}$ $\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$

$\chi^2_{0.05}(9)=\cancel{15.51}$ 16.919. 拒绝 H_1 接受 H_0.

正常工作.

(2). 考虑枢轴量 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

置信区间为 $\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$. 代入数据得:

95% 置信区间为: (496.53, 501.48).

八. (1). 当 $X=k$ 时，意味着前 k 个球均取到黑球，第 $(k+1)$ 个球是白球

则 $P(X=k)=(1-p)^k\cdot p$ ，$k=0,1,2,\cdots$

(2) $$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k(1-p)^k p = p(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}k(1-p)^{k-1} = p(p-1)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{d}{dp}(1-p)^k\right] = p(p-1)\frac{d}{dp}\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k$$

对 $x\in(-1,1)$ $\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$. 则原式

$$=p(p-1)\cdot\frac{d}{dp}\cdot\frac{1}{1-(1-p)}=\frac{1-p}{p}.$$

$\hat{\mu}=\frac{1-p}{p}=A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ，x_i 为简单随机样本.

$\hat{p}=\frac{n}{n+\sum_{i=1}^{n}x_i}$. (矩估计量). $P(X=x_i)=(1-p)^{x_i}\cdot p$.

$$L(p,x_1,x_2,\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(X=x_i)=(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot p^n.$$

$$\ln L(p,x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln(1-p)+n\ln p.$$

$\frac{d\ln L}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p-1}+\frac{n}{p}=0.$ $\hat{p}=\frac{n}{n+\sum_{i=1}^{n}x_i}$. (最大似然估计量).