理论力学课程指定参考资料

理论力学习题精选

（2018 版）

理论力学课程组　编写

南京航空航天大学

2018 年 8 月

一 选择填空题

1 在下述公理、法则、定律及原理中，只适用刚体的有（① ③ ④ ）。

① 二力平衡公理 ② 力的平行四边形法则 ③ 加减平衡力系公理

④ 力的可传性原理 ⑤ 作用与反作用定律

2 作用在一个刚体上的两个力 F_A 、F_B，如果满足 $F_A= -F_B$ 的条件，则该二力可能是（② ）。

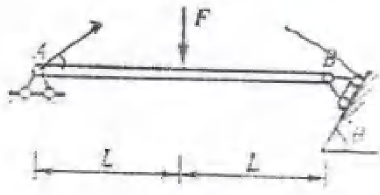
① 作用力和反作用力或一对平衡力 ② 一对平衡力或一个力偶

③ 一对平衡力或一个力和一个力偶 ④ 作用力与反作用力或一个力偶

3 如图所示的系统受主动力 F 作用而平衡，欲使支座 A 的约束反力的作用线与 AB 成 30°角，则倾斜面的倾角 θ 应为（④）。

① 0° ② 30°

③ 45° ④ 60°



题 3 图

4 如图所示的契形块 A、B，自重不计，$F= -F'$，接触处光滑，则（ ③ ）。

① A 平衡，B 不平衡 ② A 不平衡，B 平衡

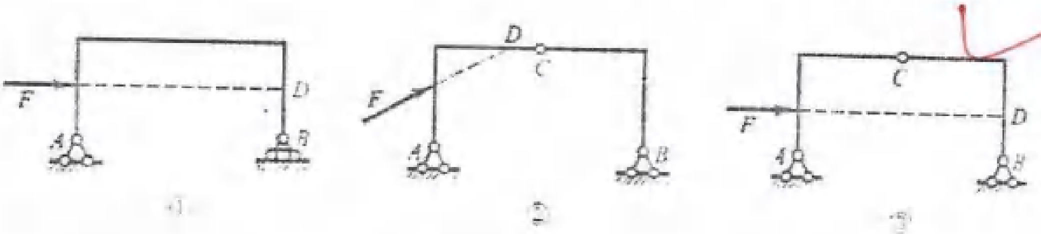
③ A、B 均不平衡 ④ A、B 均平衡

题 4 图

5 考虑力对物体作用的外效应和内效应，力是（③ ）。

① 滑动矢量 ② 自由矢量 ③ 定位矢量

6 在图示的三种情况中，当力 F 沿其作用线移到点 D，并不改变 B 处受力的情况是（① ②）。

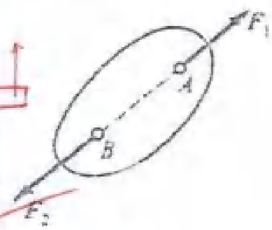


题 6 图

7 一刚体受两个作用在同一直线上，指向相反的力 F_1 和 F_2 作用（如题 7 图所示），它们的大小的关系为 $F_1= 2F_2$，则该力系的合力矢量 F_R 可表示为（①）。
③

① $F_R= F_1 - F_2$ ② $F_R= F_2 - F_1$

③ $F_R= F_1 + F_2$ ④ $F_R= F_2$



题 7 图

8 刚体受三力作用而处于平衡状态，则此三力的作用线（①）。
④

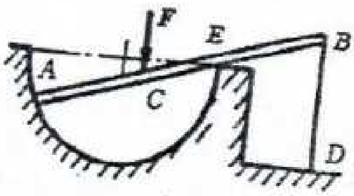
① 必汇交于一点 ② 必互相平行

③ 必皆为零 ④ 必位于同一平面内

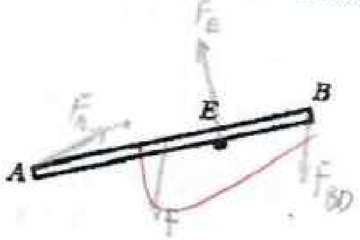
9 作用在刚体上的力可沿其作用线任意移动，而不改变力对刚体的作用效果。所以，在静力学中，力是（ 滑动 ）矢量。

二 画出下列各物体的受力图。凡未特别注明者，物体的自重均不计，且所有的接触面都是光滑的。

(1)

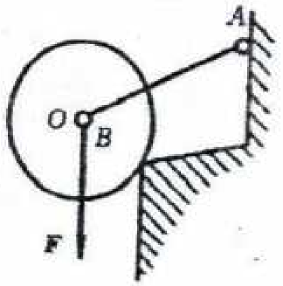


(a)

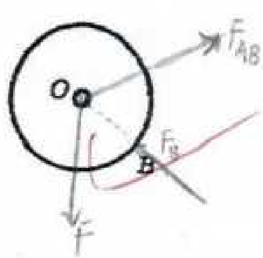


(b)

(2)

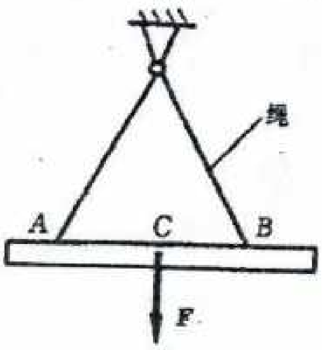


(a)

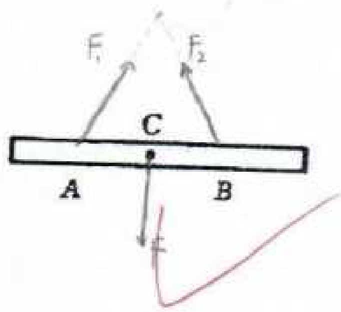


(b)

(3)

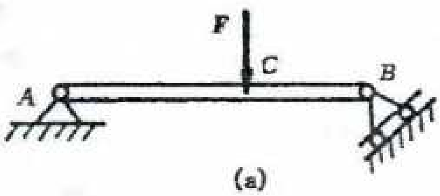


(a)

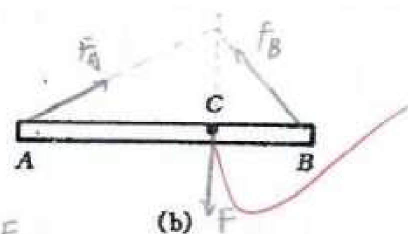


(b)

(4)

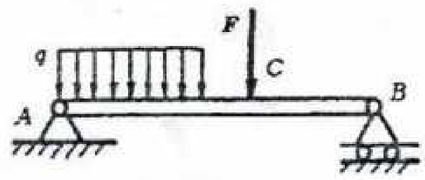


(a)

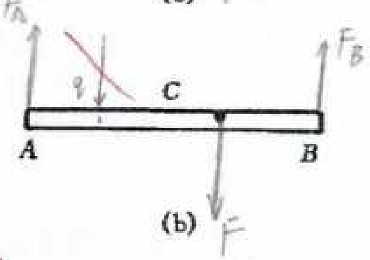


(b)

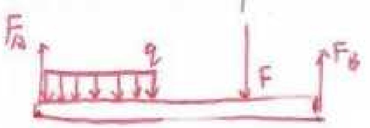
(5)



(a)

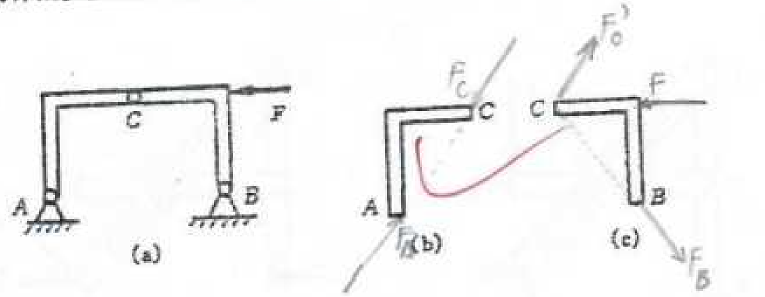


(b)

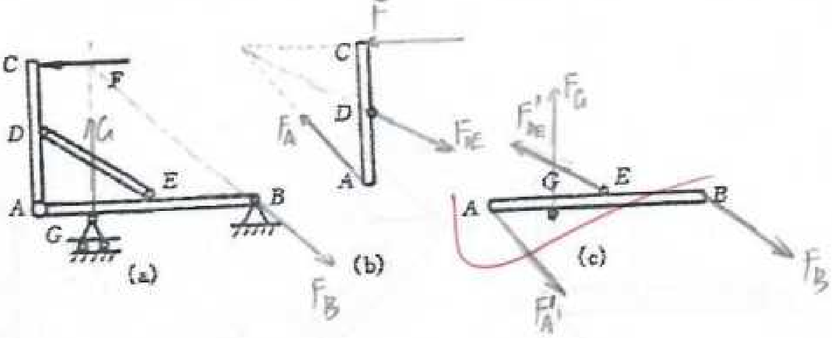


三 画出下列各物体的受力图。凡未特别注明者，物体的自重均不计，且所有的接触面都是光滑的。

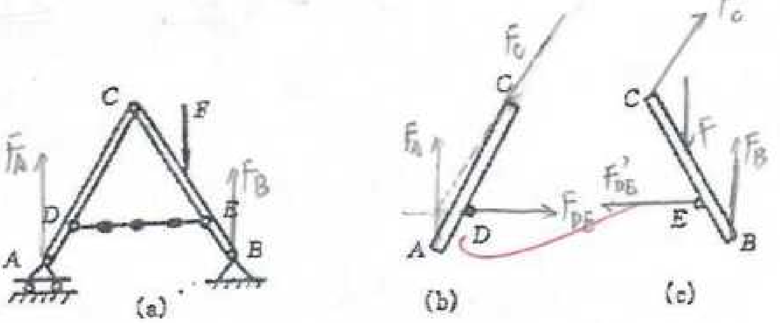
(1)



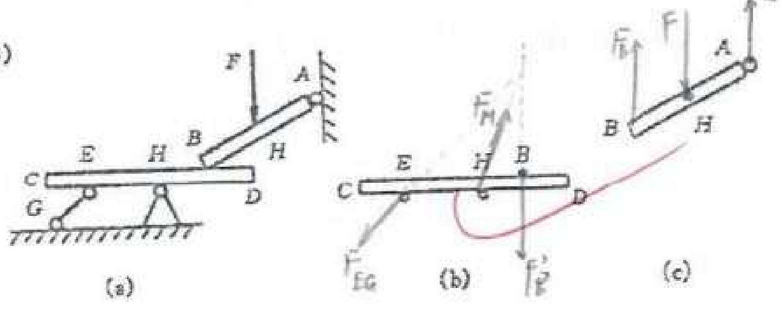
(2)



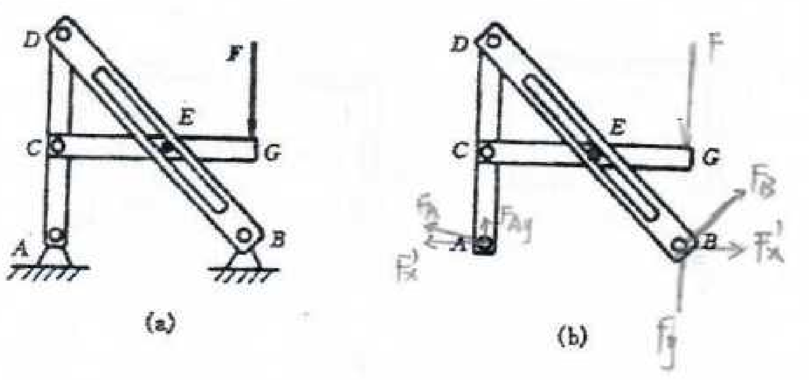
(3)



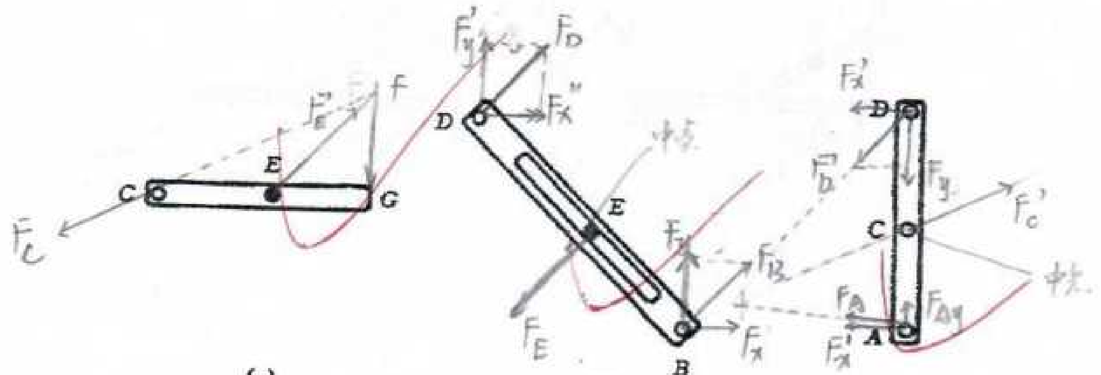
(4)



(5)



(a) (b)



(c) (d) (e)

设B处受力 F_x F_y 分式　在e中 C为中点，取之为转轴 得 D处与A处水平分力相等

在b中 A、B水平分力反向相等　在d中 D、B水平分力相等同向

E为中点，取E为转轴，则D、B竖直分力也相等同向

共d平衡，则B、D处受力与 F_E 平行，再在e中三力平衡得A处受力方向

则合力方向皆可得

21

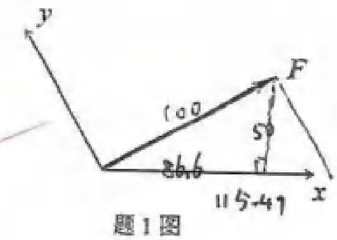
阅

9.22

一、选择填空题

1 如图所示，将大小为 100 N 的力 F 沿 x、y 方向分解，若 F 在 x 轴上的投影为 86.6 N，而沿 x 方向的分力的大小为 115.47 N，则 F 在 y 轴上的投影的大小为（ ① ）。

① 0　　② 50 N　　③ 70.7 N　　④ 86.6 N

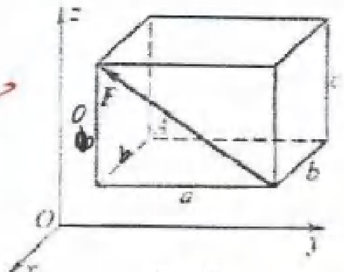


题 1 图

2 已知长方体的边长为 a、b、c，顶点 A 的坐标为（1，1，1），如图所示。则力 F 对 z 轴的矩 $M_z(F)$为（ ② ）。

① $\dfrac{a(b+1)}{\sqrt{a^2+c^2}}F$　　② $-\dfrac{a(b+1)}{\sqrt{a^2+c^2}}F$

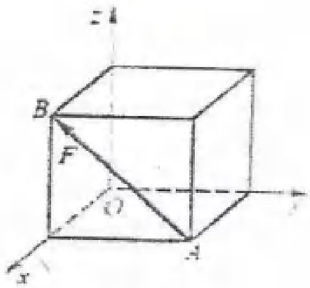
③ $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+c^2}}F$　　④ $-\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+c^2}}F$



题 2 图

3 正立方体的前侧面沿对角线 AB 方向作用一力 F，则该力（ ④ ）。

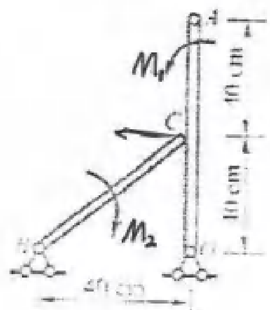
① 对 x、y、z 轴之矩全相等
② 对 x、y、z 轴之矩全不相等
③ 对 x、y 轴之矩相等
④ 对 y、z 轴之矩相等



题 3 图

4 如图所示，OA 构件上作用一矩为 M_1 的力偶，BC 上作用一矩为 M_2 的力偶，若不计各处摩擦，则当系统平衡时，两力偶矩应满足的关系为（ ③

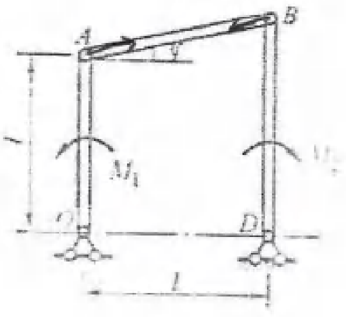
① $M_1=4M_2$　　② $M_1=2M_2$
③ $M_1=M_2$　　④ $M_1=M_2/2$



题 4 图

5 如图所示的机构中，在构件 OA 和 BD 上分别作用力偶矩为 M_1 和 M_2 的力偶使机构在图示位置平衡。若将 M_1 移到 AB 构件上时使系统仍能在图示位置保持平衡，则应该有（ ④ ）。

① 增大 M_1
② 减小 M_1
③ 保持 M_1 不变
④ 不可能在图示位置上平衡



题 5 图

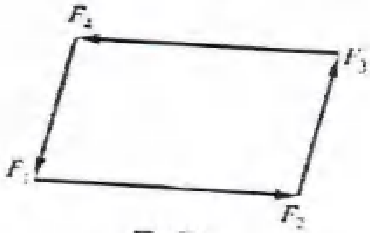
6 已知F_1、F_2、F_3、F_4为作用于刚体上的平面共点力系，其力矢关系如图所示为平行四边形，因此可知（ ① ）。④

① 力系可合成为一个力偶

② 力系可合成为一个力

③ 力系简化为一个力和一个力偶

④ 力系平衡



题 6 图

7 平面内一非平衡共点力系和一非平衡力偶系最后可能合成的情况是（ ② ）。

① 一合力偶　　② 一合力

③ 相平衡　　④ 无法进一步合成

8 将两个等效力系中的一个向点 A 简化，另一个向点 B 简化，得到的主矢和主矩分别记为 F'_{R1}、M_1 和 F'_{R2}、M_2（主矢与 AB 不平行），则有（ ① ）。

① $F'_{R1}=F'_{R2}$　$M_1=M_2$　　② $F'_{R1}=F'_{R2}$　$M_1\neq M_2$

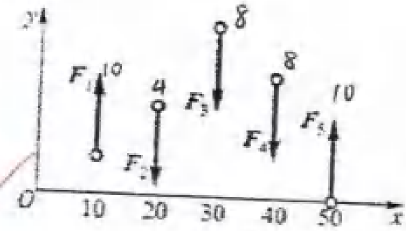
③ $F'_{R1}\neq F'_{R2}$　$M_1=M_2$　　④ $F'_{R1}\neq F'_{R2}$　$M_1\neq M_2$

9 某平面平行力系诸力与 y 轴平行，如图所示。已知：$F_1=10\,\mathrm{N}$，$F_2=4\,\mathrm{N}$，$F_3=8\,\mathrm{N}$，$F_4=8\,\mathrm{N}$，$F_5=10\,\mathrm{N}$，长度单位以 cm 计，则力系的简化结果与简化中心的位置（ ①④ ）。

① 无关　　② 有关

③ 若简化中心选择在 x 轴上，与简化中心的位置无关

④ 若简化中心选择在 y 轴上，与简化中心的位置无关



题 9 图

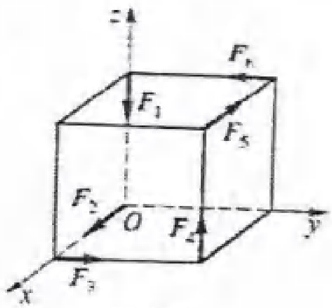
10 图示正立方体的顶角上作用着 6 个大小相等的力，此力系向任一点简化的结果为（ ① ）。

① 主矢等于零，主矩不等于零

② 主矢不等于零，主矩也不等于零

③ 主矢不等于零，主矩等于零

④ 主矢等于零，主矩也等于零

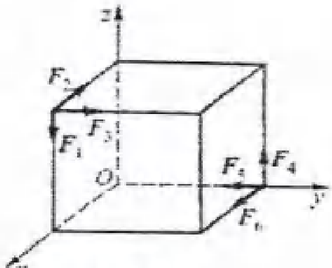


题 10 图

11 在一个正方体上沿棱边作用 6 个力，各力的大小都为 F，如图所示。则此力系简化的最后结果为（ ② ）。

① 合力　　② 平衡

③ 合力偶　　④ 力螺旋



题 11 图

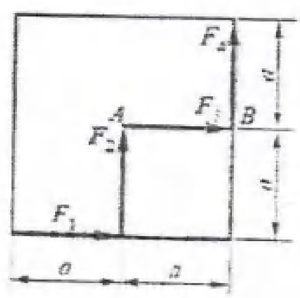
12 一空间力系向某点 O 简化后的主矢和主距分别为 $F'_R=0i+8j+8k$，$M_O=0i+0j+24k$，则该力系可进一步简化的最后结果为（ ③ ）。

① 合力　　② 合力偶　　③ 力螺旋　　④ 平衡力系

13 如图所示力系中，$F_1=F_2=F_3=F_4=F$，此力系向点 A 简化的结果是（一个力和一个力偶），此力系向点 B 简化的结果是（一个合力 ）。

$F_R=2\sqrt{2}F$

$F_R=2\sqrt{2}F,\ M_A=2aF$

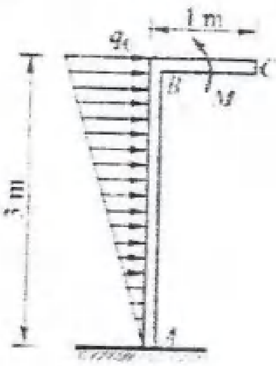


题 13 图

14 直角刚架受三角形分布力和一力偶的作用，如图所示。其中，$q_0=2$ kN/m，$M=2$ kN·m。则该力系向点 A 简化的结果为（一个力和一个力偶）。

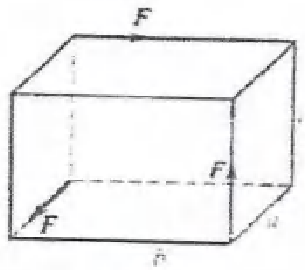
$F_R=\frac{1}{2}q_0\cdot|AB|=3kN$

$M_A=-\int_0^3 \frac{2}{3}\cdot l\cdot l\cdot dl+2kN\cdot m=-4kN\cdot m$



题 14 图

15 沿长方体的不相交且不平行的棱边作用三个大小相等的力，如图所示。要使这个力系简化为一个力，则边长 a、b、c 应满足的条件为（ $b=a+c$ ）。



题 15 图

16 通过 A（3，0，0）、B（0，1，2）两点（长度单位为 m），指向 B 的力 F，在 z 轴上的投影为（ $\frac{2}{\sqrt{14}}F$ ），对 z 轴的矩为（ $\frac{3}{\sqrt{14}}F$ ）。

二、试计算各图中力 F 对点 O 的矩。

解：(a) $M_o=0$

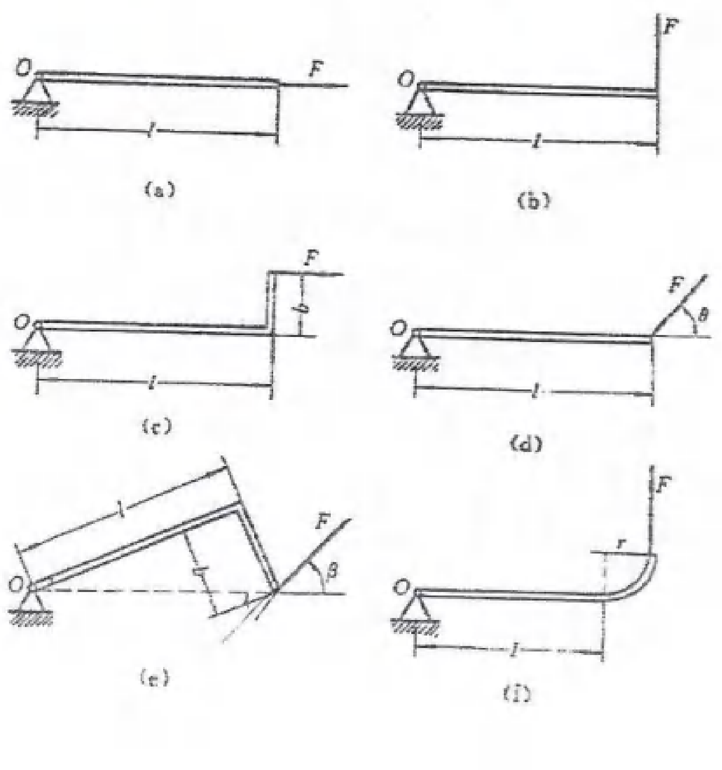
(b) $M_o=Fl$

(c) $M_o=-Fb$

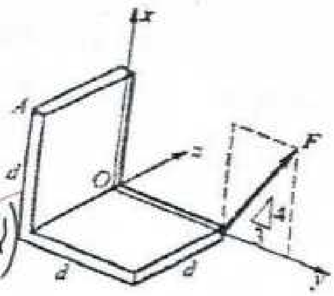
(d) $M_o=F\cdot l\cdot\sin\theta$

(e) $M_o=F\cdot\sqrt{l^2+b^2}\cdot\sin\beta$

(f) $M_o=F\cdot(l+r)$



三、如图所示，试求力F对点A之矩。



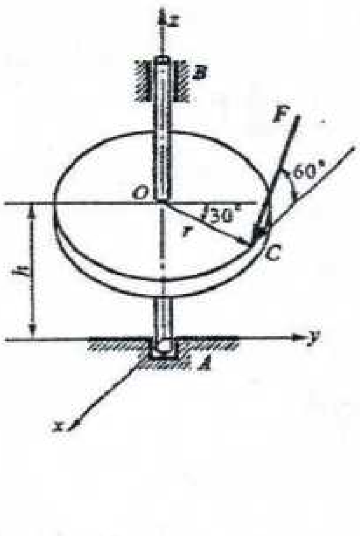
解：由图 $\vec{F}=(\frac{4}{5}F,\ \frac{3}{5}F,\ 0)$

$\vec{r}=(-d,\ d,\ d)$

$\therefore \vec{M}_A(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & d & d \\ \frac{4}{5}F & \frac{3}{5}F & 0 \end{vmatrix}=(-\frac{3}{5}Fd,\ \frac{4}{5}Fd,\ -\frac{7}{5}Fd)$

$\therefore |\vec{M}_A(\vec{F})|=1.72Fd$

四、水平圆盘的半径为r，外缘C处作用有已知力F。力F位于铅垂平面内，且与C处圆盘切线夹角为60°，其它尺寸如图所示。求力F对x，y，z轴之矩。



解：由图：$\vec{AC}=(\frac{1}{2}r,\ \frac{\sqrt{3}}{2}r,\ h)$

$\vec{F}=(\frac{\sqrt{3}}{4}F,\ -\frac{1}{4}F,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}F)$

$\therefore \vec{M}_A(\vec{F})=\vec{AC}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2}r & \frac{\sqrt{3}}{2}r & h \\ \frac{\sqrt{3}}{4}F & -\frac{1}{4}F & -\frac{\sqrt{3}}{2}F \end{vmatrix}$

$=(-\frac{3}{4}Fr+\frac{1}{4}Fh,\ \frac{\sqrt{3}}{4}Fr+\frac{\sqrt{3}}{4}Fh,\ -\frac{1}{2}Fr)$

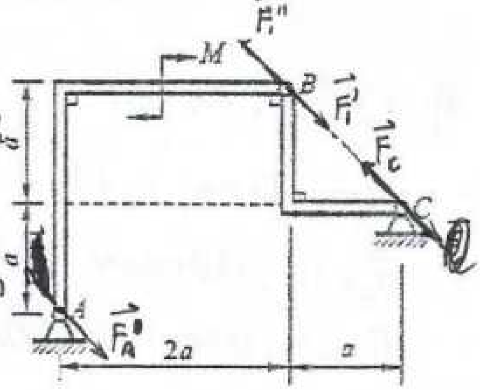
$\therefore$ 力$\vec{F}$对x,y,z轴之矩分别为：

$M_x(\vec{F})=-\frac{3}{4}Fr+\frac{1}{4}Fh$

$M_y(\vec{F})=\frac{\sqrt{3}}{4}Fr+\frac{\sqrt{3}}{4}Fh$

$M_z(\vec{F})=-\frac{1}{2}Fr$

五、在图示结构中，各构件的自重略去不计。在构件 AB 上作用一力偶矩为 M 的力偶，求支座 A 和 C 的约束反力。



解：对BC杆分析，其只受二个力平衡，所以二力大小相等方向相反

设为 $\vec{F_1}$,$\vec{F_C}$ 如图。

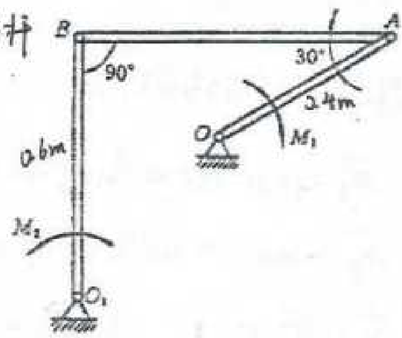
对AB分析，B处受力 $\vec{F_1}''$，若平衡，则合力为0，A,B处受力构成力偶 $|\vec{F_A}'|=|\vec{F_1}''|$

且：$F_A'\cdot 2\sqrt{2}a - M = 0$　　∴ $F_A' = \frac{M}{2\sqrt{2}a}$

∴ $|\vec{F_1}| = |\vec{F_A}'| = \frac{M}{2\sqrt{2}a}$

∴ A、C处约束反力 $\vec{F_A}$,$\vec{F_C}$ 大小为 $\frac{M}{2\sqrt{2}a}$ 方向如图

六、铰链四杆机构 $OABO_1$ 在图示位置平衡。已知：$OA = 0.4$ m，$O_1B = 0.6$ m，作用在 OA 上的力偶的力偶矩 $M_1 = 1$ N·m。各杆重量不计。试求力偶矩 M_2 的大小和杆 AB 所受的力 F。



解：对AB杆分析，其只受2个力平衡，∴二力等大反向，且沿AB杆

设其大小F

对OA杆分析　∴ $F\cdot 0.4m\cdot \sin 30^\circ - M_1 = 0$

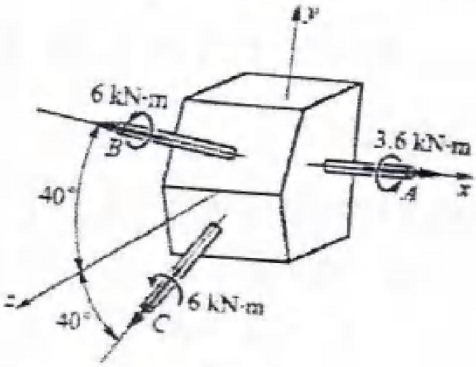
对 O_1B 杆分析　$M_2 - F\cdot 0.6m = 0$

解得：$F = 5N$

$M_2 = 3N\cdot m$

∴ M_2 大小为 $3N\cdot m$，AB所受力F为5N，且为拉力

七、齿轮箱有三个轴，其中 A 轴水平，B 轴和 C 轴位于 yz 铅垂平面内，轴上作用的力偶如图所示。试求合力偶。



解：由题意：三个力偶分别为：

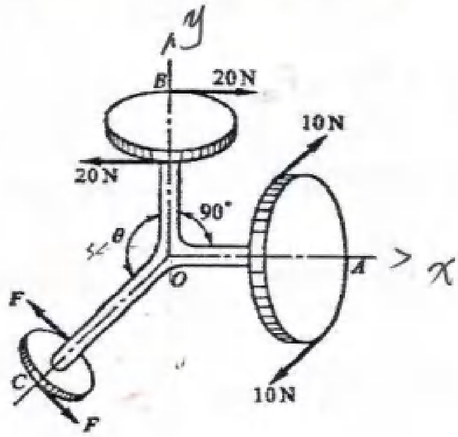
$\vec{M}_A = (3.6kN\cdot m, 0, 0)$

$\vec{M}_B = (0, 6kN\cdot m\cdot \sin 40°, 6kN\cdot m\cdot \cos 40°)$

$\vec{M}_C = (0, -6kN\cdot m\cdot \sin 40°, 6kN\cdot m\cdot \cos 40°)$

$\therefore \vec{M}_合 = (3.6kN\cdot m, 0, 12kN\cdot m\cdot \cos 40°)$

八、图示三圆盘 A、B 和 C 的半径分别为 150 mm、100 mm 和 50 mm。三轴 OA、OB 和 OC 在同一平面内，$\angle AOB$ 为直角。在这三圆盘上分别作用力偶，组成各力偶的力作用在轮缘上，它们的大小分别等于 10 N、20 N 和 F。如这三圆盘所构成的物系是自由的，不计物系重量，求能使此物系平衡的力 F 的大小和角 θ。



解：由题意：三个力偶分别为：

$\vec{M}_A = -10N\cdot 150\times 10^{-3}m\cdot 2\cdot \vec{i} = -3\vec{i}\ N\cdot m.$

$\vec{M}_B = -20N\cdot 100\times 10^{-3}m\cdot 2\cdot \vec{j} = -4\vec{j}\ N\cdot m$

$|\vec{M}_C| = 2F\cdot r_C\cdot 1$　设 $\vec{M}_C = x\vec{i} + y\vec{j}$

由题意：$\vec{M}_A + \vec{M}_B + \vec{M}_C = 0$

$\therefore x = 3N\cdot m$　$y = 4N\cdot m$

$\therefore \vec{M}_C = (3\vec{i} + 4\vec{j})N\cdot m$　　$\therefore 2F\cdot r_C = |\vec{M}_C| = 5N\cdot m$

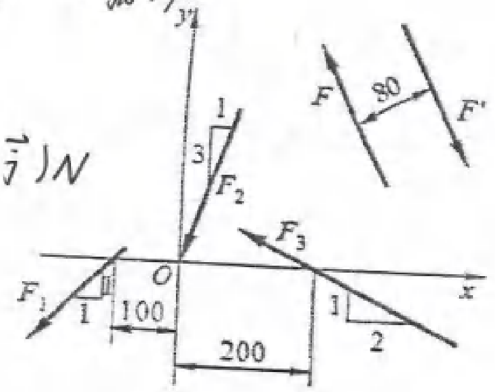
$\therefore F = 50N$　　$\theta = \arcsin\frac{3}{5}$

$\pi - \arctan\frac{3}{4}$

九、已知 $F_1 = 150$ N，$F_2 = 200$ N，$F_3 = 300$ N，$F = F' = 200$ N。求力系向点 O 的简化结果，并求力系合力的大小及其与原点 O 的距离 d。

解：由图：$\vec{F_1} = (-150\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - 150\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j})N$　$\vec{F_2} = (-200\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} - 200\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j})N$

$\vec{F_3} = (-300\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + 300\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j})N$



对O点简化：$\vec{F_合} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F} + \vec{F'} = (-437.64\vec{i} - 161.64\vec{j})N$

$\therefore |\vec{F_合}| = 466.54N$

又 $M_合 = -F\cdot 80m + F_3\cdot d_3 + F_1\cdot d_1$

$= 21439.42\ N\cdot m$

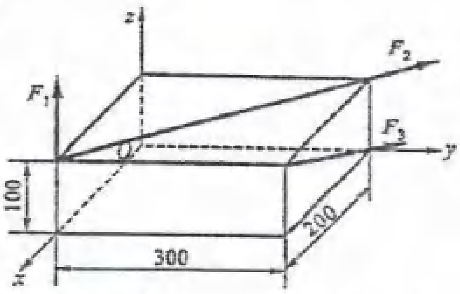
$\therefore$ 一个合力和一个力偶矩 简化为一个合力

其大小 $|\vec{F_合}| = 466.54$　与O点距离 $d = \frac{M_合}{|\vec{F_合}|} = 45.95m$

十、图示力系中，$F_1 = 100$ N、$F_2 = 300$ N、$F_3 = 200$ N，各力作用线的位置如图所示。试求力系向原点 O 简化的结果。

解：$\vec{F_1} = (0, 0, 100N)$　$\vec{F_2} = (-300\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}N, 300\frac{3}{\sqrt{13}}N, 0)$

$\vec{F_3} = (-200\frac{2}{\sqrt{5}}N, 0, -200\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}N)$



$\therefore \vec{F_合} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = (-345.30N, 249.61N, 10.56N)$

$|\vec{F_合}| = 426.20N$

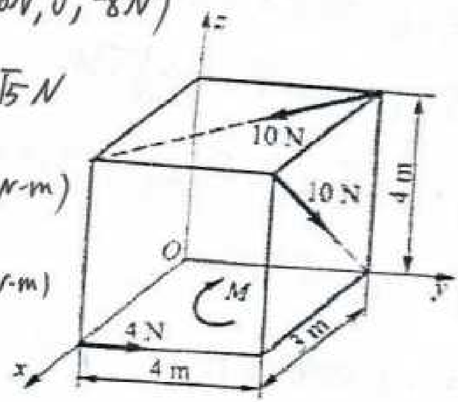
$M_合$　$\vec{M_{1o}} = (0, -2\times10^4 N\cdot m, 0)$　$\vec{M_{2o}} = (-\frac{9\times10^4}{\sqrt{13}}N\cdot m, -\frac{6\times10^4}{\sqrt{13}}N\cdot m, \frac{18\times10^4}{\sqrt{13}}N\cdot m)$

$\vec{M_{3o}} = (-\frac{6\times10^4}{\sqrt{5}}N\cdot m, 0, \frac{12\times10^4}{\sqrt{5}}N\cdot m)$

$\therefore \vec{M_O} = \vec{M_1} + \vec{M_2} + \vec{M_3} = (-5.18\times10^4 N\cdot m, -3.66\times10^4 N\cdot m, 10.36\times10^4 N\cdot m)$

$|\vec{M_O}| = 12.15\times10^4 N\cdot m$

十一、空间力系如图所示，其中力偶作用在 Oxy 平面内，力偶矩 $M = 24\ \mathrm{N\cdot m}$。试求此力系向点 O 简化的结果。



解：$\vec{F_1}=(0,4N,0)$ $\vec{F_2}=(6N,-8N,0)$ $\vec{F_3}=(-6N,0,-8N)$

$\vec{F_R}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=(0,-4N,-8N)$ $|\vec{F_R}|=4\sqrt{5}N$

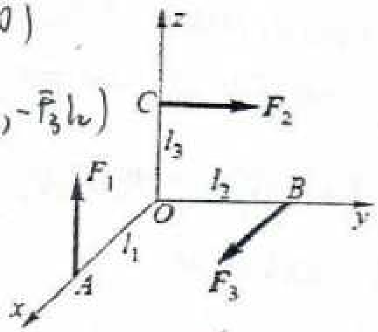
又 $\vec{M}_{1O}=(0,0,12N\cdot m)$ $\vec{M}_{2O}=(32N\cdot m,24N\cdot m,-24N\cdot m)$

$\vec{M}_{3O}=(-32N\cdot m,0,24N\cdot m)$ $\vec{M}=(0,0,-24N\cdot m)$

$\therefore \vec{M}_O=\vec{M}_1+\vec{M}_2+\vec{M}_3+\vec{M}=(0,24N\cdot m,-12N\cdot m)$

$|\vec{M}_O|=12\sqrt{5}N\cdot m$

十二、三个大小均为 F_0 的力分别与三轴平行，且在三个坐标平面内。试问 l_1、l_2 和 l_3 需满足何种关系，此力系才可简化为一合力。



解：$\because \vec{F_1}=(0,0,F_1)$ $\vec{F_2}=(0,F_2,0)$ $\vec{F_3}=(F_3,0,0)$

$\vec{M}_{1O}=(0,-F_1l_1,0)$ $\vec{M}_{2O}=(-F_2l_3,0,0)$ $\vec{M}_{3O}=(0,0,-F_3l_2)$

$\therefore \vec{F}_合=(F_3,F_2,F_1)$ $\vec{M}_O=(-F_2l_3,-F_1l_1,-F_3l_2)$

若可简化为合力 则 $\vec{F}_合\perp\vec{M}_O$

$\therefore -F_3\cdot F_2l_3-F_2F_1l_1-F_1F_3l_2=0$ $F_1=F_2=F_3=F_0$ $\therefore l_1+l_2+l_3=0$

$\therefore$满足 $l_1+l_2+l_3=0$ 此力系才可简化为一合力

4
阅
10.14

一、选择填空题

1 如平面力系平衡，则关于它的平衡方程，下列表述正确的是（ ④ ）。

① 任何平面力系都具有三个独立的平衡方程

② 任何平面力系只能列出三个平衡方程

③ 在平面一般力系的平衡方程基本形式中，两个投影轴必须互相垂直

④ 该平面力系在任意选取的投影轴上投影的代数和必为零

2 如图所示空间平行力系中，设各力作用线都平行于 Oz 轴，则此力系独立的平衡方程为（ ③ ）。

① $\sum M_x(F)=0$ $\quad\sum M_y(F)=0$ $\quad\sum M_z(F)=0$

② $\sum F_x=0$ $\quad\sum F_y=0$ $\quad\sum M_x(F)=0$

③ $\sum F_z=0$ $\quad\sum M_x(F)=0$ $\quad\sum M_y(F)=0$

④ $\sum F_x=0$ $\quad\sum F_y=0$ $\quad\sum F_z=0$

题 2 图

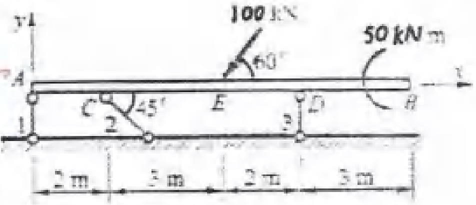
3 水平梁 AB 由三根直杆支承，载荷和尺寸如图。为了求出三根直杆的约束反力，可采用（ ① ）所示的平衡方程。

① $\sum M_A(F)=0$，$\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$

② $\sum M_A(F)=0$，$\sum M_C(F)=0$，$\sum F_y=0$

③ $\sum M_A(F)=0$，$\sum M_C(F)=0$，$\sum M_D(F)=0$

④ $\sum M_A(F)=0$，$\sum M_C(F)=0$，$\sum M_B(F)=0$

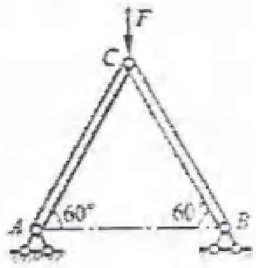


题 3 图

4 图示结构受力 F 作用，各杆重量不计，则支座 A 处约束力的大小为（ ④ ）。

① $\dfrac{F}{2}$ $\qquad$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}F$

③ F $\qquad$ ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}F$

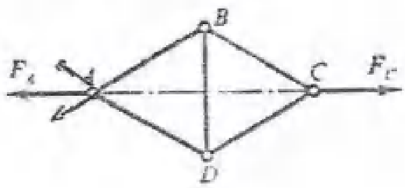


题 4 图

5 图示杆系结构由相同的细直杆铰接而成，各杆重量不计。若 $F_A=F_C=F$，且 F_A 和 F_C 垂直于 BD，则杆 BD 的内力为（ ③ ）。

① $-F$ $\qquad$ ② $-\sqrt{3}F$

③ $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}F$ $\qquad$ ④ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}F$



题 5 图

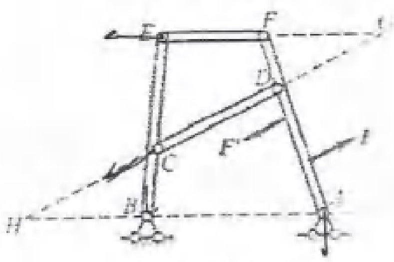
6 杆 AF、BE、CD 和 EF 相互铰接，A、B 处为固定铰支座，如图所示。在杆 AF 上作用一力偶（F，F'），若不计各杆自重，则支座 A 处约束力的作用线（ ② ）。

① 过 A 点平行于力 F

② 过 A 点平行于 BG 连线

③ 沿 AG 直线

④ 沿 AH 直线

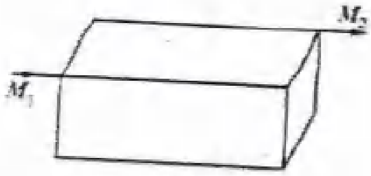


题 5 图

7 图示长方体为刚体，仅受二力偶作用，已知其力偶矩矢量满足 $M_1 = -M_2$。则该长方体（②）。

① 不平衡　　② 平衡

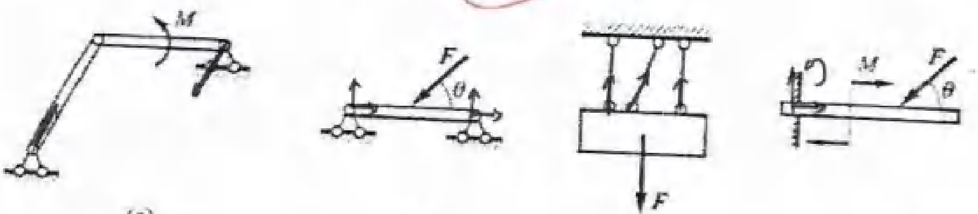
③ 平衡与否无法确定



题 7 图

8 图示结构中，静定结构是（①③④），超静定结构是（②）。

① 图（a）　② 图（b）　③ 图（c）　④ 图（d）



(a)　(b)　(c)　(d)

题 8 图

9 在刚体的两个点上各作用一个空间共点力系（即汇交力系），刚体处于平衡。利用刚体的平衡条件可以求出的未知量（即独立的平衡方程）个数最多为（③）。

①3 个　②4 个　③5 个　④6 个

10 平面一般力系平衡方程的二矩式应满足的附加条件是（所取两个矩心的连线不与投影轴垂直），平面一般力系平衡方程的三矩式应满足的附加条件是（所取三个矩心不共线）。

11 若空间力系各力作用线都平行于某一固定平面，则其最多的独立平衡方程有（5）个；若空间力系各力作用线都垂直于某一固定平面，则其最多的独立平衡方程有（3）个；若空间力系各力作用线分别在两个平行的固定平面内，则其最多的独立平衡方程有（5）个。

12 试写出各类力系所具有的最大的独立平衡方程数目。

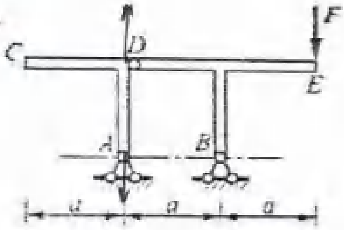
(1) 平面汇交力系（2）　(5) 空间汇交力系（3）

(2) 平面力偶系（1）　(6) 空间力偶系（3）

(3) 平面平行力系（2）　(7) 空间平行力系（3）

(4) 平面一般力系（3）　(8) 空间一般力系（6）

13 不计重量的直角杆 CDA 和 T 字形杆 DBE 在 D 处铰接，如图所示。若系统受力 F 作用，则支座 B 处约束力的大小为（2F），方向为（竖直向上）。

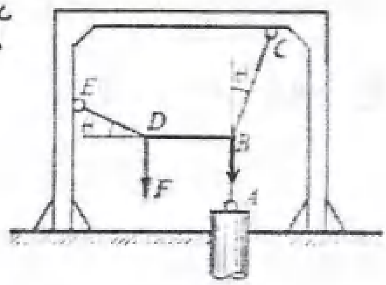


题 13 图

14 由 n 个刚体体组成的平衡系统，其中有 n_1 个刚体受到平面力偶系作用，n_2 个刚体受平面共点力系作用，n_3 个刚体受到平面平行力系作用，其余的刚体受平面一般力系作用，则该系统所能列出的独立平衡方程的最大总数是（ $n_1+2n_2+2n_3+3(n-n_1-n_2-n_3)$

$=3n-2n_1-n_2-n_3$

二、图示为一绳索拔桩装置。绳索的 E、C 两点拴在架子上，点 B 与拴在桩 A 上的绳索 AB 连接，在点 D 加一铅垂向下的力 F，AB 为铅垂，DB 为水平。已知 θ=0.1 rad，力 F = 800 N。试求绳 AB 中产生的拔桩力（当 θ 很小时， $\tan\theta\approx\theta$ ）。

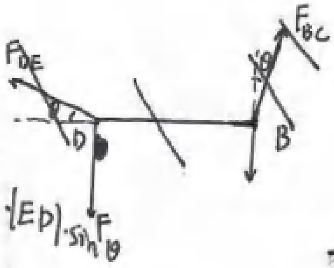


解：~~对绳索BD段研究~~

(1) 对绳索ED段研究

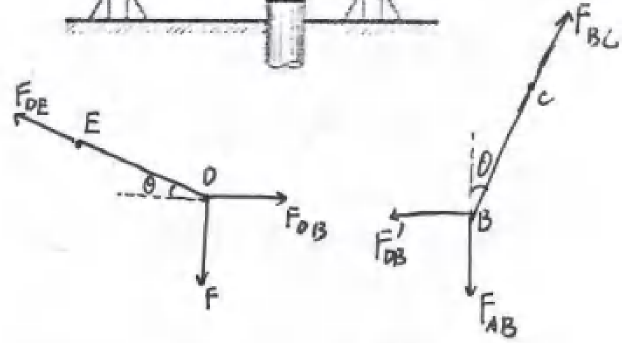
取E点为转轴心 $\therefore F\cdot|ED|\cdot\cos\theta = F_{DB}\cdot|ED|\cdot\sin\theta$

解得 $F_{DB} = \dfrac{F}{\tan\theta}$



(2) 对绳索CB段研究

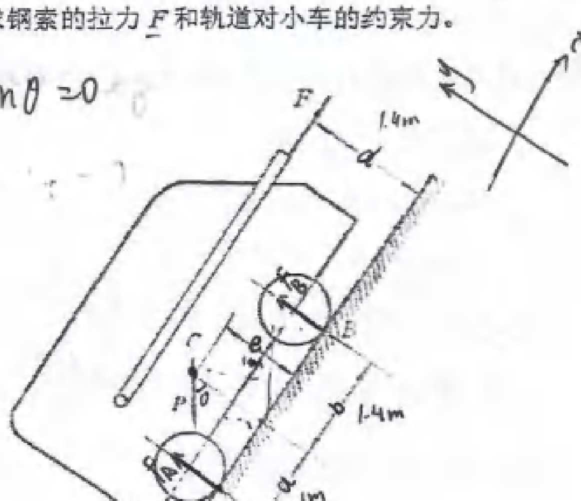
取C点为转心 $\therefore F_{AB}\cdot|BC|\cdot\sin\theta = F'_{DB}\cdot|BC|\cdot\cos\theta$



$\therefore F_{AB} = \dfrac{F'_{DB}}{\tan\theta} = \dfrac{F}{(\tan\theta)^2}$　由题知 $\theta \doteq 0.1 rad$

$\therefore F_{AB} \approx \dfrac{F}{\theta^2} = 100F = 8\times10^4 N$

三、高炉上料的小车如图所示，车和料共重 P = 240 kN，重心在点 C，已知：a = 1 m，b = 1.4 m，e = 1 m，d = 1.4 m，θ=55°，料车处于匀速运动状态。求钢索的拉力 F 和轨道对小车的约束力。



解：取如图所示坐标系 $\because \sum F_x = 0$ $\therefore F - P\cdot\sin\theta = 0$

又 $\sum F_y = 0$ $\therefore F_A + F_B - P\cdot\cos\theta = 0$

取C为转轴：$-F_A\cdot a + F_B\cdot b - F\cdot(d-e) = 0$

$\therefore$ 解得：$F = P\cdot\sin\theta = 196.6 kN$

$F_A = \dfrac{P(b\cos\theta - (d-e)\sin\theta)}{a+b} = 47.53 kN$

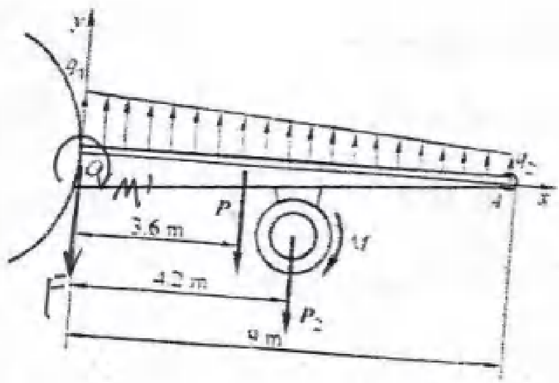
$F_B = \dfrac{P(a\cos\theta + (d-e)\sin\theta)}{a+b} = 90.12 kN$

四、如图所示，飞机机翼上安装一台发动机，作用在机翼 OA 上的气动力按梯形分布：$q_1 = 60$ kN/m，$q_2 = 40$ kN/m，机翼重 $P_1 = 45$ kN，发动机重 $P_2 = 20$ kN，发动机螺旋桨的反作用力偶矩 $M = 18$ kN·m。求机翼处于平衡状态时，机翼根部固定端 O 处所受的力。

解：由图，设 O处受力 F ∵ $\Sigma F_y = 0$

∴ $-F - P_1 - P_2 + q = 0$ $q = 460kN$

解得：$F = 385kN$



设 q 等效作用点距 O点 x

∴ $\int_0^9 (60 - \frac{20}{9}l)\cdot l \cdot dl = q \cdot x$ $x = 4.2m$

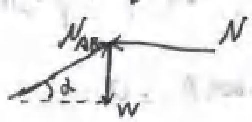
取 $x=4.2m$ 处为转轴 ∴ $-M' - M + F\cdot 4.2m + P_1 \cdot 0.6m = 0$ ∴ $M' = 1626kN\cdot m$

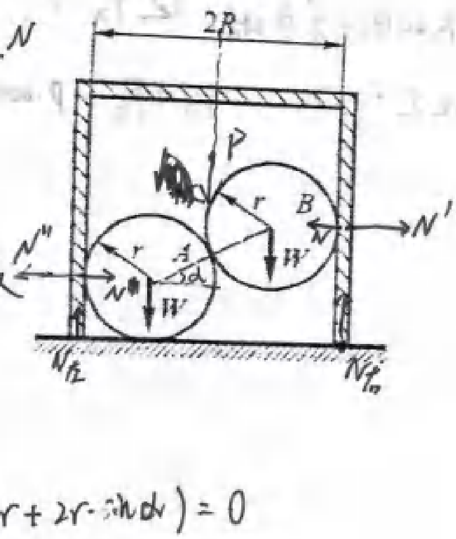
∴ O处所受力为一个向下的 $F = 385kN$ 和一个顺时针力偶 $M' = 1626kN\cdot m$

五、圆柱形的杯子倒扣着两个重球，每个球重为 W，半径为 r，杯子的半径为 R，$r < R < 2r$。若不计各接触面间的摩擦，试求杯子不致翻倒的最小杯重 $P_{\min}$。

解：设两小球连线与水平方向夹角 α ∴ $\cos\alpha = \frac{(R-r)}{r}$

对球B分析如图





∴ $\begin{cases} -N_{AB}\cdot\cos\alpha + N = 0 \\ N_{AB}\cdot\sin\alpha - W = 0 \end{cases}$

解得右杯壁对B球力 $N = W\cdot\cot\alpha$

对AB整体分析，左杯壁对A球弹力也为N，方向相反

∴两球对杯壁力大小也为 N

对杯分析，取右杯壁与桌面接触点为转轴

平衡临界状态：$N_左 = 0$ ∴ $P_{min}\cdot R + N''\cdot r - N'\cdot(r + 2r\cdot\sin\alpha) = 0$

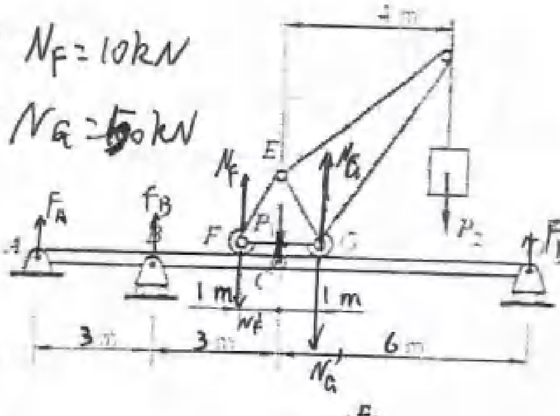
解得：$P_{min} = \frac{2r\cdot W\cdot\cos\alpha}{R} = \frac{2(R-r)}{R}\cdot W$

六、如图所示，组合梁由 AC 和 DC 两段铰接构成，起重机放在梁上。已知起重机重 $P_1 = 50\text{ kN}$，重心在铅直线 EC 上，起重载荷 $P_2 = 10\text{ kN}$。如不计梁重，求支座 A、B 和 D 三处的约束力。

解：对起重机分析：受力如图：

$\because \Sigma M_G=0 \quad \therefore P_1\cdot 1m - N_F\cdot 2m - P_2\cdot 3m = 0 \Rightarrow N_F = 10kN$

$\Sigma M_F=0 \quad N_G\cdot 2m - P_1\cdot 1m - P_2\cdot 5m = 0 \Rightarrow N_G = 50kN$

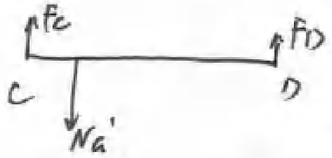


对梁分析：

$\Sigma F_y=0: F_A+F_B+F_D - N_F' - N_G' = 0 \quad (1)$

$\Sigma M_A=0: F_B\cdot 3m + F_D\cdot 12m - N_F'\cdot 5m - N_G'\cdot 7m = 0 \quad (2)$

$\cancel{\Sigma M_D=0 \quad N_F\cdot 1m + N_G\cdot 5m - F_A\cdot 12m - F_B\cdot 9m = 0}$



对CD杆分析：以C为转轴：$-N_G'\cdot 1m + F_D\cdot 6m = 0$

$\therefore F_D = \frac{25}{3}kN$ 代入(1),(2) 解得：$F_B = 100kN \quad F_A = -\frac{145}{3}kN$

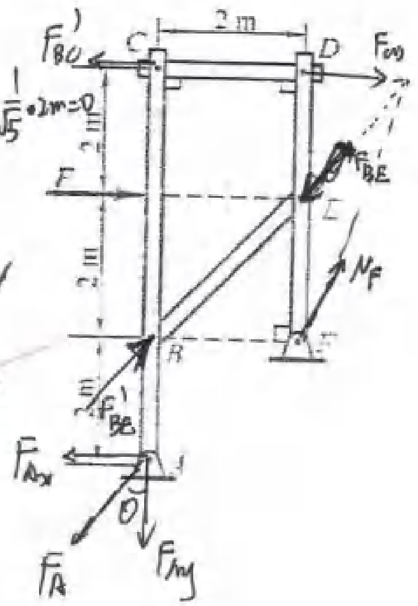
$\therefore$ A处约束力 $\frac{145}{3}kN$ 方向向下，B、D处为 $100kN$、$\frac{25}{3}kN$，方向向上

七、不计图示构架中各杆件重量，力 $F = 40\text{ kN}$，各尺寸如图，求铰链 A、B 和 C 处所受的力。

解：∵DEF杆只受三个力，由三力平衡汇交，得F处约束力方向

对构架整体分析，由 $\Sigma M_A=0$：$-F\cdot 4m + N_F\cdot\frac{2}{\sqrt5}\cdot 2m - N_F\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot 2m = 0$

解得：$N_F = 80\sqrt5 kN$



又 $\Sigma F_x=0 \quad \therefore F + N_F\cdot\frac{1}{\sqrt5} - F_{Ax} = 0 \quad \therefore F_{Ax} = 120kN$

$\Sigma F_y=0 \quad \therefore N_F\cdot\frac{2}{\sqrt5} - F_{Ay} = 0 \quad \therefore F_{Ay} = 160kN$

对杆ABC分析：$\Sigma F_y=0 \quad \therefore -F_{Ay} + F_{BE}'\cdot\frac{\sqrt2}{2} = 0$

$\therefore F_{BE}' = 160\sqrt2 kN$

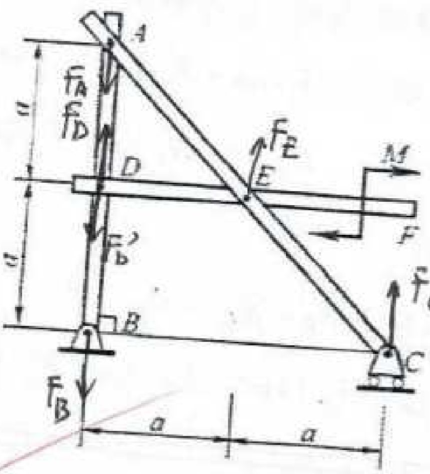
$\Sigma F_x=0 \quad F + F_{BE}'\cdot\frac{\sqrt2}{2} - F_{Ax} - F_{BC}' = 0 \quad \therefore F_{BC}' = 80kN$

$\therefore$ A处受力 $F_A = 200kN$ 与竖直方向夹角 θ：$\theta = \arctan\frac{3}{4}$

B处受力 $F_B = 160\sqrt2 kN$ 为沿BE杆压力

C处受力 $F_C = 80kN$ 为沿CD杆拉力

八、构架由杆 AB，AC 和 DF 铰接而成，如图所示，在 DEF 杆上作用一力偶矩为 M 的力偶，不计各杆的重量。求杆 AB 上铰链 A，D 和 B 所受的力。



解：对整体分析：$\because \Sigma F_x=0$ 可得如图受力图

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow -F_B+F_C=0 \Rightarrow F_B=F_C$

$\Sigma M_B=0$：$F_C\cdot 2a-M=0$ $\therefore F_C=\frac{M}{2a}$

$\therefore F_B=\frac{M}{2a}$

对杆 AB 分析 $\because$ D处受力过D点，B处受力过D点。

由三力平衡汇交定理，A处受力也过D

$\therefore$ AB杆上受力全部沿杆方向，设力 F_A，F_D

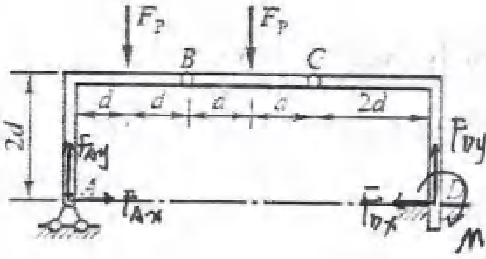
对杆DE分析：其受力 F_D'、F_E、力偶M $\because \Sigma M_E=0$ $\therefore F_D'\cdot a-M=0$ $\therefore F_D'=\frac{M}{a}$

再对AB杆分析 $\because \Sigma F_y=0$ $\therefore -F_A+F_D-F_B=0$

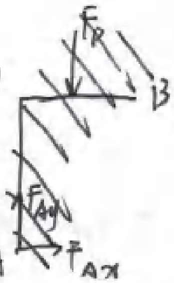
$\therefore F_A=\frac{M}{2a}$

$\therefore$A、D、B处受力：$F_A=\frac{M}{2a}$，$F_D=\frac{M}{a}$，$F_B=\frac{M}{2a}$ 方向如图

九、结构由 AB、BC 和 CD 三部分组成，所受载荷及尺寸如图所示。试求 A、B、C 和 D 处的约束力。



解：(1)对整体分析：受力如图



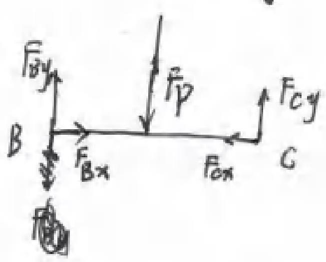
~~对AB杆分析：~~ $\Sigma F_x=0$：$F_{Ax}-F_{Dx}=0$

~~$\Sigma F_y=0$ ∴ $F_{Ay}+F_{Dy}-F_P-F_P=0$~~

$\Sigma M_A=0$：$F_{Dy}\cdot 6d-F_P\cdot d-F_P\cdot 3d-M=0$ ①

$\Sigma M_D=0$ $F_P\cdot 5d+F_P\cdot 3d-F_{Ay}\cdot 6d-M=0$ ②

(2)对 BC 杆分析： ∵ $\Sigma M_B=0$ ∴ $F_{Cy}\cdot 2d-F_P\cdot d=0$

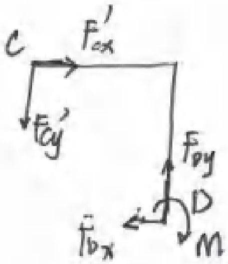


∴ $F_{Cy}=\frac{1}{2}F_P$

$\Sigma M_C=0$ ∴ $F_P\cdot d-F_{By}\cdot 2d=0$ ∴ $F_{By}=\frac{1}{2}F_P$

$\Sigma F_x=0$ ∴ $F_{Bx}-F_{Cx}=0$ ③

(3)对 CD 杆分析： ∵ $\Sigma F_y=0$ ∴ $-F_{Cy}'+F_{Dy}=0$ ∴ $F_{Dy}=F_{Cy}'=F_{Cy}=\frac{1}{2}F_P$



代入 ①： $M=-F_P\cdot d$

代入 ② ∴ $F_{Ay}=\frac{3}{2}F_P$

又 $\Sigma M_C=0$ ∴ $F_{Dy}\cdot 2d-F_{Dx}\cdot 2d-M=0$ ∴ $F_{Dx}=F_P$ ∴ $F_{Ax}=F_P$

$\Sigma F_x=0$ ∴ $F_{Cx}'-F_{Dx}=0$ ∴ $F_{Cx}'=F_P$ ∴ $F_{Cx}=F_P$

代入 ③ ∴ $F_{Bx}=F_P$

综上： A处受力 $F_A=\frac{\sqrt{13}}{2}F_P$ 作用线与x方向夹角 $\theta=\arctan\frac{3}{2}$ 为拆压力

B处受力 $F_B=\frac{\sqrt{5}}{2}F_P$ 作用线与x方向夹角 $\theta=\arctan\frac{1}{2}$ 为拆压力

C处受力 $F_C=\frac{\sqrt{5}}{2}F_P$ 作用线与x方向夹角 $\theta=-\arctan\frac{1}{2}$ 为拆压力

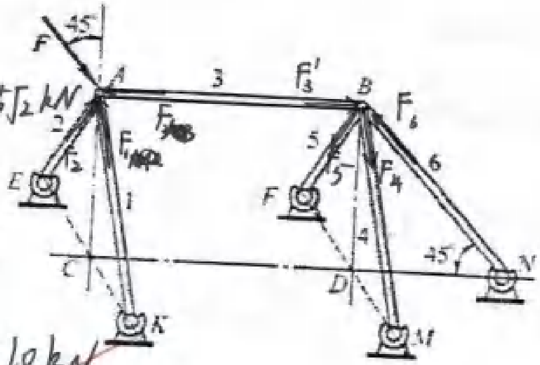
D处受力 $F_D=\frac{\sqrt{5}}{2}F_P$ 作用线与x方向夹角 $\theta=-\arctan\frac{1}{2}$ 为拆压力

以及力偶 $M=F_Pd$（逆时针）

十、图示空间桁架由六杆 1，2，3，4，5 和 6 构成。在节点 A 上作用一力 $\boldsymbol{F}$，此力在矩形 $ABDC$ 平面内，且与铅直线成 45°角。$\Delta EAK=\Delta FBM$。等腰三角形 EAK，FBM 和 NDB 在顶点 A，B 和 D 处均为直角，又 $EC=CK=FD=DM$。若 $F=10$ kN，求各杆的内力。

解：

所有杆均为二力杆，受力沿杆方向



对A节点分析：$\Sigma F_x=0$ ∴ $F\cdot\frac{\sqrt2}{2}-F_3=0$ ∴ $F_3=5\sqrt2\,kN$

$\Sigma F_y=0$：$F_1\cdot\frac{\sqrt2}{2}-F_2\cdot\frac{\sqrt2}{2}=0$ ∴ $F_1=F_2$

$\Sigma F_z=0$：$-F\cdot\frac{\sqrt2}{2}+F_1\frac{\sqrt2}{2}+F_2\cdot\frac{\sqrt2}{2}=0$ ∴ $F_1=F_2=\frac{F}{2}$

对B节点分析：$\Sigma F_x=0$ $F_3'-F_6\cdot\frac{\sqrt2}{2}=0$ ∴ $F_6=10\,kN$

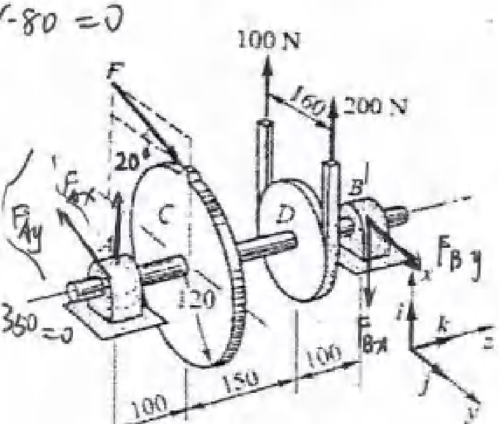
$\Sigma F_y=0$ $F_4\cdot\frac{\sqrt2}{2}-F_5\cdot\frac{\sqrt2}{2}=0$ ∴ $F_4=F_5$

$\Sigma F_z=0$ $F_6\cdot\frac{\sqrt2}{2}-F_4\cdot\frac{\sqrt2}{2}-F_5\cdot\frac{\sqrt2}{2}=0$ ∴ $F_4=F_5=\frac{F}{2}$

综上：$F_1=F_2=5kN$ 压力　$F_3=5\sqrt2\,kN$ 压力　$F_4=F_5=5kN$ 拉力　$F_6=\cancel{5\sqrt2}\,kN$ 压力 10 ?

十一、作用在齿轮上的啮合力 $\boldsymbol{F}$ 带动皮带绕水平轴 AB 作匀速转动。已知皮带紧边的拉力为 200 N，松边的拉力为 100 N，尺寸如图所示。试求力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和轴承 A、B 处的约束力。

解：以轴与盘为整体分析



$\Sigma M_z=0$ ∴ $F\cdot\cos20°\cdot120+100N\cdot80-200N\cdot80=0$

∴ $F=\frac{200}{3\cos20°}\approx70.9\,N$

$\Sigma F_x=0$ $100N+200N+F_{Ax}-F_{Bx}-F\cdot\sin20°=0$ ①

$\Sigma M_{Ay}=0$ ∴ $-F\cdot\sin20°\cdot100+100N\cdot250+200N\cdot250-F_{Bx}\cdot350=0$

解得 $F_{Bx}=207.4\,N$

代入① 解得 $F_{Ax}=-68.4\,N$

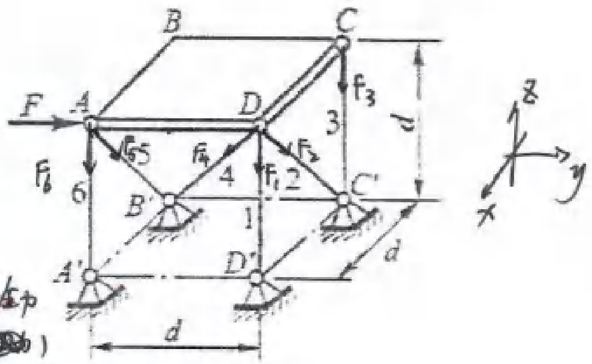
对 $\Sigma M_{Ax}=0$ $-F\cdot\cos20°\cdot100-F_{By}\cdot350=0$ ∴ $F_{By}=-19.0\,N$

对 $\Sigma F_y=0$ $F\cdot\cos20°+F_{By}-F_{Ay}=0$ ∴ $F_{Ay}=47.6\,N$

∴ $\vec{F}_A=(F_{Ax}\vec{i}-F_{Ay}\vec{j})=(-68.4\vec{i}-47.6\vec{j})N$

$\vec{F}_B=(-F_{Bx}\vec{i}+F_{By}\vec{j})=(-207.4\vec{i}-19.0\vec{j})N$

十二、正方形板 *ABCD* 由六根直杆支撑于水平位置，在点 *A* 沿 *AD* 方向作用一水平力 *F*，尺寸如图所示，不计板重和杆重。试求各杆的受力。



解：对板分析 $\because \Sigma M_{AD}=0 \quad \therefore F_3 \cdot d=0 \quad \therefore F_3=0$

又 $\Sigma M_{DD'}=0 \quad \therefore F_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot d=0 \quad \therefore F_5=0$

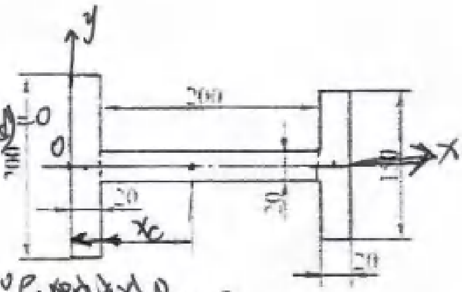
又 $\Sigma M_{DC}=0 \quad \therefore F_6 \cdot d=0 \quad \therefore F_6=0$

又 $\Sigma F_z=0 \quad \therefore F_1=0$

又 $\Sigma F_y=0 \quad \therefore F-F_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}=0 \quad \therefore F_4=\sqrt{3}F$ 为压力

又 $\Sigma F_x=0 \quad \therefore -F_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}-F_2\frac{1}{\sqrt{2}}=0 \quad \therefore F_2=-\sqrt{2}F$ 为拉力

十三、均质平板形状和尺寸如图所示，求此平板的重心。



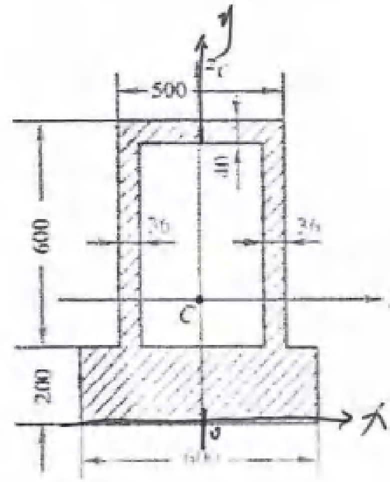
解：将板分割3块，以O为轴 $m_1g \cdot d_1+m_2g \cdot d_2+m_3g \cdot d_3=m_{总}g \cdot x_c$

设面密度为ρ $\therefore 4000\rho \cdot 10+4000\rho \cdot 120+3000\rho \cdot 220-11000\rho \cdot x_c=0$

$\therefore x_c=110$　　又由对称性，$y_c=0$

∴ 重心位置如图

十四、均质平板形状和尺寸如图所示，求此平板的重心。



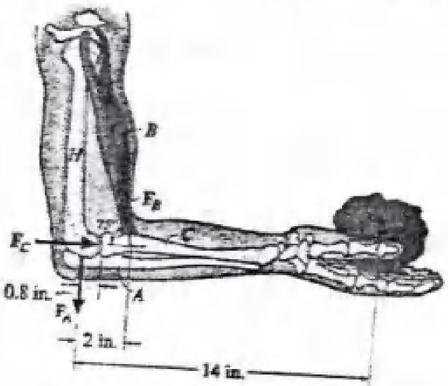
解：建立如图坐标系，由对称性 $x_c=0$

$200\times600 \cdot \rho \cdot 100+500 \cdot 600 \cdot \rho \cdot 500-428 \cdot 560 \cdot \rho \cdot 420$
$=(200\times600+500\times600-428\times560) \cdot \rho \cdot y_c$

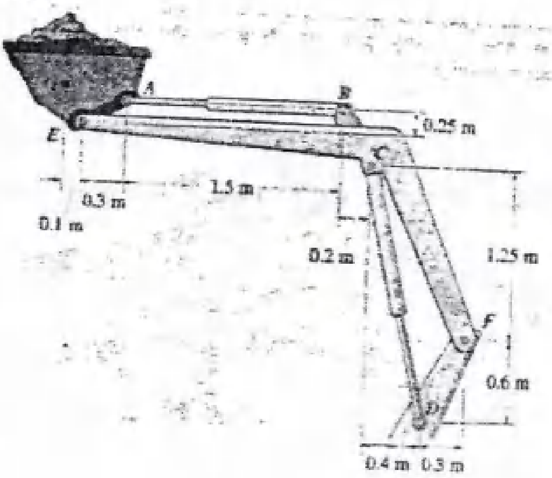
解得：$y_c=260.4$

4
阅
10.12

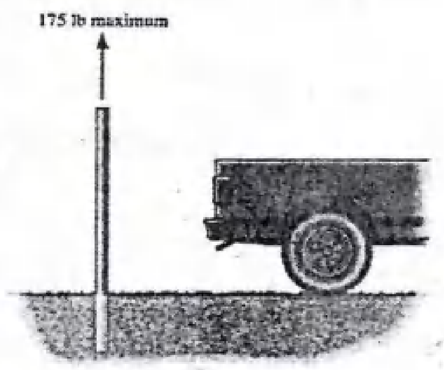
*十五、When holding the 5-lb stone in equilibrium, the humerus *H*, assumed to be smooth, exerts normal forces $\mathbf{F}_C$ and $\mathbf{F}_A$ on the radius *C* and ulna *A* as shown. Determine these forces and the force $\mathbf{F}_B$ that the biceps B exerts on the radius for equilibrium. The stone has a center of mass at *G*. Neglect the weight of the arm.



*十六、The tractor boom supports the uniform mass of 500 kg in the bucket which has a center of mass at *G*. Determine the force in each hydraulic cylinder *AB* and *CD* and the resultant force at pins *E* and *F*. The load is supported on each side of the tractor by a similar mechanism.



*十七、**DESIGN OF A FENCE-POST REMOVER:** A fammer wishes to remove several fence posts. Each post is buried 18 in. in the ground and will require a maximum vertical pulling force of 175 lb to remove it. He can use his truck to develop the force, but he needs to devise a method for their removal without breaking the posts. Design a method that can be used, considering that the only materials available are a strong rope and several pieces of wood having various sizes and lengths. Submit a sketch of your design and discuss the safety and reliability of its use. Also, provide a force analysis to show how it works and why it cause minimal damage to a post when it is removed.

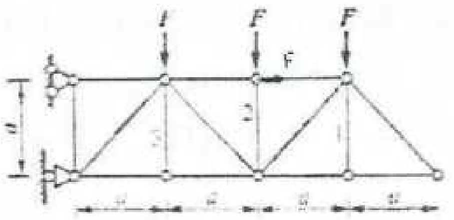


一、选择填空题

1 桁架受到大小均为 F 的三个力的作用，如图所示。则杆 1 内力的大小为（ ③ ）；杆 2 内力的大小为（ ① ）；杆 3 内力的大小为（ ③ ）。

① F ② $\sqrt{2}F$

③ 0 ④ $F/2$



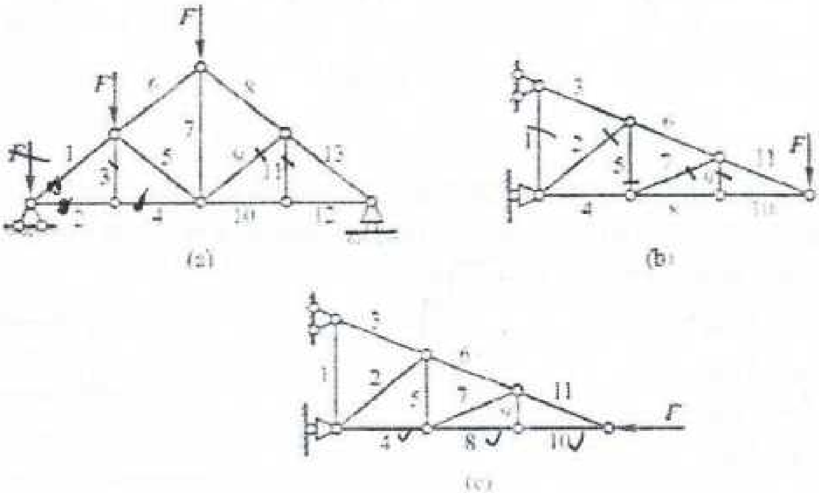
题 1 图

2 不经计算，试判断图示各桁架中的零力杆。

图（a）中的（ 3 9 11 ）号杆是零力杆；

图（b）中的（ 1 2 5 7 9 ）号杆是零力杆；

图（c）中的（ 1 2 3 5 6 7 9 11 ）号杆是零力杆。



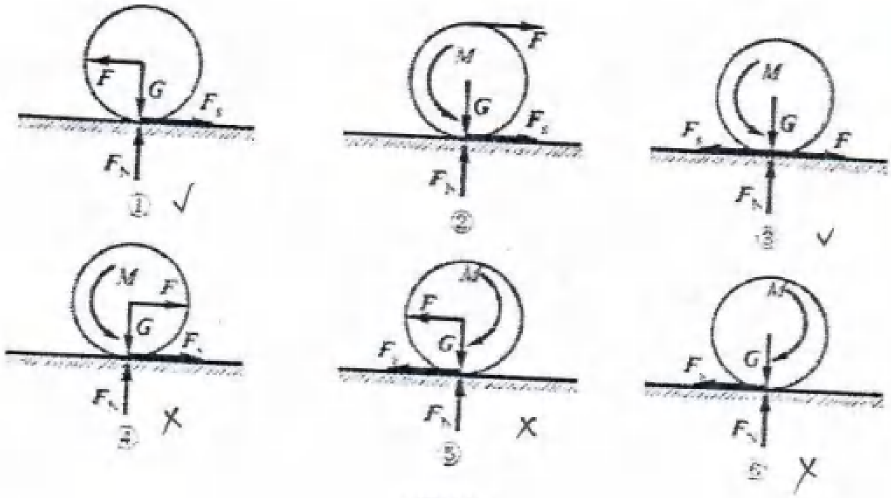
题 2 图

3 物块的重量为 G，置于倾角为 30°的粗糙斜面上，如图所示。物块上作用一力 F，斜面与物块间的摩擦角为 $\varphi_m = 25°$。物块能平衡的情况是（ ② ）。

① $F=0$ ② F 水平向右，且 $F=G$ ③ F 沿斜面向上，且 $F=G$

题 3 图

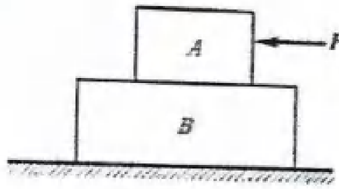
4　一均质圆盘重量为 G，半径为 R，置于粗糙的水平面上，如图所示。已知 $M = FR$，在不计滚动阻力偶的情况下，受力分析如下（圆盘并不一定处于平衡）。其中摩擦力 F_s 的方向正确的是 ① ③



题 4 图

5　如图所示，重量分别为 G_A 和 G_B 的物体重叠地放置在粗糙的水平面上，水平力 F_P 作用于物体 A 上，设 A、B 间的摩擦力的最大值为 $F_{A\max}$，B 与水平面间的摩擦力的最大值为 $F_{B\max}$，若 A、B 能各自保持平衡，则各力之间的关系为（ ② ）。

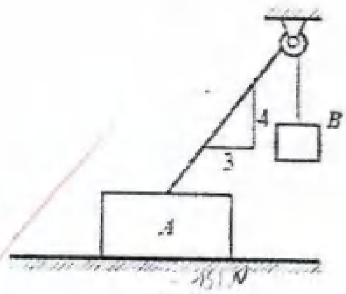
① $F_P > F_{A\max} > F_{B\max}$
② $F_P < F_{A\max} < F_{B\max}$
③ $F_{B\max} > F_P > F_{A\max}$
④ $F_{B\max} < F_P < F_{A\max}$



题 5 图

6　如图所示，物体 A 重为 100 kN，物体 B 重为 25 kN，A 与地面间的静摩擦因数为 0.2，滑轮处摩擦不计。则物体 A 与地面间的摩擦力的大小为（ ③ ）。

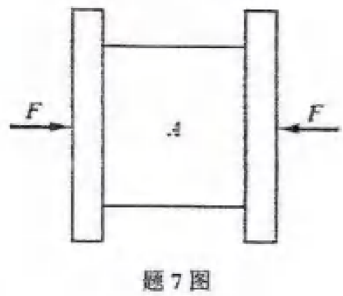
① 20 kN
② 16 kN
③ 15 kN
④ 12 kN



题 6 图

7　如图所示，当左右两木板所受的压力均为 F 时，物体 A 夹在木板中间静止不动。若两木板所受压力的增加到各为 $2F$，则物体 A 所受到的摩擦力为（ ① ）。

① 与原来相等
② 是原来的 2 倍
③ 是原来的 4 倍



题 7 图

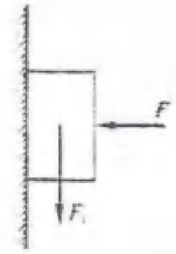
8 如图所示，已知物块重量为 $F_P = 100$ N，用力 $F = 500$ N 的压力压在一铅直面上，物块与墙面间的静摩擦因数 $f_s = 0.3$，则物块受到的摩擦力大小为（ ② ）。

① 150 N

② 100 N

③ 500 N

④ 30 N



题 8 图

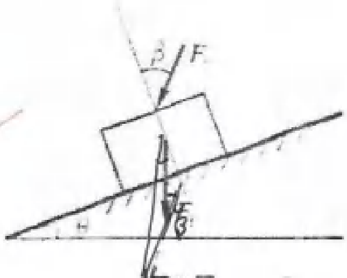
9 一物块重量为 F_P，放在倾角为 θ 的斜面上，如图所示，斜面与物块间的摩擦角为 φ_m，且 $\varphi_m > \theta$。今在物块上作用一大小也等于 F_P 的力，则物块能在斜面上保持平衡时力 F_P 与斜面法线间的夹角 β 的最大值应为（ ④ ）。

① $\beta_{max} = \varphi_m$

② $\beta_{max} = \theta$

③ $\beta_{max} = \varphi_m - \theta$

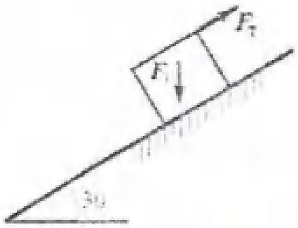
④ $\beta_{max} = 2\varphi_m - \theta$



题 9 图

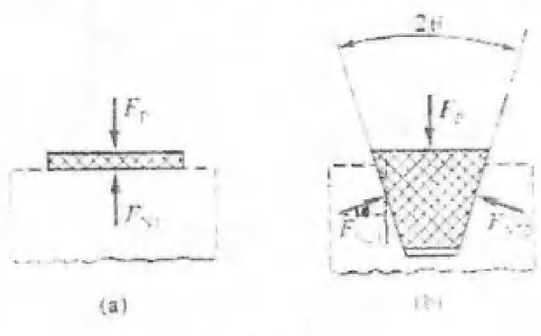
$2(\varphi-\theta)+\theta$

10 均质立方体重 F_P，置于倾角为 30°的斜面上，如图所示，物体与斜面间的静摩擦因数 $f_s = 0.25$。开始时在拉力 F_T 作用下物体静止不动，然后逐渐增大力 F_T，则物体先发生（ 翻动 ）（滑动或翻动）；又，物体在斜面上保持平衡静止时，F_T 的最大值为（ $\frac{\sqrt{3}+1}{4}F_p$ ）。



题 10 图

11 试比较用同样材料制作、在相同的粗糙度和相同的皮带压力 F_P 作用下，平皮带与三角皮带的最大静摩擦力。由图(a)和图(b)，根据平面力系的平衡方程，可得 F_{N1}=（ F_p ），$F_{N21}=F_{N22}$=（ $\frac{F_p}{2\sin\theta}$ ）。设接触面间的静摩擦因数为 f_s，则平皮带的最大静滑动摩擦力 F_{1m}=（ $f_s \cdot F_p$ ），三角皮带的最大静滑动摩擦力 F_{2m}=（ $\frac{f_s \cdot F_p}{\sin\theta}$ ），故 F_{1m}（ $\le$ ）F_{2m} （比较 F_{1m} 与 F_{2m} 的大小）。



题 11 图

二、平面桁架所受的载荷和尺寸如图，已知长度 l 以及 $F_1=F$，$F_2=2F$。试求各杆的内力。

解：对整体分析：以 A 为转轴 $\Sigma M_A=0$ $\therefore F_1\cdot l - F_D\cdot l = 0$

$\therefore F_D = F_1 = F$

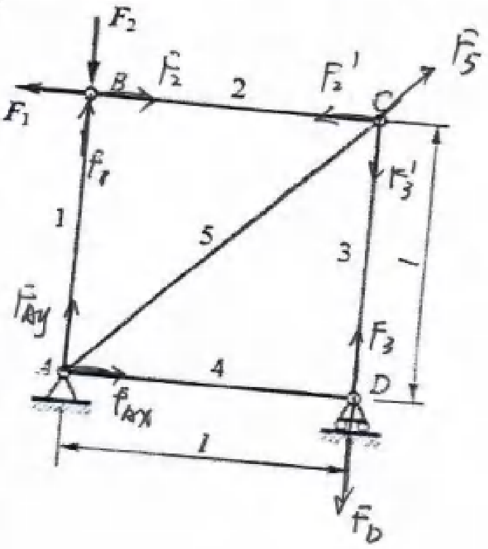
又 $\Sigma F_y=0$ $\therefore -F_2 + F_{Ay} - F_D = 0$ $\therefore F_{Ay} = 3F$

$\Sigma F_x = 0$ $-F_1 + F_{Ax} = 0$ $\therefore F_{Ax} = F$

对D点分析 $\therefore F_4 = 0$ $F_3 = F$（拉力）

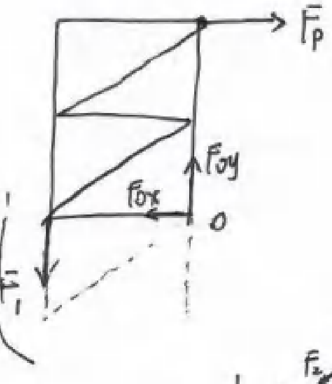
对B点分析 $\therefore F_1 = 2F$（压力） $F_2 = F$（拉力）

对C点分析 $\therefore F_5 = \sqrt{2}F$（压力）



三、塔式桁架如图所示，已知载荷 F_P 和尺寸 d，l。试求杆 1，2 和 3 的内力。

解：对如图部分分析：

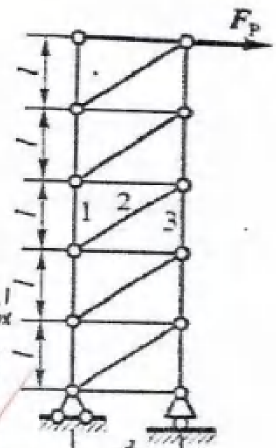


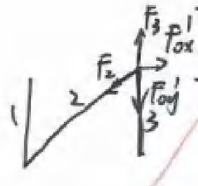
$\therefore \Sigma M_O=0$ $\therefore F_1\cdot d - F_P\cdot 2l = 0$

$\therefore F_1 = \frac{2l}{d} F_P$

$\Sigma F_x = 0$ $\therefore -F_{0x} + F_P = 0$ $\therefore F_{0x} = F_P$

$\Sigma F_y = 0$ $\therefore -F_1 + F_{0y} = 0$ $\therefore F_{0y} = \frac{2l}{d} F_P$





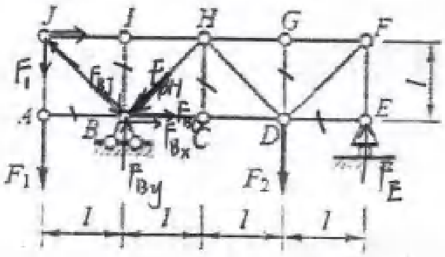
对下部分分析，对于O点分析

$\Sigma F_{0x}=0$ $\therefore -F_2\cdot\frac{d}{\sqrt{l^2+d^2}} + F_{0x}' = 0$ $\therefore F_2 = \frac{\sqrt{l^2+d^2}}{d} F_P$

$\Sigma F_{0y}=0$ $F_3 - F_{0y}' - F_2\cdot\frac{l}{\sqrt{l^2+d^2}} = 0$ $\therefore F_3 = \frac{3l}{d} F_P$

综上 $F_1 = \frac{2l}{d} F_P$（拉力） $F_2 = \frac{\sqrt{l^2+d^2}}{d} F_P$（拉力） $F_3 = \frac{3l}{d} F_P$（压力）

四、平面桁架所受的载荷和尺寸如图，已知 $l = 5$ m，$F_1 = 40$ kN，$F_2 = 60$ kN。试求杆 BH，CD 和 GD 的内力。



解：分析可得：$F_{AB} = F_{BI} = F_{HC} = F_{DE} = 0$

$F_{GD} = 0$

对 A 点分析：$F_{AJ} = F_1$

对 J 点分析：$F_{BJ} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = F_{AJ}$ $\therefore F_{BJ} = \sqrt{2} F_1$

~~对 B 点分析~~ 对整体分析：$\because \Sigma M_E = 0$ $\therefore$ $F_1 \cdot 4l + F_2 \cdot l - F_{By} \cdot 3l = 0$

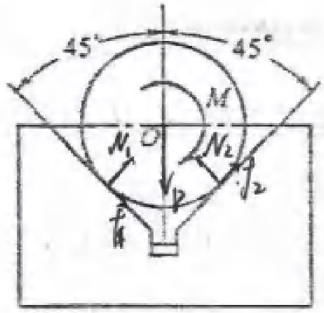
$\therefore F_{By} = \frac{220}{3}$ kN 又 $\Sigma F_x = 0$ $\therefore F_{Bx} = 0$

对 B 点分析 $\Sigma F_y = 0$ $\therefore F_{By} - F_{BJ} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{BH} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ $\therefore F_{BH} = \frac{100\sqrt{2}}{3}$ kN（受压）

$\Sigma F_x = 0$ $\therefore F_{BC} + F_{BJ} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{BH} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ $\therefore F_{BC} = -\frac{20}{3}$ kN

对 C 点分析：$F_{CD} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$ kN（受压） $F_{CD} = F_{BC} = \frac{20}{3}$ kN（受压）

五、如图所示，置于 V 形槽中的棒料上作用一力偶，力偶的矩 $M = 15$ N·m 时，刚好能转动此棒料。已知棒料重 $P = 400$ N，直径 $D = 0.25$ m，不计滚动阻力偶。试求棒料与 V 形槽间的静摩擦因数 f_s。



解：刚好滚动时，摩擦力恰为最大静摩擦力

$\Sigma M_O = 0$ $\therefore f_1 \cdot \frac{D}{2} + f_2 \cdot \frac{D}{2} - M = 0$

$\Sigma F_x = 0$ $N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + f_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + f_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\Sigma F_y = 0$ $N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - f_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + f_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0$

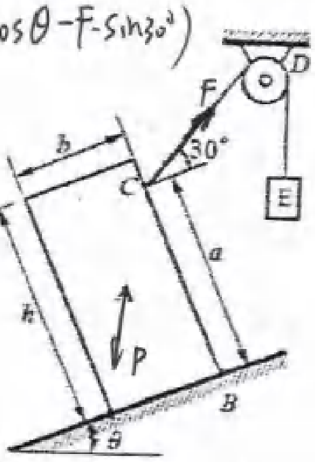
$f_1 = f_s N_1$，$f_2 = f_s N_2$

解得：$2M f_s^2 - \sqrt{2} P D f_s + 2M = 0$ 解得：$f_s = 0.223$ 或 $f_s = 4.49$

$\because$ 若 $f_s = 4.49$ 时 N_1 为负值 舍去

$\therefore f_s = 0.223$

六、均质箱体 A 的宽度 $b=1$ m，高 $h=2$ m，重 $P=200$ kN，放在倾角 $\theta=20°$ 的斜面上。箱体与斜面之间的摩擦因数 $f_s=0.2$。今在箱体的 C 点系一无重软绳，绳的另一端绕过定滑轮 D 挂一重物 E，如图所示。已知 $BC=a=1.8$ m。求使箱体处于平衡状态的重物 E 的重量。



解：(1) 若刚好不滑：$P\cdot\sin\theta - F\cdot\cos30° - f = 0$　　$f=f_s(P\cdot\cos\theta - F\cdot\sin30°)$

解得：$F=40.2\,kN$　　$\therefore F\geq 40.2\,kN$

(2) 若刚好上滑：$P\cdot\sin\theta + f - F\cdot\cos30° = 0$

解得：$F=109.7\,kN$　　$F\leq 109.7\,kN$

(3) 若刚好不翻，以下端为转轴：

$P\cdot\sin\theta\cdot\frac{h}{2} + F\cdot\sin30°\cdot b - P\cdot\cos\theta\cdot\frac{b}{2} - F\cdot\cos30°\cdot a = 0$

$\therefore F = -24.1\,kN$　　$F\geq -24.1\,kN$

(4) 若刚好上翻，以上端点 B 为转轴

$P\cdot\cos\theta\cdot\frac{b}{2} - P\cdot\sin\theta\cdot\frac{h}{2} - F\cdot\cos30°\cdot a = 0$　　$\therefore F=104.2\,kN$　　$\therefore F\leq 104.2\,kN$

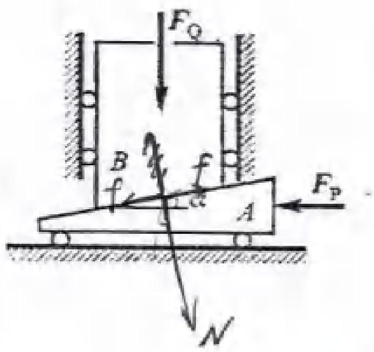
综上，若箱体稳定，则 $40.2\,kN\leq F\leq 104.2\,kN$　　即 $40.2\,kN\leq P_E\leq 104.2\,kN$

七、尖劈起重装置如图所示，尖劈 A 的顶角为α，B 块上受力 $\boldsymbol{F}_Q$ 的作用。A 块与 B 块之间的静摩擦因数为 f_s（有滚珠处摩擦忽略不计）。如不计 A 块和 B 块的重量，试求保持平衡时主动力 $\boldsymbol{F}_P$ 的范围。

解：~~设接触面间压力~~ N：

~~对B块分析 $\therefore N\cdot\cos\alpha = F_Q$　$\therefore N=\frac{F_Q}{\cos\alpha}$~~

~~对A分析~~



(1) F_P最大时，对A摩擦力向左

对A　$\because \Sigma F_x=0$　$\therefore N\cdot\sin\alpha + f\cdot\cos\alpha - F_P = 0$

~~$\therefore F_P = \frac{F_Q}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha + f_s F_Q$~~

对B：$\Sigma F_y=0$　$N\cdot\cos\alpha - f\cdot\sin\alpha - F_Q = 0$

$\therefore F_P = \frac{\sin\alpha + f_s\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha - f_s\cdot\sin\alpha}\cdot F_Q$

(2) F_P最小时，对A摩擦力向右.

对A：$\Sigma F_x=0$　$N\cdot\sin\alpha - f\cdot\cos\alpha - F_P = 0$

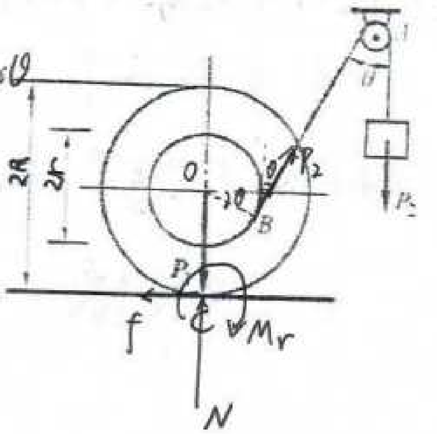
对B：$\Sigma F_y=0$　$N\cdot\cos\alpha + f\cdot\sin\alpha - F_Q = 0$

$\therefore F_P = \frac{\sin\alpha - f_s\cos\alpha}{\cos\alpha + f_s\cdot\sin\alpha}\cdot F_Q$

综上，$\frac{\sin\alpha - f_s\cos\alpha}{\cos\alpha + f_s\cdot\sin\alpha}\cdot F_Q \leq F_P \leq \frac{\sin\alpha + f_s\cos\alpha}{\cos\alpha - f_s\cdot\sin\alpha}\cdot F_Q$

八、一半径为 R、重为 P_1 的轮静止在水平面上，如图所示。在轮上半径为 r 的轴上绕有细绳，此细绳跨过定滑轮 A，在端部系有一重为 P_2 的物体。绳的 AB 部分与铅直线成 θ 角。求轮与水平面接触点 C 处的滚动摩擦阻力偶矩、滑动摩擦力和法向约束力。

解：对轮分析如图：



$\Sigma F_y=0$: $P_2\cdot\cos\theta+N-P_1=0 \Rightarrow N=P_1-P_2\cdot\cos\theta$

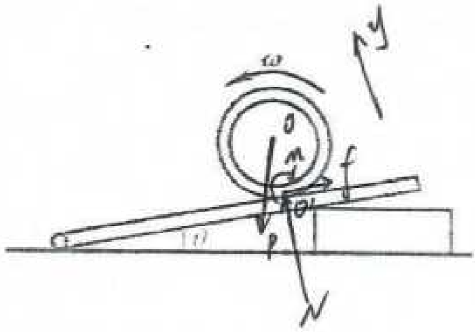
$\Sigma F_x=0$ $P_2\cdot\sin\theta-f=0 \Rightarrow f=P_2\cdot\sin\theta$

$\Sigma M_O=0$ $P_2\cdot r-f\cdot R-M_r=0$

$\Rightarrow M_r=P_2(r-\sin\theta\cdot R)$

九、如图所示，钢管车间的钢管运转台架，依靠钢管自重缓慢无滑动地滚下，钢管直径为 50 mm。设钢管与台架间的滚动摩阻系数 $\delta=0.5$ mm。试确定台架的最小倾角 θ 应为多大？

解：对钢管分析：



若刚好滚下：$\Sigma M_{O'}=0$

$\therefore P\cdot\sin\theta\cdot R-M=0$ $\because M=\delta\cdot N$

$\Sigma F_y=0$ $-P\cdot\cos\theta+N=0$

$\therefore$ $P\cdot\sin\theta\cdot R-\delta\cdot P\cdot\cos\theta=0$

$\therefore$ $\theta=\arctan\frac{\delta}{R}=\arctan 0.02=1.15^\circ$

4

阅

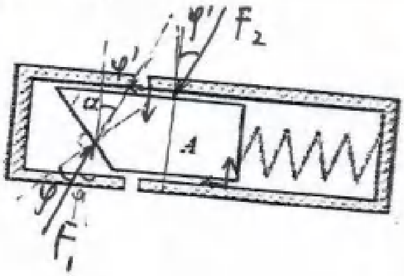
10,21

*十、如图所示为碰头式门锁机构，依靠滑块 A 的出入可开门和锁门。已知滑块 A 与各接触面的摩擦因数均为 f_s，求滑块 A 不自锁的条件。(选自《力学与实践》，No.3，1987)

解：锁门时，边缘对滑块斜边加力并同时滑动

如图 $\varphi = \arctan f_s$ 又 F_2 与 F_1 作用线同向

若不自锁 则 $\varphi' > \varphi$ ∵ $\alpha = \varphi + \varphi'$

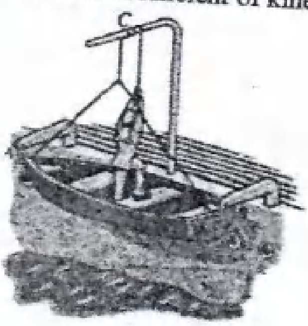


∴ $\alpha > 2\varphi = 2\arctan f_s$

∴

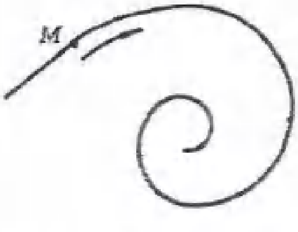
*十一、The boat has a weight of 500 lb and is held in position off the side of a ship by the spars A and B. A man having a weight of 130 lb gets in the boat, wraps a rope around an overhead boom at C, and ties it to the end of the boat as shown. If the boat is disconnected from the spars, determine the minimum number of half turns the rope must make around the boom so that the boat can be safely lowered into the water at constant velocity. Also, what is the normal force between the boat and the man? The coefficient of kinetic friction between the rope and the boom is $f_s = 0.15$.

Hint: The problem requires that the normal force between the man's feet and the boat be as small as possible.



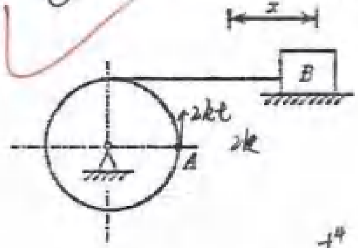
一、概念题

1. 点以匀速率沿阿基米德螺线由外向内运动，如图所示，则点的加速度（ ③ ）。



① 不能确定
② 越来越小
③ 越来越大
④ 等于零

2. 绳子的一端绕在滑轮上，另一端与置于水平面上的物块 B 相连，若物块 B 的运动方程为 $x=kt^2$，其中 k 为常数，轮子半径为 R，则轮缘上 A 点的加速度的大小为（ ③ ）。 kt^2



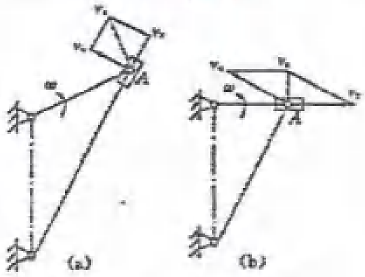
① $2k$
② $(4k^2t^2/R^2)^{\frac{1}{2}}$
③ $(4k^2+16k^4t^4/R^2)^{\frac{1}{2}}$
④ $2k+4k^2t^2/R$

$\frac{t^4}{3}$

3. 动点由静止开始作平面曲线运动，设每一瞬时的切向加速度 $a_\tau=2t\ \mathrm{m/s^2}$，法向加速度 $a_n=t^4/3\ \mathrm{m/s^2}$，则该动点的运动轨迹为（ 半径为3m的圆 ）。 $v=t^2$

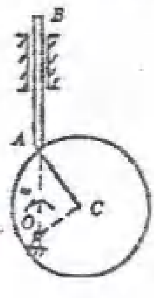
4. 动点 M 在空间作螺旋运动，其运动方程 $x=2\cos t$，$y=2\sin t$，$z=2t$，其中 x、y、z 以 m 计，t 以 s 计。则点 M 的切向加速度大小 a_τ =（ 0 ），法向加速度大小 a_n =（ $2\,\mathrm{m/s^2}$ ），轨迹曲率半径 ρ =（ 4m ）。

5. 两曲柄摇杆机构分别如图（a）、（b）所示。取套筒 A 为动点，则动点 A 的速度平行四边形（ ② ）。



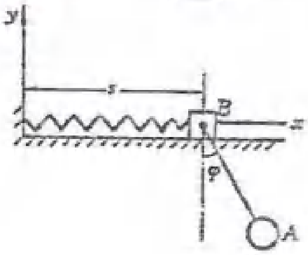
① 图（a）、（b）所示的都正确
② 图（a）所示的正确，图（b）所示的不正确
③ 图（a）所示的不正确，图（b）所示的正确
④ 图（a）、（b）所示的都不正确

6. 图示偏心凸轮如以匀角速度 ω 绕水平轴 O 逆时针转动，从而推动顶杆 AB 沿铅直槽上下移动，AB 杆的延长线通过 O 点。若取凸轮中心 C 为动点，动系与顶杆 AB 固连，则动点 C 的相对运动轨迹为（ ③ ）。



① 铅直直线
② 以 O 点为圆心的圆周
③ 以 A 点为圆心的圆周
④ 无法直接确定

7. 在图示机构中，已知 $s=a+b\sin\omega t$，且 $\varphi=\omega t$（其中 a、b、ω 均为常数），杆长为 L，若取小球 A 为动点，动系固连于物块 B，定系固连于地面，则小球 A 的牵连速度 v_e 的大小为（ ② ）；相对速度 v_r 的大小为（ ① ）。

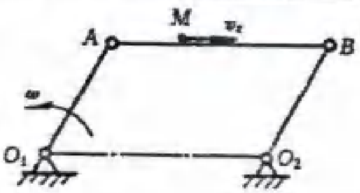


① $L\omega$　　② $b\omega\cos\omega t$
③ $b\omega\cos\omega t+L\omega\cos\omega t$
④ $b\omega\cos\omega t+L\omega$

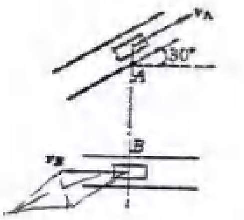
8．平行四边形机构如图。曲柄 O_1A 以匀角速度 ω 绕轴 O_1 转动。动点 M 沿 AB 杆运动的相对速度为 v_r。若将动坐标系固连于 AB 杆，则动点的科氏加速度的大小为（ ③ ）。

① ωv_r　　② $2\omega v_r$

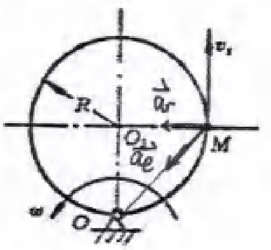
③ 0　　④ $4\omega v_r$



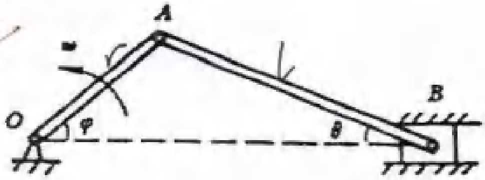
9．在如图所示的公路上行驶的两车的速度均为 20 m/s，图示瞬时，在 A 车中的观察者看来，B 车的速度大小应为（38.64m/s）。



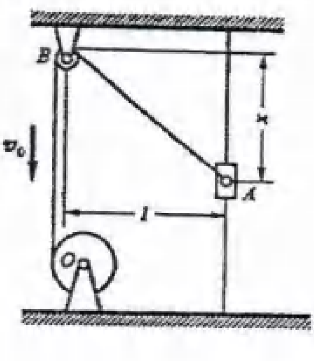
10．半径为 R 的圆盘，以匀角速度 ω 绕 O 轴转动，如图所示。动点 M 相对圆盘以匀速率 $v_r = R\omega$ 沿圆盘边缘运动。设将动坐标系固连于圆盘，则在图示位置时，动点的牵连加速度的大小等于（$\sqrt{2}\omega^2 R$）。动点的相对加速度的大小等于（$\omega^2 R$）。(在图上画出各量的方向)



11．图示曲柄连杆机构中，已知曲柄的长 $OA = r$，连杆长 $AB = l$，曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕轴 O 逆时针转动，图示瞬时夹角 φ 与 θ 均已知，若选滑块 B 为动点，动系与曲柄 OA 固连，定系与机座固连，则动点 B 的牵连速度大小为（$\omega(r\cdot\cos\varphi+l\cdot\cos\theta)$），方向为（垂直OB向上）；牵连加速度大小为（$\omega^2(r\cos\varphi+l\cdot\cos\theta)$），方向为（由B指向O）。



二、套管 A 由绕过定滑轮 B 的绳索牵引而沿导轨上升，滑轮中心到导轨的距离 l，如图所示。设绳索以等速 v_0 拉下，忽略滑轮尺寸，求套管 A 的速度和加速度与距离 x 的关系式。



解：距离为x时　$AB=\sqrt{l^2+x^2}$

$$V_0=\frac{d(AB)}{dt}=\frac{d(\sqrt{l^2+x^2})}{dt}=\frac{d\sqrt{l^2+x^2}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore V_A=\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{l^2+x^2}}{x}\cdot V_0$$

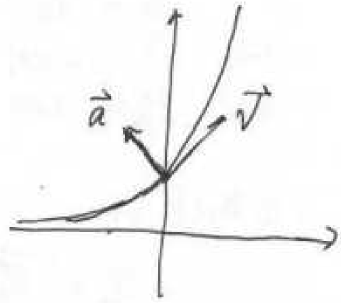
$$\therefore a_A=\frac{dV_A}{dt}=\frac{-l^2\cdot V_0}{x^2\sqrt{l^2+x^2}}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{-l^2}{x^3}V_0^2$$

三、点沿平面曲线轨迹 $y = e^x$ 向 x、y 增大的方向运动，其中 x、y 的单位皆为 m，速度大小为常量 $v = 12\text{m/s}$。求动点经过 $y = 1\text{m}$ 处时，其速度和加速度在坐标轴上的投影。

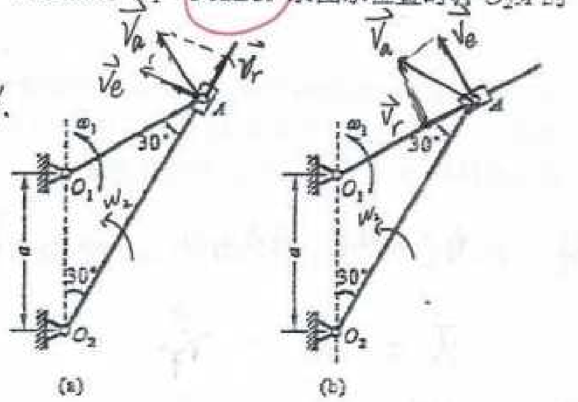
解：$y' = e^x$　∴ $y = 1\text{m}$ 处 $y' = 1$　∴ $V_x = 6\sqrt{2}\,\text{m/s}$　$V_y = 6\sqrt{2}\,\text{m/s}$

又 $\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = 2\sqrt{2}\,\text{m}$　∴ $a = \frac{v^2}{\rho} = 36\sqrt{2}\,\text{m/s}^2$

∴ $a_x = -36\,\text{m/s}^2$　$a_y = 36\,\text{m/s}^2$



四、在图 a 和 b 所示的两种机构中，已知 $O_1O_2 = a = 200$ mm，$\omega_1 = 3$ rad/s。求图示位置时杆 O_2A 的角速度。



解：(a) 以 O_1A 上 A 为动点，O_2A 为动系，地面为定系

∴ $\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$

大小：$\omega_1|O_1A|$　$\omega_2|O_2A|$　?

方向：$\perp O_1A$　$\perp O_2A$　沿 O_2A

解得：$\omega_1|O_1A|\cdot\cos 30° = \omega_2\cdot|O_2A|$

∴ $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1$ = 1.5rad/s

(b) 以 O_2A 上 A 点为动点，O_1A 为动系，地面为定系

$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$

大小 $\omega_2\cdot|O_2A|$　$\omega_1|O_1A|$　?

方向 $\perp O_2A$　$\perp O_1A$　沿 O_1A

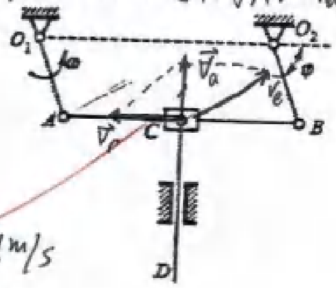
∴ $\omega_2\cdot|O_2A|\cdot\cos 30° = \omega_1|O_1A|$

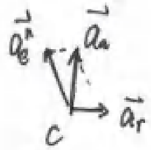
∴ $\omega_2 = \frac{2}{3}\omega_1$ = ? 2rad/s

五、图示铰接四边形机构中，$O_1A=O_2B=100\ \mathrm{mm}$，又 $O_1O_2=AB$，杆 O_1A 以等角速度 $\omega=2\ \mathrm{rad/s}$ 绕 O_1 轴转动。杆 AB 上有一套筒 C，此筒与杆 CD 相铰接。机构的各部件都在同一铅直面内。求当 $\varphi=60°$ 时，杆 CD 的速度和加速度。

∴AB杆为平动，杆上任一点运动与A点相同

解：以CD上C点为动点，AB杆为动系，地面为定系





$$\vec{V_a}=\vec{V_e}+\vec{V_r}$$

大小　?　$\omega\cdot|O_1A|$　?

方向　竖直向上　$\perp O_1A$　沿AB向左

解得：$V_a=V_e\cdot\sin30°$
$=0.1\ m/s$

∴杆CD速度 $V_{CD}=V_a=0.1\ m/s$

在相同系分析：

$$\vec{a_a}=\vec{a_e^n}+\vec{a_r}$$

大小：　?　$\omega^2\cdot|O_1A|$　?

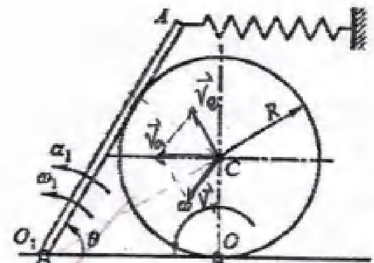
方向：　竖直　沿O_1A　沿AB

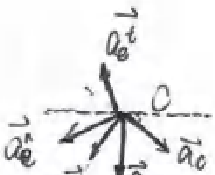
∴ $a_a=a_e^n\cdot\cos30°=0.346\ m/s^2$

∴杆CD加速度 $a_{CD}=a_a=0.346\ m/s^2$

六、图示偏心轮摇杆机构中，摇杆 O_1A 借助弹簧压在半径为 R 的偏心轮 C 上。偏心轮 C 绕轴 O 往复摆动，从而带动摇杆绕轴 O_1 摆动。设 $OC\perp OO_1$ 时，轮 C 的角速度为 ω，角加速度为零，$\theta=60°$。求此时摇杆 O_1A 的角速度 ω_1 和角加速度 α_1。

解：以C为动点，AO_1为动系，地面为定系.





$$\vec{V_a}=\vec{V_e}+\vec{V_r}$$

大小：　$\omega\cdot|OC|$　?　?

方向：　$\perp OC$向左　$\perp O_1C$　沿O_1A

解得：　$V_e=V_a=\omega\cdot R=\omega_1\cdot 2R$　∴ $\omega_1=\frac{1}{2}\omega$

又：　$\vec{a_a}=\vec{a_e^t}+\vec{a_e^n}+\vec{a_r}+\vec{a_c}$

大小：　$\omega^2|OC|$　?　$\omega_1^2\cdot|O_1C|$　?　$2\omega_1\cdot V_r$

方向：　向下　$\perp O_1C$　$C\to O_1$　沿AO_1　$\perp AO_1$

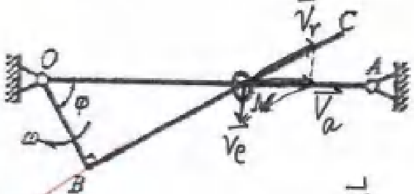
其中 $a_e^t=\alpha_1\cdot 2R$
$V_r=V_a$

解得：　$\omega^2\cdot R\cdot\cos60°=\overbrace{-\alpha_1 2R\cdot\cos30°}-\omega_1^2\cdot 2R\cdot\cos60°+2\omega_1\cdot V_r$

$\therefore \alpha_1=\frac{\sqrt{3}}{12}\omega^2$

七、图示直角曲杆 OBC 绕 O 轴转动，使套在其上的小环 M 沿固定直杆 OA 滑动。已知：$OB=0.1\text{m}$，OB 与 BC 垂直，曲杆的角速度 $\omega=0.5$ rad/s，角加速度为零。求当 $\varphi=60°$ 时，小环 M 的速度和加速度。

解：以M为动点，OBC杆为动系，地面为定系



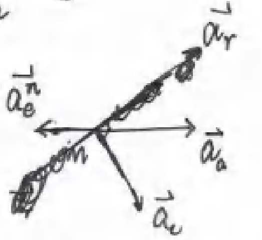
$\therefore$ $\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$

大小　?　$\omega|OM|$　?

方向　$O\to A$　$\perp OA$　$B\to C$

解得：$V_r = 0.2\text{m/s}$

$\vec{V_a} = 0.173\text{m/s}$（向右）

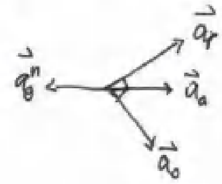


又 $\vec{a_a} = \vec{a_e^n} + \vec{a_r} + \vec{a_c}$

大小：?　$\omega^2|OM|$　?　$2\omega\cdot V_r$

方向：$O\to A$　$A\to O$　沿BC　$\perp BC$

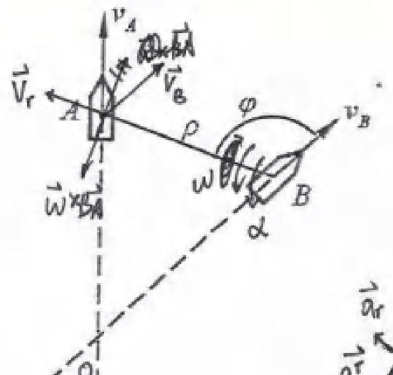
解得：$a_a = -0.35\text{m/s}^2$



$\therefore$ M的速度 $V_M = 0.173\text{m/s}$ 向右　加速度 $a_M = 0.35\text{m/s}^2$ 向左

八、图示A、B两船各自以等速 v_A 和 v_B 分别沿直线航行，B船上的观察者记录下两船的距离 ρ 和角 φ，试证明：

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{\rho}\dot{\varphi}}{\rho},\quad \ddot{\rho} = \rho\dot{\varphi}^2$$

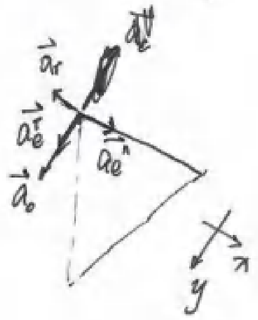


证明：以A为动点，AB杆为动系，地面为定系

~~$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e} = \vec{V_r} + \vec{V_B} + \vec{\omega}\times\vec{BA}$~~

~~大小：V_A　$\dot{\rho}$　V_B　$\rho\cdot\dot{\varphi}$~~

~~方向：OA方向　BA方向~~　OB方向　$\perp AB$



$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_c} + \vec{a_e^n} + \vec{a_e^\tau}$

大小：0　$\ddot{\rho}$　$2\dot{\varphi}\cdot\dot{\rho}$　$\dot{\varphi}^2\rho$　$\ddot{\varphi}\cdot\rho$

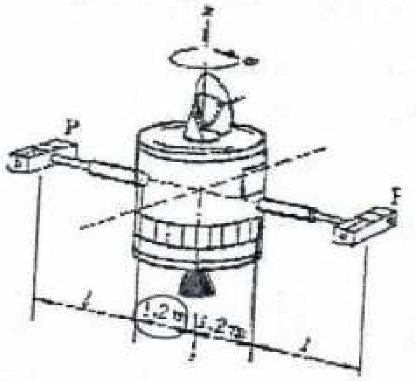
方向：\　AB方向　$\perp AB$　AB方向　$\perp AB$

$\therefore \begin{cases} 0 = -\ddot{\rho} + \dot{\varphi}^2\cdot\rho \\ 0 = 2\dot{\varphi}\dot{\rho} + \ddot{\varphi}\rho \end{cases}$

$\therefore \ddot{\rho} = \rho\cdot\dot{\varphi}^2$

$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{\rho}\dot{\varphi}}{\rho}$

九、由于航天器的套管式悬臂以等速向外伸展，所以通过内部机构控制其以等角速 $\omega = 0.05$ rad/s 绕 z 轴转动。悬臂伸展的长度 l 从 0 到 3m 之间变化。外伸的敏感试验组件受到的最大加速度为 0.011m/s^2。试求悬臂被允许的伸展速度 $\dot{l}$。



解：以元件为动点，卫星为动系，背景为定系

$$\therefore \quad \vec{a_a} = \vec{a_e^n} + \vec{a_r} + \vec{a_c}$$

大小： ? $\quad \omega^2(r+l) \quad 0 \quad 2\omega\dot{l}$

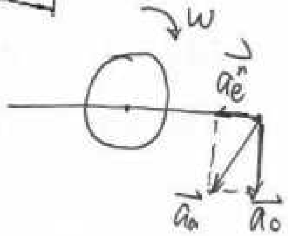
方向： ? 沿杆向里 \ 垂直于杆

$$\therefore a_a^2 = (\omega^2(r+l))^2 + (2\omega\dot{l})^2$$

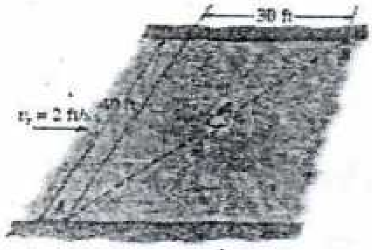
此时 l 取最大值 3m

a_a 最大为 0.011m/s^2

解得 $\dot{l} = 0.0328$ m/s



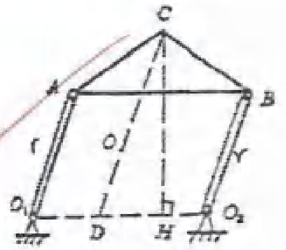
十、A man can swim at 4 ft/s in still water. He wishes to cross the 40-ft-wide river to point B, 30 ft downstream. If the river flows with a velocity of 2 ft/s, determine the speed of the man and the time needed to make the crossing. Note: While in the water he must not direct himself towards point B to reach this point. Why?



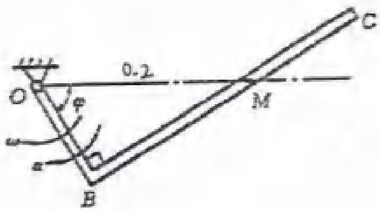
5
阅
10.24

一、概念题

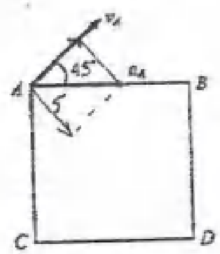
1. 刚体作平移时，刚体内各点的轨迹（③）。
   ① 一定是直线　　② 一定是曲线
   ③ 可以是直线，也可以是曲线
   ④ 可以是直线，也可以是不同半径的圆



2. 如图所示的平面机构中，三角板 ABC 与杆 O_1A、O_2B 铰接，若 $O_1A=O_2B=r$，$O_2O_1=AB$，则顶点 C 的运动轨迹为（④）。
   ① 以 CO_1 长为半径，以 O_1 点为圆心的圆
   ② 以 CH 长为半径，以 H 点为圆心的圆
   ③ 以 CD 长（$CD\,/\!/\,AO_1$）为半径，以 D 点为圆心的圆
   ④ 以 $CO=r$ 长（$CO\,/\!/\,AO_1$）为半径，以 O 点为圆心的圆



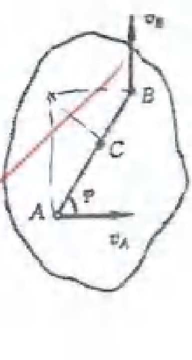
3. 直角曲杆 OBC 可绕 O 轴转动，如图所示。已知：OB=10cm。图示位置 φ=60°，曲杆的角速度 ω = 0.2rad/s，角加速度 α = 0.2rad/s²，则曲杆上 M 点的法向加速度的大小为（0.008m/s²），方向为（水平向左）；切向加速度的大小为（0.04m/s²），方向为（竖直向下）。



4. 已知正方形板 $ABCD$ 作定轴转动，转轴垂直于板面，A 点的速度大小 v_A= 5cm/s，加速度大小 $a_A=5\sqrt{2}$ cm/s²，方向如图所示。则该板转动轴到 A 点的距离 OA 为（5）cm。

5. 平面运动刚体相对其上任意两点的（①）。
   ① 角速度相等，角加速度相等
   ② 角速度相等，角加速度不相等
   ③ 角速度不相等，角加速度相等
   ④ 角速度不相等，角加速度不相等

6. 刚体平面运动的瞬时平移，其特点是（②）。
   ① 各点轨迹相同；速度相同，加速度相同
   ② 该瞬时图形上各点的速度相同
   ③ 该瞬时图形上各点的速度相同，加速度相同
   ④ 每瞬时图形上各点的速度相同



7. 某瞬时，平面图形上任意两点 A、B 的速度分别 v_A 和 v_B，如图所示。则此时该两点连线中点 C 的速度 v_C 和 C 点相对基点 A 的速度 v_{CA} 分别为（②）和（④）。
   ① $v_C=v_A+v_B$
   ② $v_C=(v_A+v_B)/2$
   ③ $v_{CA}=(v_A-v_B)/2$
   ④ $v_{CA}=(v_B-v_A)/2$

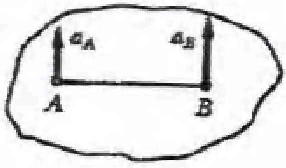
8. 平面图形上任意两点 A、B 的加速度 a_A 、a_B 与连线 AB 垂直，且 $a_A \neq a_B$ ，则该瞬时，平面图形的角速度 ω 和角加速度 α 应为（ ③ ）。

① $\omega \neq 0$，$\alpha \neq 0$

② $\omega \neq 0$，$\alpha = 0$

③ $\omega = 0$，$\alpha \neq 0$

④ $\omega = 0$，$\alpha = 0$



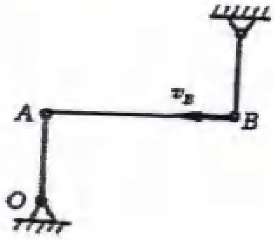
9. 平面机构在图示位置时，AB 杆水平，OA 杆鉛直。若 B 点的速度 $v_B \neq 0$，加速度 $a_B^\tau = 0$，则此瞬时 OA 杆的角速度 ω 和角加速度 α 为（ ① ）。 ②

① $\omega = 0$，$\alpha \neq 0$

② $\omega \neq 0$，$\alpha = 0$

③ $\omega = 0$，$\alpha = 0$

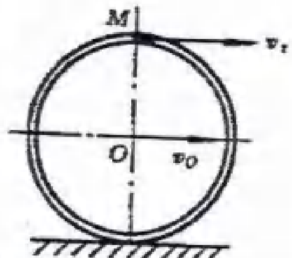
④ $\omega \neq 0$，$\alpha \neq 0$



10. 圆盘沿水平轨道作纯滚动，如图所示，动点 M 沿圆盘边缘的圆槽以 v_r 作相对运动。已知：圆盘的半径为 R，盘中心以匀速 v_O 向右运动。若将动坐标系固连于圆盘，则在图示位置时，动点 M 的牵连加速度为（ ② ）。

① 0　　② v_O^2/R

③ $2v_O^2/R$　　④ $4v_O^2/R$



11. 若已知某瞬时平面图形上两点的速度为零，则在该瞬时，平面图形的（ ③ ）。

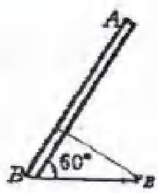
① 角速度和角加速度一定都为零

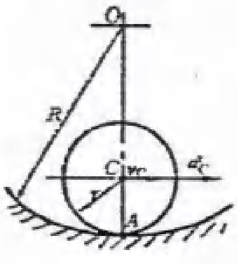
② 角速度和角加速度一定不为零

③ 角速度为零、角加速度不一定为零

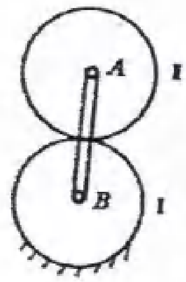
④ 角速度不为零，角加速度一定为零

12. 杆 AB 作平面运动，已知某瞬时 B 点的速度大小为 $v_B = 6$ m/s，方向如图。则在该瞬时 A 点的速度的最小值为 v_{min} 为（ 3m/s ）。



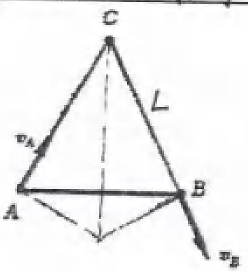


13. 半径为 r 的圆柱形滚子沿半径为 R 的圆弧槽纯滚动，在图示瞬时，滚子中心 C 的速度为 v_C，切向加速度为 a_C^τ，则速度瞬心的加速度大小为（ $\frac{v_C^2}{r}+\frac{v_C^2}{R-r}$ ）。

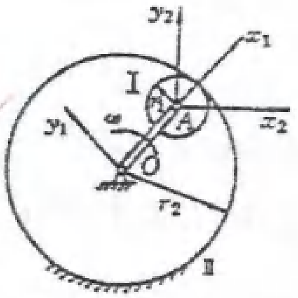


14. 图示外啮合行星轮机构，两轮的半径相同均为 r，轮 II 可在固定轮 I 上无滑动地滚动。当系杆 AB 转一整圈时，II 轮转过的角度应为（ 4π ）弧度。

15. 如图所示，边长为 L 的等边三角形板在其自身平面内运动，已知 A 点的速度大小为 v_A，B 点的速度沿 CB 方向，则此时三角形板的角速度大小为（ $\frac{\sqrt{3}V_A}{L}$ ）；C 点的速度大小为（ $2V_A$ ）。



16. 在图示内啮合行星轮系机构中，轮 I 和轮 II 的节圆半径分别为 r_1 和 r_2，轮 II 固定不动。曲柄 OA 以角速度 ω 逆时针转动。若取与曲柄 OA 固连的动系 Ox_1y_1，在取以销钉 A 为原点的平动坐标系 Ax_2y_2，则行星轮 I 对动系 Ox_1y_1 的相对角速度为（ ② ）；对动系 Ax_2y_2 的相对角速度为（ ① ）。

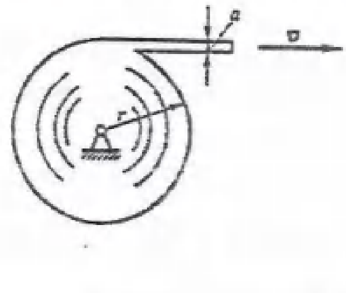


① $\frac{r_2-r_1}{r_1}\omega$（顺时针）　② $\frac{r_2}{r_1}\omega$（顺时针）

③ $\frac{r_1-r_2}{r_1}\omega$（顺时针）　④ $\frac{r_1}{r_2}\omega$（顺时针）

17. 在图示内啮合行星轮系机构中，轮 I 和轮 II 的节圆半径分别为 r_1 和 r_2，轮 I 以绝对角速度 ω_1 逆时针转动，轮 II 以角速度 ω_2 绕固定轴 O 沿逆时针转动，且 $\omega_2>\omega_1$，则系杆 OA 的角速度大小为（ $\frac{r_2w_2-r_1w_1}{r_2-r_1}$ ），转向为（ 逆时针 ）。

二、纸盘由厚度为 a 的纸条卷成，令纸盘的中心不动，而以等速度 v 拉纸条。求纸盘的角加速度（以半径 r 的函数表示）。

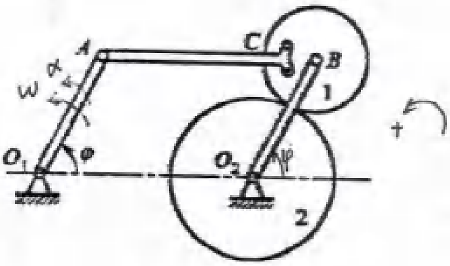


解：$w=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{V}{r}$

$$\alpha=\frac{dw}{dt}=\frac{dw}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=\frac{dw}{dr}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dr}{d\varphi}$$

$$=-\frac{V}{r^2}\cdot w\cdot\frac{a}{2\pi}=-\frac{aV^2}{2\pi r^3}$$

三、图示机构中齿轮 1 紧固在杆 AC 上，$AB=O_1O_2$，齿轮 1 和半径为 r_2 的齿轮 2 啮合，齿轮 2 可绕 O_2 轴转动且和曲柄 O_2B 没有联系。设 $O_1A=O_2B=l$，$\varphi=b\sin\omega t$，试确定 $t=\pi/2\omega$ (s) 时，轮 2 的角速度和角加速度。



解：∵ $AB // O_1O_2$ 始终成立 ∴ ACB 为平动

对 O_2B 杆 $\varphi=b\sin\omega t$ $\omega_{AB}=\dot\varphi=b\omega\cos\omega t$

$\alpha=\ddot\varphi=-b\omega^2\sin\omega t$

对1轮 $\omega_B=0$ $\alpha_B=0$

∴其相对于 O_2B 杆 $\omega_B=\omega_{Br}+\omega_{AB}$ $\alpha_B=\alpha_{Br}+\alpha$ ∴ $\omega_{Br}=-b\omega\cos\omega t$ $\alpha_{Br}=b\omega^2\sin\omega t$

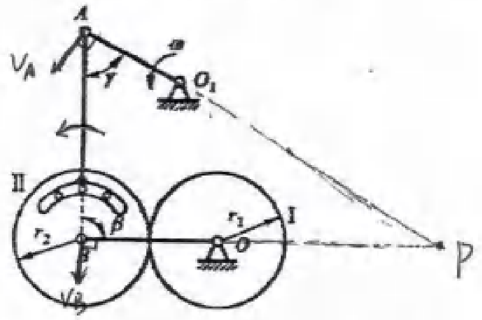
对2轮：其相对于 O_2B 杆 $\omega_{2r}\cdot r_2+\omega_{Br}\cdot(l-r_2)=0$ ∴ $\omega_{2r}=\frac{l-r_2}{r_2}b\omega\cos\omega t$

∴ 轮2的角速度：$\omega_2=\omega_{2r}+\omega_{AB}=\frac{l}{r_2}b\omega\cos\omega t$

∴ $\alpha_2=-\frac{l}{r_2}b\omega^2\sin\omega t$

$t=\frac{\pi}{2\omega}$ 时 $\omega_2=0$ $\alpha_2=-\frac{bl\omega^2}{r_2}$

四、在瓦特行星传动机构中，平衡杆 O_1A 绕 O_1 轴转动，并借连杆 AB 带动曲柄 OB；而曲柄 OB 活动地装置在 O 轴上，如图所示。在 O 轴上装有齿轮 I，齿轮 II 与连杆 AB 固连于一体。已知：$r_1=r_2=0.3\sqrt{3}$ m，$O_1A=0.75$ m，$AB=1.5$ m；又平衡杆的角速度 $\omega_{O_1}=6$ rad/s。求当 $\gamma=60°$ 且 $\beta=90°$ 时，曲柄 OB 和齿轮 I 的角速度。



解：对AB杆分析 ∵A在 O_1A 上，B在OB上，可得二者速度方向

如图得出速度瞬心P. ∵ $V_A=\omega_{O_1}|O_1A|=4.5$ m/s

∴ $\omega_{AB}=\frac{V_A}{|AP|}=1.5$ rad/s $V_B=\omega_{AB}|BP|=2.25\sqrt{3}$ m/s

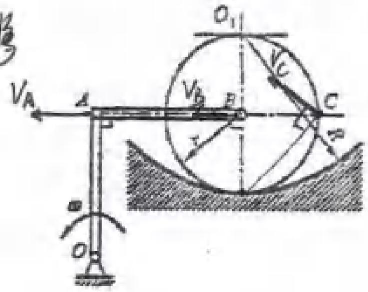
∴ $\omega_{OB}=\frac{V_B}{|OB|}=3.75$ rad/s 逆时针

对于OB杆所在动系 ∵ $\omega_{II}=\omega_{IIr}+\omega_{OB}$ $\omega_{II}=\omega_{AB}$ ∴ $\omega_{IIr}=\omega_{AB}-\omega_{OB}=-2.25$ rad/s

又 $\omega_{Ir}r_1+\omega_{IIr}r_2=0$ ∴ $\omega_{Ir}=2.25$ rad/s

∴ 齿轮I角速度 $\omega_I=\omega_{Ir}+\omega_{OB}=6$ rad/s 逆时针

五、曲柄 OA 以恒定的角速度 $\omega = 2$ rad/s 绕轴 O 转动，并借助连杆 AB 驱动半径为 r 的轮子在半径为 R 的圆弧槽中作无滑动的滚动。设 $OA = AB = R = 2r = 1$m，求图示瞬时点 B 和点 C 的速度和加速度。



解：对AB杆分析，AB速度方向都是水平向左 ∴AB杆瞬时平移

$V_B = V_A = \omega \cdot |OA| = 2m/s$ 方向向左，又轮的速度瞬心为接触点

∴ $V_C = \frac{V_B}{r} \cdot \sqrt{2} r = 2\sqrt{2} m/s$ 方向与水平方向夹角45°

对轮分析 接触点为速度瞬心 ∴ $\omega = \frac{V_B}{r} = 4 rad/s$

在AB方向：A无加速度 ∴B也无加速度

∴轮无角加速度

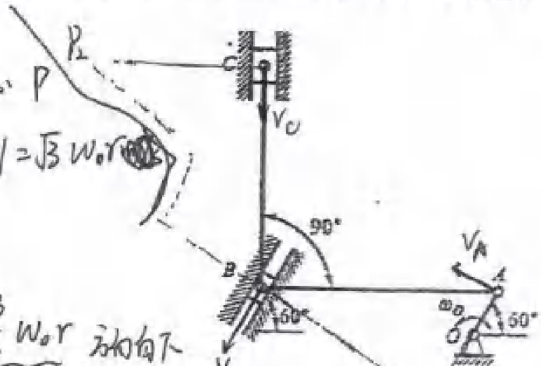
以 O_1B 为参考 ∴ $\omega = \frac{R-r}{r} \cdot \omega_{O_1B}$ ∴ $\omega_{O_1B} = \omega = 4 rad/s$

∴ $a_B = \omega_{O_1B}^2 \cdot |O_1B| = 8 m/s^2$ 方向向上

以B为基点，∴ $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}$ $a_{CB} = \omega^2 \cdot r = 8 m/s^2$ 方向水平向左

∴ $a_C = 8\sqrt{2} m/s^2$ 方向与水平方向为45°

六、在图示机构中，曲柄 OA 长为 r，绕 O 轴以等角速度 ω_O 转动，$AB = 6r$，$BC = 3\sqrt{3}r$。求图示位置时，滑块 C 的速度和加速度。



解：对AB杆，已知A、B点速度方向如图，可得其速度瞬心P

∵ $V_A = \omega_0 \cdot r$ ∴ $\omega_{AB} = \frac{V_A}{|AP|} = \frac{1}{3}\omega_0$ ∴ $V_B = \omega_{AB} \cdot |BP| = \sqrt{3}\omega_0 r$

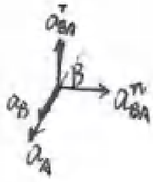
对BC杆，已知B、C点速度，可得其速度瞬心 P_2

∴ $\omega_{BC} = \frac{V_B}{|P_2B|} = \frac{1}{6}\omega_0$ ∴ $V_C = \omega_{BC} \cdot |P_2C| = \frac{3}{2}\omega_0 r$ 方向向下

又对B，以A为基点，分析如图：∴ $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$ 在AB方向投影得

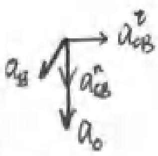
$-a_B \cdot \cos60° = -a_A \cdot \cos60° + a_{BA}^n$

又 $\begin{cases} a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot |AB| \\ a_A = \omega_0^2 \cdot |AO| \end{cases}$ 解得：$a_B = -\frac{1}{3}\omega_0^2 \cdot r$

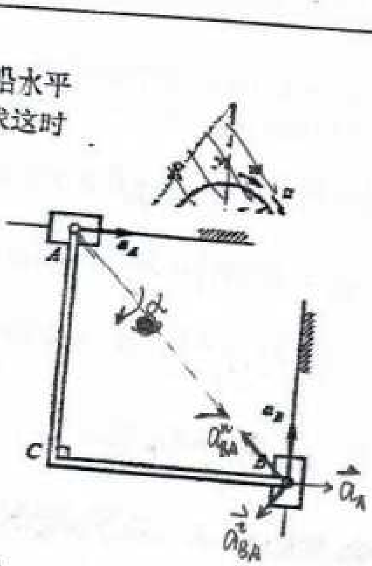


对C，以B为基点 $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^t$ 在BC方向投影

∴ $a_C = a_B \cdot \cos30° + a_{CB}^n$ ∵ $a_{CB}^n = \omega_{BC}^2 \cdot |BC|$ 解得：$a_C = -\frac{\sqrt{3}}{12}\omega_0^2 \cdot r$ 方向向上



七、图示直角刚性杆，$AC = CB = 0.5\text{m}$，设在图示瞬时，两端滑块沿水平与铅垂轴的加速度如图，大小分别为 $a_A = 1\ \text{m/s}^2$，$a_B = 3\ \text{m/s}^2$。求这时直角杆的角速度和角加速度。



解：以A为基点，对B分析

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$$

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot \sqrt{2}|AC|$$

$$a_{BA}^t = \alpha \cdot \sqrt{2}|AC|$$

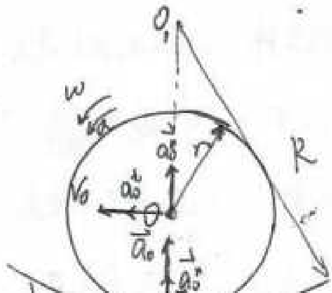
分别在 $\vec{a}_{BA}^t$ 与 $\vec{a}_{BA}^n$ 方向投影

$$\begin{cases} a_B \cdot \cos 45^\circ = -a_A \cdot \cos 45^\circ + a_{BA}^n \\ a_B \cdot \cos 45^\circ = a_A \cdot \cos 45^\circ - a_{BA}^t \end{cases}$$

解得：$\omega = 2\ \text{rad/s}$ 方向未知

$\alpha = -2\ \text{rad/s}^2$ 方向逆时针

八、半径为 r 的圆轮在半径为 R 的圆弧面上作纯滚动，圆轮的角速度为 ω，角加速度为 α。试求轮上的与圆弧面相接触的点 C 的加速度。



解：$\because V_0 = \omega \cdot r$ $\quad a_0^t = \dfrac{dV_0}{dt} = \alpha \cdot r$

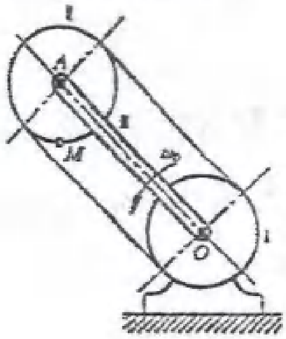
又O绕O_1运动 $\therefore \omega_{OO_1} = \dfrac{V_0}{|OO_1|} = \dfrac{r}{R-r}\omega$ $\quad \therefore a_0^n = \omega_{OO_1}^2 \cdot |OO_1| = \dfrac{\omega^2 r^2}{R-r}$

以O为基点，对C分析

$$\vec{a}_0 = \vec{a}_0^n + \vec{a}_0^t + \vec{a}_{CO}^n + \vec{a}_{CO}^t \qquad \vec{a}_{CO}^n = \omega^2 \cdot r \qquad \vec{a}_{CO}^t = \alpha r$$

解得 $a_C = \dfrac{Rr \cdot \omega^2}{R-r}$ 方向向上

九、系杆 OA 以角速度 ω_O 绕定齿轮Ⅰ的轴 O 匀速转动，同时在 A 端带有另一同样大小的齿轮Ⅱ的轴，两齿轮用链条相连接。如系杆长 $OA = l$，求动齿轮Ⅱ的角速度和角加速度，以及其上任一点 M 的速度和加速度。



解：相对于系杆 OA　对齿轮Ⅰ：$W_Ⅰ = W_{Ⅰr} + W_0$

$W_Ⅰ = 0$　$\therefore W_{Ⅰr} = -W_0$　又 $W_{Ⅰr} = W_{Ⅱr} = -W_0$

$\therefore$ 齿轮Ⅱ：$W_Ⅱ = W_{Ⅱr} + W_0 = 0$　$\therefore$ 齿轮Ⅱ为平动

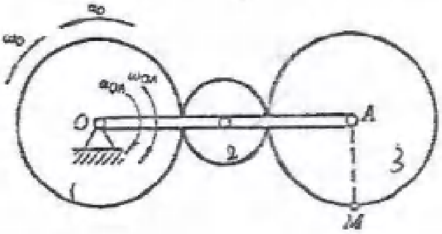
$\therefore$ 其上任一点速度与加速度与 A 点相同

$V_A = W_0 l$　　$a_A = W_0^2 \cdot l$

$\therefore V_M = W_0 l$ 方向垂直于杆

$a_M = W_0^2 l$ 方向平行于杆

十、在周转传动装置中，半径为 R 的主动齿轮以角速度 ω_O 和角加速度 α_O 作反时针转动，而长为 $3R$ 的曲柄 OA 绕轴 O 作顺时针转动的角速度 $\omega_{OA} = \omega_O$，角加速度 $\alpha_{OA} = \alpha_O$，如图所示。点 M 位于半径为 R 的从动齿轮上，在垂直于曲柄的直径的末端。求点 M 的速度和加速度。



解：以 OA 为参考　$\therefore W_1 = W_{1r} + W_{OA}$　$\therefore W_{1r} = -2W_0$

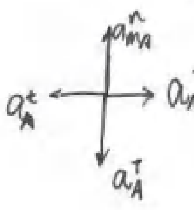
又 $W_{1r} \cdot R + W_{2r} \cdot \frac{R}{2} = 0$　　$W_{3r} \cdot R + W_{2r} \cdot \frac{R}{2} = 0$

$\therefore W_{3r} = W_{1r} = -2W_0$　　$\therefore W_3 = W_{3r} + W_{OA} = -W_0$

$\therefore \alpha_3 = \frac{dW_3}{dt} = \frac{dW_0}{dt} = -\alpha_0$　　~~$\alpha_{3r} = \alpha_0$~~

以 A 为基点，对 M 分析　$\therefore \vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_r$　　$V_A = 3R \cdot W_0$　$V_r = W_0 \cdot R$

$\therefore V_M = \sqrt{10}\, W_0 R$

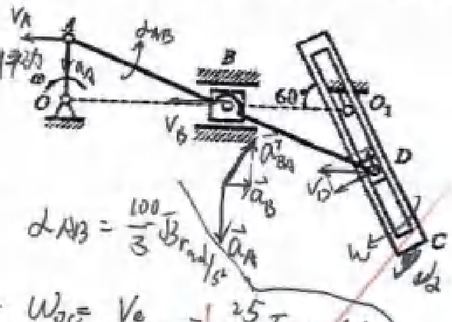


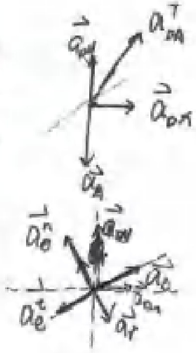
$\vec{a}_M = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^\tau + \vec{a}_{MA}^n$　　解得 $a_{Ax} = \alpha_0 R - W_0^2 \cdot 3R$

$a_{Ay} = W_0^2 R - \alpha_0 3R$

$\therefore a_M = \sqrt{(\alpha_0 - W_0^2)^2 + (W_0^2 - 3\alpha_0)^2} \cdot R$

十一、图示曲柄连杆机构带动摇杆 O_1C 绕 O_1 轴摆动。在连杆 AB 上装有两个滑块，滑块 B 在水平槽内滑动，而滑块 D 则在摇杆 O_1C 的槽内滑动。已知：曲柄长 OA = 50mm，绕 O 轴转动的匀角速度 ω = 10 rad/s。在图示位置时，曲柄与水平线间成 90°角，$\angle OAB$ = 60°，摇杆与水平线间成 60°角；距离 O_1D = 70mm。求摇杆的角速度和角加速度。





解：对AB杆分析，知A、B速度方向，二者平行 ∴ ABD杆瞬时平动

$\therefore \omega_{AB}=0$　　$\therefore V_B=V_A=0.5m/s$　　$V_D=V_A=0.5m/s$

对B分析：　$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}^{\tau}_{BA}$　　$\therefore a_B=\frac{5}{3}\sqrt{3}\ m/s^2$　　$\alpha_{AB}=\frac{100}{3}\sqrt{3}\ rad/s^2$

对D点分析　以O_1D为动系 $\therefore V_e=\frac{\sqrt{3}}{2}V_D=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{3}\ m/s$　　$\therefore \omega_{O_1C}=\frac{V_e}{|O_1D|}=\frac{25}{7}\sqrt{3}\ rad/s$ (顺时针)

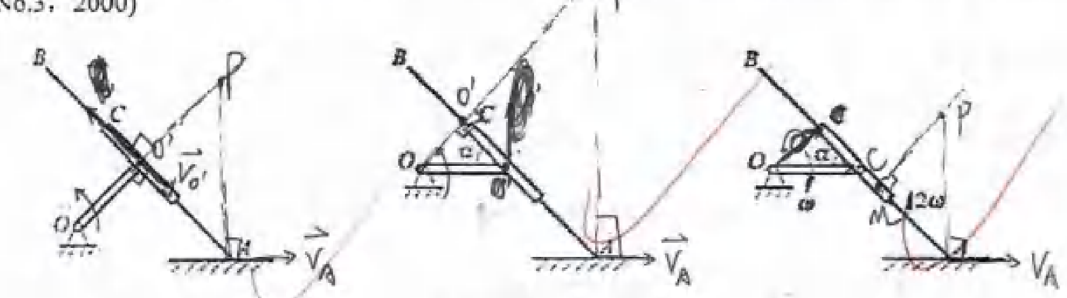
以A为基点　$\vec{a}_{Dx}+\vec{a}_{Dy}=\vec{a}_A+\vec{a}^{\tau}_{DA}$

又以D为动点，O_1C为动系　$\vec{a}_{Dx}+\vec{a}_{Dy}=\vec{a}^n_e+\vec{a}^t_e+\vec{a}_r+\vec{a}_C$

在垂直O_1C方向投影：$a_C+a^t_e=a^{\tau}_{DA}\cdot\cos30^\circ-a_A\cdot\cos60^\circ$　　$\therefore a^t_e=(-\frac{5}{2}-\frac{12}{7}\sqrt{3})\ m/s^2$

$\therefore \alpha_{O_1C}=\frac{a^t_e}{|O_1D|}\approx-78.13\ rad/s^2$ (逆时针)

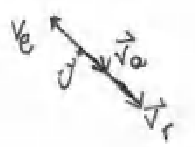
*十二、如图所示，各机构中的 AB 杆均可在套筒 C 中滑移，且其 A 端沿固定的水平面在图示平面内作直线运动。图(a)中套筒 C 和曲柄 OC 成直角地固连成一体；图(b)中套筒 C 和曲柄 OC 成 α 角固连成一体；图(c)中套筒 C 和曲柄 OC 通过铰链 C 相链接，若 $\overline{OC}=r$，图示瞬时曲柄的角速度为 ω，AB 杆的角速度为 2ω，方向如图 c 所示。请确定 AB 杆在图示瞬时的速度瞬心。(选自《力学与实践》，No.3，2000)



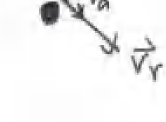
(a)　　(b)　　(c)

解：

(a) 以套筒为动系，杆上O'为动点。



(b) 过O作AB垂线交杆于O'
以套筒为动系
杆上O'为动点



(c)

对于套筒上某点速度
以C为基点分析
$V_C=\omega\cdot r$　　$V_r=2\omega|MC|$

$\therefore V_r=V_C\cdot\cos\alpha$ 时 $\vec{V}_M$ 沿杆　由(1)(2)
$\therefore |MC|=\frac{r}{2}\cdot\cos\alpha$
同理，杆上M点速度沿杆
$\therefore$ 取C点下距C点 $\frac{r}{2}\cos\alpha$ 的点为M
可得出瞬心...

5
阅
11.2

一、概念题

1. 进动、章动和自转的三根转轴分别为（ ②④ ）。

① 空间固定坐标系的 x、y、z 轴　　② 空间固定坐标系的 z、x、z 轴

③ 连体坐标系的 x、y、z 轴　　④ 连体坐标系的 z、x、z 轴

2. 一般情况下，刚体定点转动时，以下说法正确的是（ ②③ ）。

① 角加速度大小等于角速度大小对时间的一阶导数 ×

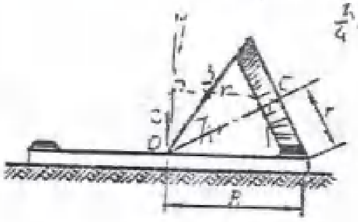
② 角加速度矢量等于角速度矢量对时间的一阶导数

③ 角速度矢量和角加速度矢量一般不共线

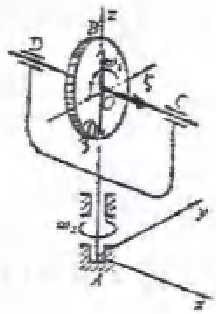
④ 角速度矢量与角加速度矢量一定垂直 ×

$\frac{7}{6}$ rad/s

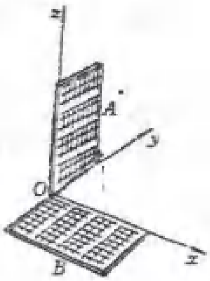
$\frac{7}{4}$ r/s



3. 锥齿轮的轴通过平面支座齿轮的中心 O，如图所示。锥齿轮在支座齿轮上滚动，每分钟绕铅垂轴转 5 周。如 $R=2r$，则锥齿轮绕其本身轴 OC 转动的角速度为（ $\frac{2}{3}$ ）rad/s。



4. 图示圆盘以角速度 ω_1 绕水平轴 CD 转动，同时轴 CD 以角速度 ω_2 绕通过圆盘中心点 O 的铅直轴 AB 转动。$\omega_1=5\text{ rad/s}$，$\omega_2=3\text{ rad/s}$，则圆盘的合成角速度为（ $\sqrt{34}$ ）rad/s。



5. 图示宇宙航行器的太阳能电池帆板，希望经过一次旋转由位置 A 转到位置 B，则转过的角度为 180° 度。

6. 刚体绕 O 点作定点运动，其上一点在某一瞬时的速度、转动加速度和向轴加速度分别为 v、a_B、a_N，则下列说法正确的是（ ②④ ）。

① a_B 必与 v 共线 ×　　② a_N 必与 v 垂直

③ a_B 必与瞬时转动轴垂直 ×　　④ a_N 必与瞬时转动轴垂直

7. 刚体的空间一般运动可以分解为随基点的平移和绕基点的转动，则 ①③④ 。

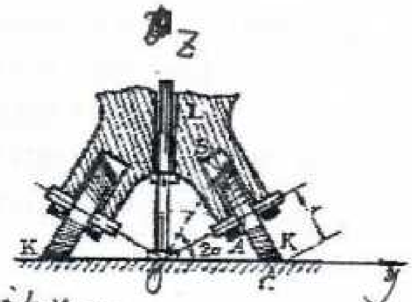
① 基点可以是刚体上的任一点

② 随基点平移的速度和加速度与基点的选择无关 \

③ 绕基点转动的角速度和角加速度与基点的选择无关

④ 绕基点转动的角加速度矢量一定等于角速度矢量对时间的一阶导数

二、图示桥支承的转动部分放在锥形齿轮的滚子 K 上，滚子的轴安装在环形框 L 内，这些轴的延长线相交于平面支承齿轮的几何中心上，滚子 K 即在此支承齿轮上滚动。若滚子的大圆半径 r=25mm，顶角为 2α，$\cos\alpha=\dfrac{84}{85}$，试求锥形滚子的角速度、角加速度以及 A、B、C 三点的速度、加速度。环形框绕铅垂轴转动的角速度 $\omega_0=0.1rad/s$。



解：对于圆锥滚子，其瞬时转轴为OC

又A点绕BO轴的定轴转动 $\therefore V_A=\omega_0\cdot\dfrac{r}{\tan\alpha}\cdot\cos\alpha$
$=\omega\cdot r\cdot\cos\alpha$

$\therefore$ 滚子绝对角速度 $\omega=\dfrac{\omega_0}{\tan\alpha}=\dfrac{84}{13}\times0.1\ rad/s=0.646\ rad/s$

即 $\vec{\omega}=-0.646\vec{j}\ rad/s$

方向沿y负方向

$\therefore\vec{\alpha}=\vec{\omega_0}\times\vec{\omega}=0.0646\vec{i}\ rad/s^2$

$\therefore$ $\vec{V_A}=\vec{\omega}\times\vec{r_A}=-\omega\cdot r\cdot\cos\alpha\cdot\vec{i}=-15.96\vec{i}\ mm/s$

$\vec{V_B}=\vec{\omega}\times\vec{r_B}=2\vec{V_A}=-31.92\vec{i}\ mm/s$

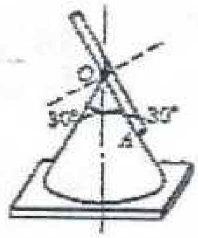
$\vec{V_c}=0$

又 $\vec{a_A}=\vec{\alpha}\times\vec{r_A}+\vec{\omega}\times\vec{V_A}=(\vec{\omega_0}\times\vec{\omega})\times\vec{r_A}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r_A})=-1.596\vec{j}\ mm/s^2$

$\vec{a_B}=\vec{\alpha}\times\vec{r_B}+\vec{\omega}\times\vec{V_B}=(-3.19\vec{j}-10.56\vec{k})\ mm/s^2$

$\vec{a_c}=\vec{\alpha}\times\vec{r_c}+\vec{\omega}\times\vec{V_c}=\vec{\alpha}\times\vec{r_c}=10.56\vec{k}\ mm/s^2$

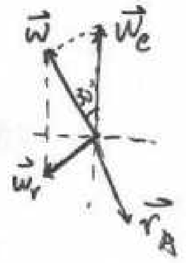
三、半径 $R=40\sqrt{3}$ mm 的圆盘以大小不变的角速度在顶角等于 60° 的固定圆锥上纯滚动。已知圆盘边缘上点 A 的加速度大小不变且等于 $480mm/s^2$。试求此圆盘绕自身对称轴的转动角速度大小。



解：圆盘瞬时转轴 OA，

将转动分解为绕圆锥转动和绕自身轴转动

$\because \vec{\omega}=\vec{\omega}_e+\vec{\omega}_r$ 如图　　$\vec{v}_A=\vec{\omega}\times\vec{r}_A=0$



$\because \vec{\alpha}_e=0 \quad \vec{\alpha}_r=0$

$\vec{\alpha}=\vec{\omega}_e\times\vec{\omega}_r$

又 $\vec{a}_A=\vec{\alpha}\times\vec{r}_A+\vec{\omega}\times\vec{v}_A=\vec{\alpha}\times\vec{r}_A$

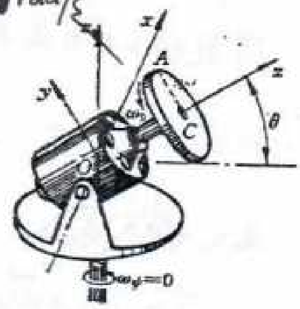
$\therefore |\vec{a}_A|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{r}_A|=|\vec{\omega}_e|\cdot|\vec{\omega}_r|\cdot\sin 60^\circ\cdot R=2|\vec{\omega}_r|\cdot|\vec{\omega}_r|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 40\sqrt{3}mm=480mm/s^2$

解得：$\omega_r=2rad/s$

四、 图示圆盘圆心固结在电动机转子的转轴 C 上。电动机又可绕支架上的轴 x 转动。圆盘的自转角速度 $\omega_\varphi = 120$ r/min，电动机绕支架轴 x 的角速度 $\dot{\theta} = 3\pi$ rad/s，支架绕定轴 z_1 的角速度为零；$OC = 300$mm，$CA = 150$mm。试求 $\theta = 30°$ 时圆盘的角速度、角加速度以及其上 A 点的速度和加速度。

2 r/s　4π rad/s

$\theta = 30°$



解：由题意 $\vec{\omega}_g = 4\pi\vec{k}$ rad/s　电机绕支架 $\vec{\omega}_e = -3\pi\vec{i}$ rad/s

∴ 圆盘角速度 $\vec{\omega} = \vec{\omega}_g + \vec{\omega}_e = (-3\pi\vec{i} + 4\pi\vec{k})$ rad/s

$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_e + \vec{\alpha}_g + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_g = 12\pi^2\vec{j}$ rad/s²

对于A点　$\vec{r}_A = (150\vec{j} + 300\vec{k})$ mm

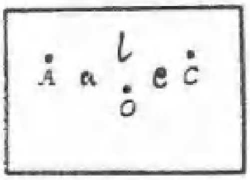
∴ $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A = (-600\pi\vec{i} + 900\pi\vec{j} - 450\pi\vec{k})$ mm/s $= (-0.6\pi\vec{i} + 0.9\pi\vec{j} - 0.45\pi\vec{k})$ m/s

$\vec{a}_A = \vec{\alpha} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \vec{v}_A = (-3.75\pi^2\vec{j} - 2.7\pi^2\vec{k})$ m/s²

5
阅
11.24

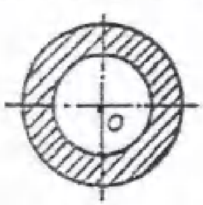
一、概念题

1. 图示 A、O、C 三轴皆垂直于矩形板的板面。已知非均质矩形板的质量为 m，对 A 轴的转动惯量为 J，点 O 为板的形心，点 C 为板的质心。若长度 $AO=a$，$CO=e$，$AC=l$，则板对形心轴 O 的转动惯量为（ ③ ）。



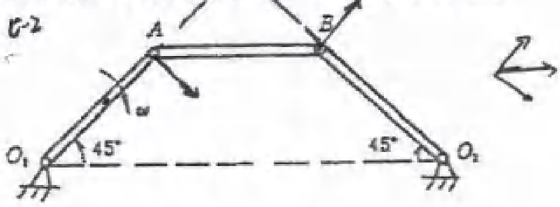
① $J-ma^2$
② $J+ma^2$
③ $J-m(l^2-e^2)$
④ $J-m(l^2+e^2)$

2. 图示均质圆环形盘的质量为 m，内、外直径分别为 d 和 D。则此盘对垂直于盘面的中心轴 O 的转动惯量为（ ④ ）。



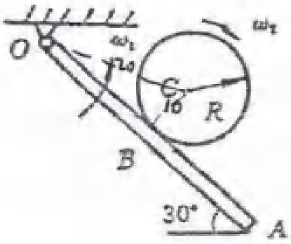
① $md^2/8$
② $mD^2/8$
③ $m(D^2-d^2)/8$
④ $m(D^2+d^2)/8$

3. 图示四连杆机构中，各均质杆长度为 $O_1A=O_2B=AB=20$ cm，它们的质量相等，均为 $m=1$ kg。在图示瞬时，O_1A 杆转动的角速度 $\omega=\sqrt{2}$ rad/s，O_1A 与 O_2B 两杆的倾角均为 45°。此时该机构的动量 p 大小为（①③）。



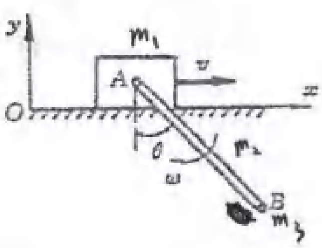
① $p=0.4$ N·s
② $p=0.483$ N·s
③ $p=0.6$ N·s
④ $p=0.766$ N·s

4. OA 杆绕 O 轴逆时针转动，匀质圆盘沿 OA 杆作纯滚动，如图所示。已知圆盘的质量 $m=20$ kg，　半径 $R=10$ cm。在图示位置时，OA 杆的倾角为 30°，其转角的角速度 $\omega_1=1$ rad/s，圆盘相对于 OA 杆转动的角速度 $\omega_2=4$ rad/s，$OB=10\sqrt{3}$ cm，则此时圆盘的动量 p 大小为（ ① ）。



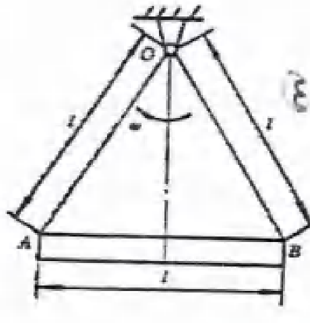
① $p=6.93$ N·s　② $p=8$ N·s
③ $p=8.72$ N·s　④ $p=4$ N·s

5. 图示平面机构中，物块 A 的质量为 m_1，可沿水平直线轨道滑动；均质杆 AB 的质量为 m_2、长为 $2l$，其 A 端与物块铰接，B 端固连一质量为 m_3 的质点。图示瞬时，物块的速度为 v，杆的角速度为 ω，则此平面机构在该瞬时的动量为（ ④ ）。



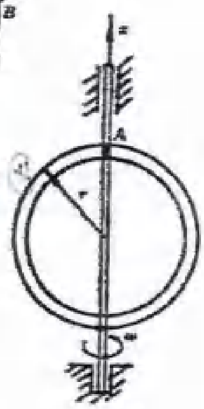
① $(m_1+m_2+m_3)v\boldsymbol{i}$
② $[m_1v-(m_2+2m_3)l\omega\cos\theta]\boldsymbol{i}-(m_2+2m_3)l\omega\sin\theta\boldsymbol{j}$
③ $[m_1v-(m_2+2m_3)l\omega\cos\theta]\boldsymbol{i}+(m_2+2m_3)l\omega\sin\theta\boldsymbol{j}$
④ $[(m_1+m_2+m_3)v-(m_2+2m_3)l\omega\cos\theta]\boldsymbol{i}-(m_2+2m_3)l\omega\sin\theta\boldsymbol{j}$

6. 均质杆 AB，质量为 m，两端用张紧的绳子系住，绕轴 O 转动，如图所示。则杆 AB 对 O 轴的动量矩为（ ① ）。



① $5/6ml^2\omega$
② $13/12\ ml^2\omega$
③ $4/3\ ml^2\omega$
④ $1/12\ ml^2\omega$

7. 均质圆环绕 z 轴转动，在环中的 A 点处放一小球，如图所示。在微扰动下，小球离开 A 点运动。不计摩擦，则此系统运动过程中（ ② ）。

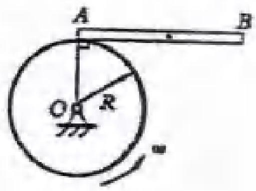


① ω 不变，系统对 z 轴动量矩守恒
② ω 改变，系统对 z 轴动量矩守恒
③ ω 不变，系统对 z 轴动量矩不守恒
④ ω 改变，系统对 z 轴动量矩不守恒

8. 一均质杆 OA 与均质圆盘在圆盘中心 A 处铰接，在图示位置时，OA 杆绕固定轴 O 转动的角速度为 ω，圆盘相对于杆 OA 的角速度也为 ω。设 OA 杆与圆盘的质量均为 m，圆盘的半径为 R，杆长 $l=3R$，则此时该系统对固定轴 O 的动量矩大小为（ ③ ）。

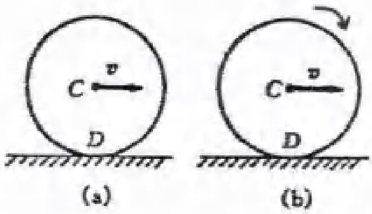
① $L_O=22mR^2\omega$
② $L_O=12.5mR^2\omega$
③ $L_O=13mR^2\omega$
④ $L_O=12mR^2\omega$

9. 质量为 m，长度为 $l=2R$ 的均质细直杆的 A 端固接在均质圆盘的边缘上，如图所示。圆盘的质量为 M，半径为 R，以角速度 ω 绕定轴 O 转动，则该系统的动量大小为 $p=$（ $\sqrt{2}m\omega R$ ）；对于轴 O 的动量矩大小为 $L_O=$（ $\frac{1}{2}M\omega R^2+\frac{7}{3}m\omega R^2$ ）



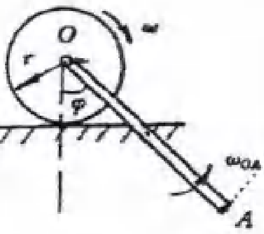
10. 图 a 所示均质圆盘沿水平地面作直线平移，图 b 所示均质圆盘沿水平直线作纯滚动。设两盘质量皆为 m，半径皆为 r，轮心 C 的速度皆为 v，则图示瞬时，他们各自对轮心 C 和对与地面接触点 D 的动量矩分别为

图 a：$L_C=$（ 0 ），$L_D=$（ mvr ）；
图 b：$L_C=$（ $\frac{1}{2}mvr$ ），$L_D=$（ $\frac{3}{2}mvr$ ）。



11. 一质量为 m，半径为 r 的均质圆轮以匀角速度 ω 沿水平面作纯滚动，均质杆 OA 与圆轮在轮心 O 处铰接，如图所示。设 OA 杆长 $l=4r$，质量 $M=m/4$。在图示杆与铅垂线的夹角 $\varphi=60°$时，其角速度 $\omega_{OA}=\omega/2$，则此时该系统的动能为（ ③ ）。

$\frac{1}{2}m(\omega r)^2+\frac{1}{4}mr^2\cdot\omega^2$



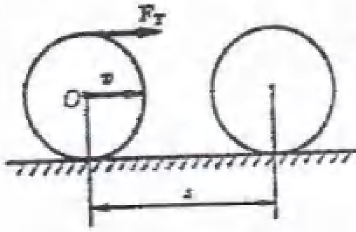
① $T=\dfrac{25}{24}mr^2\omega^2$　② $T=\dfrac{11}{12}mr^2\omega^2$

③ $T=\dfrac{7}{6}mr^2\omega^2$　④ $T=\dfrac{2}{3}mr^2\omega^2$

12. 图示均质圆盘沿水平直线轨道作纯滚动，在盘心移动了距离 s 的过程中，水平常力 F_T 的功 W_T =（①②；轨道给圆轮的摩擦力 F_f 的功 W_f=（③）。

① $F_T s$　　② $2F_T s$

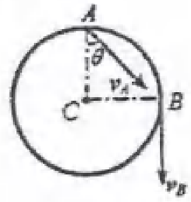
③ 0　　④ $-F_f s$



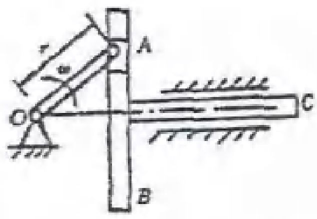
13. 质量为 m、半径为 r 的均质圆盘在其自身平面内作平面运动。在图示位置时，若已知圆盘上 A、B 两点的速度方向如图所示，B 点的速度为 v_B，$\theta=45°$，则圆盘的动能为（②）。

① $T=\frac{1}{16}mv_B^2$　　② $T=\frac{3}{16}mv_B^2$

③ $T=\frac{1}{4}mv_B^2$　　④ $T=\frac{3}{4}mv_B^2$

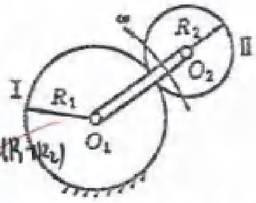


14. 如图所示的曲柄连杆机构，滑块 A 与滑道 BC 之间的摩擦力是系统的内力，设已知为 F 且等于常数，则曲柄转一周摩擦力的功为（❶　）。
$-4Fr$

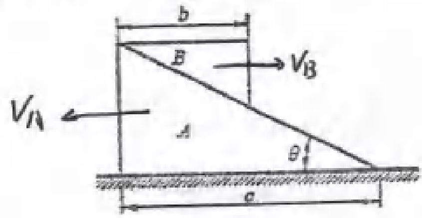


15. 如图所示，轮Ⅱ由系杆 O_1O_2 带动在固定轮Ⅰ上无滑动滚动，两轮半径分别 R_1、R_2。若轮Ⅱ的质量为 m，系杆的角速度为 ω，则轮Ⅱ的动能 T 为（$\frac{3}{4}m(R_1+R_2)^2\omega^2$），轮Ⅱ对固定轴 O_1 的动量矩为（$m\omega(R_1+R_2)^2 + \cancel{m\omega}\ \frac{1}{2}m\omega R_2(R_1+R_2)$）。

$= m\omega(R_1+R_2)(R_1+\frac{1}{2}R_2)$



二、图示水平面上放一均质三棱柱 A，在其斜面上又放一均质三棱柱 B。两三棱柱的横截面均为直角三角形。三棱柱 A 的质量 m_A 为三棱柱 B 质量 m_B 的三倍，其尺寸如图所示。设各处摩擦不计，初始时系统静止。求当三棱柱 B 沿三棱柱 A 滑下接触到水平面时，三棱柱 A 移动的距离。



解：对整体系统分析，水平方向不受外力

∴ $P_x = P_{x0} = 0$

对任意时刻：$P_x = m_B\cdot v_B - m_A\cdot v_A = 0$

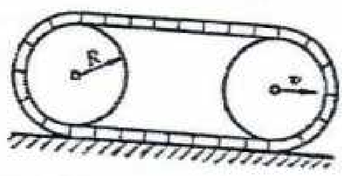
∴ $v_B = 3v_A$

积分：$S_B = 3S_A$

又 $S_B + S_A = a-b$

∴ A移动距离 $S_A = \frac{1}{4}(a-b)$ 方向向左

三、图示坦克的履带质量为 m_1，两个车轮的质量均为 m_2。车轮被看成均质圆盘，半径为 R。设坦克的前进速度是 v，试计算此质点系的动量。

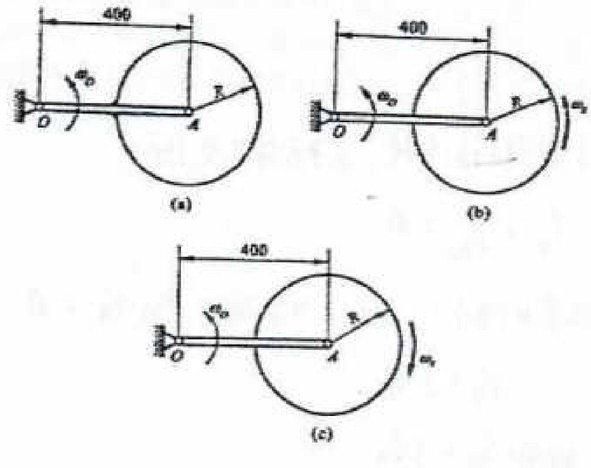


解：对此质点系整体分析

质点移动和坦克同步：$\vec{v}_c=\vec{v}$

$\therefore \vec{p}=m_总\cdot\vec{v}_c=(m_1+2m_2)\cdot\vec{v}$

四、无重杆 OA 以角速度 ω_O 绕 O 轴转动，质量 $m=25$ kg、半径 $R=200$ mm 的均质圆盘以三种方式安装于杆 OA 的点 A，如图所示。在图 a 中，圆盘与杆 OA 焊接在一起；在图 b 中，圆盘与杆 OA 在点 A 铰接，且相对杆 OA 以角速度 ω_r 逆时针转动；在图 c 中，圆盘相对杆 OA 以角速度 ω_r 顺时针转动。已知：$\omega_O=\omega_r=4$ rad/s，计算在此三种情况下，圆盘对 O 轴的动量矩。



解：(a) $L_o=(\frac{1}{2}mR^2+ml^2)\,\omega_o$

$=18\,kg\cdot m^2/s$

(b) $\omega_a=\omega_o+\omega_r=8\,rad/s$

$L_o=m v_A\cdot l+\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega_a$

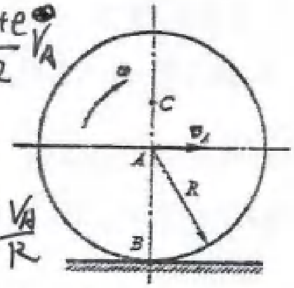
$=20\,kg\cdot m^2/s$

(c) $\omega_a=\omega_o+(-\omega_r)=0$

$L_o=m v_A\cdot l+\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega_a$

$=16\,kg\cdot m^2/s$

五、如图所示，质量为 m 的偏心轮在水平面上作平面运动。轮子轴心为 A，质心为 C，$AC = e$；轮子半径为 R，对轴心 A 的转动惯量为 J_A；C、A、B 三点在同一铅直线上。(1) 当轮子只滚不滑时，若 v_A 已知，求轮子的动量和对地面上 B 点的动量矩。(2) 当轮子又滚又滑时，若 v_A、ω 已知，求轮子的动量和对地面上 B 点的动量矩。



解：(1) B为速度瞬心 $\therefore \omega = \frac{V_A}{R}$ $\therefore \vec{V_c} = \omega\cdot(R+e) = \frac{R+e}{R}\vec{V_A}$

$\therefore$ 对整体分析，轮子动量 $\vec{p} = m\cdot\vec{V_c} = \frac{R+e}{R}\cdot\vec{V_A}$

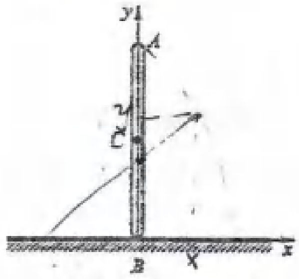
$L_{BZ} = J_Z\cdot\omega = (J_A - me^2 + m(R+e)^2)\cdot\omega = (J_A + mR^2 + 2mRe)\frac{V_A}{R}$

(2) 以A为基点对C分析 $\therefore V_c = V_A + \omega e$ $\therefore$ 轮子动量 $\vec{p} = m\cdot\vec{V_c} = m(V_A + \omega e)$

$L_{BZ} = mV_c\cdot(R+e) + J_{CZ}\omega = m(V_A + \omega e)(R+e) + (J_A - me^2)\omega$

$= J_A\omega + mRe\omega + m(R+e)V_A$

六、如图所示，均质杆 AB，长 l，直立在光滑的水平面上。求它从铅直位置无初速地倒下时，端点 A 相对图示坐标系的轨迹。



解：对整体分析 $\because$ 水平方向合外力为零

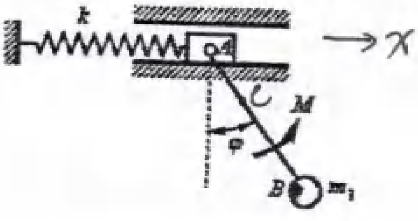
由动量定理，$V_{Cx} - V_{Cx_0} = 0$ $\therefore V_{Cx} = 0$

设A(x,y) $\because$ 质心始终在y轴上

$\therefore (\frac{y}{2})^2 + x^2 = (\frac{l}{2})^2$

$\therefore$ A点轨迹为：$x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{l^2}{4}$ $(x\geq 0, y\geq 0)$

七、如图所示，质量为 m 的滑块 A，可以在水平光滑槽中运动，具有刚性系数为 k 的弹簧一端与滑块相连接，别一端固定。杆 AB 长度为 l，质量忽略不计，A 端与滑块 A 铰接，B 端装有质量 m_1，在铅直平面内可绕点 A 旋转。设在力偶 M 作用下转动角速度 ω 为常数。求滑块 A 的运动微分方程。



解：设A位移 x　弹力 $F=-kx$

以块、杆、球为整体研究，水平方向仅受弹力

设其质心水平位移 x_c

由水平方向质心运动定理：$(m+m_1)\dfrac{d^2x_c}{dt^2}=F$

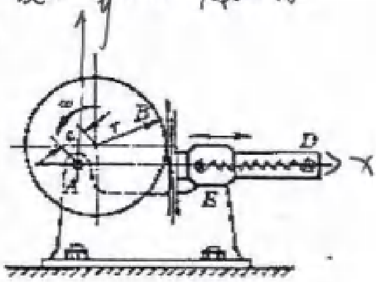
$$x_c=x+|AC|\cdot\sin\varphi=x+\frac{m_1}{m+m_1}\cdot l\cdot\sin\omega t$$

代入：$$(m+m_1)\cdot\frac{d^2\left(x+\frac{m_1}{m+m_1}l\cdot\sin\omega t\right)}{dt^2}=-kx$$

∴A运动方程：$$(m+m_1)\frac{d^2x}{dt^2}-m_1\omega^2l\sin\omega t+kx=0$$

八、图示凸轮机构中，凸轮半径为 r、偏心距为 e。凸轮绕 A 轴以匀角速 ω 转动，带动滑杆 D 在套筒 E 中沿水平方向作往复运动。已知凸轮质量为 m_1，滑杆质量为 m_2，求：在任一瞬时机座螺钉所受的动反力。

设O时刻 D到最右端



解：对凸轮、滑杆整体分析，以A为原点，AB为x轴正向建系，

凸轮质心 $x_{c1}=e\cdot\cos\omega t$　$y_{c1}=e\cdot\sin\omega t$

滑杆 $x_{c2}=x_0+e\cdot\cos\omega t$　$y_{c2}=0$

$$x_c=\frac{m_1x_{c1}+m_2x_{c2}}{m_1+m_2}\qquad y_c=\frac{m_1y_{c1}+m_2y_{c2}}{m_1+m_2}$$

分别对水平竖直方向使用质心运动定理. $(m_1+m_2)\dfrac{d^2x_c}{dt^2}=F_x$　∴ $F_x=-(m_1+m_2)\omega^2e\cos\omega t$

$$(m_1+m_2)\frac{d^2y_c}{dt^2}=F_y-(m_1+m_2)g\qquad F_y=-m_1\omega^2e\sin\omega t+(m_1+m_2)g$$

九、自动传送带如图所示，其运煤量恒为20kg/s，传送带速度为1.5m/s。试求匀速传送时传送带作用于煤块的总水平推力。

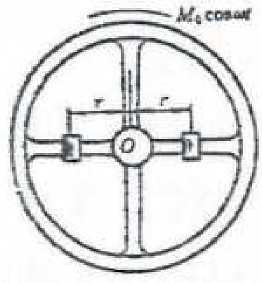
解：取 $\Delta t \to 0$

在 Δt 时间内　煤 $\Delta m = 20kg/s \cdot \Delta t$

由动量定理：$F \cdot \Delta t = \Delta m \cdot v - \Delta m \cdot v_0$　$v_0 = 0m/s$　$v = 1.5m/s$

$\therefore F = 30N$

十、飞轮在力偶矩 $M_0 \cos \omega t$ 作用下绕铅直轴转动，如图所示。沿飞轮的轮辐有两个质量均为 m 的重物，作周期性的运动。初瞬时 $r = r_0$。问 r 应满足什么条件，才能使飞轮以匀角速度 ω 转动。



解：两重物对于 O 轴之动量矩：$L_{Oz} = 2m \cdot \omega r^2$

由动量矩定理：$\frac{d L_{Oz}}{dt} = M$

$\because \omega$ 不变　$\therefore \frac{d L_{Oz}}{dt} = 2m\omega \frac{d(r^2)}{dt} = M_0 \cdot \cos\omega t$

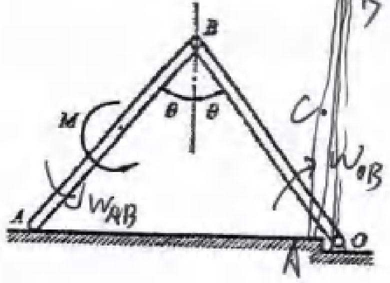
$\therefore 2m\omega \cdot 2r \cdot \frac{dr}{dt} = M_0 \cos\omega t$

$\therefore 2m\omega \cdot r^2 = \frac{M_0}{\omega} \sin\omega t + C$

又 $t=0$ 时 $r = r_0$　$\therefore C = 2m\omega r_0^2$

$\therefore r = \sqrt{r_0^2 + \frac{M_0}{2m\omega^2} \cdot \sin\omega t}$

十一、平面机构由两匀质杆 *AB*，*BO* 组成，两杆的质量均为 *m*，长度均为 *l*，在铅垂平面内运动。在杆 *AB* 上作用一不变的力偶矩 *M*，从图示位置由静止开始运动，不计摩擦。求当杆端 *A* 即将碰到铰支座 *O* 时杆端 *A* 的速度。



解：∵ $\omega_{AB}=\dot\theta$　$\omega_{OB}=\dot\theta$　∴ $\omega_{OB}=\omega_{AB}$

设 A 即将碰到 O 时　$\omega_{OB}=\omega_{AB}=\omega$

∴ $v_B=\omega\cdot l$　以 B 为基点 分析 A　∴ $v_A=v_B+\omega l=2\omega l$

同理分析 A 的质心、∴ $v_{AC}=\frac{3}{2}\omega l$

对整体分析

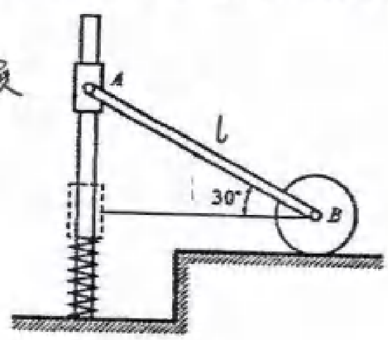
∴ 动能 $T=\frac{1}{2}mv_{AC}^2+\frac{1}{2}J_{C}\cdot\omega_{AB}^2+\frac{1}{2}J_{Oz}\omega_{BO}^2=\frac{1}{2}m\cdot\frac{9}{4}\omega^2l^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}ml^2\cdot\omega^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\omega^2=\frac{4}{3}ml^2\omega^2$

初动能 $T_0=0$　由动能定理：$T-T_0=-2\cdot mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)+M\cdot\theta$

∴ 解得：$\omega=\frac{\sqrt{3}}{2l}\sqrt{\frac{M\theta}{m}-gl(1-\cos\theta)}$

∴ $v_A=2\omega l=\sqrt{3}\sqrt{\frac{M\theta}{m}-gl(1-\cos\theta)}$

十二、均质连杆 *AB* 质量为 4 kg，长 *l* = 600 mm。均质圆盘质量为 6 kg，半径 *r* = 100 mm。弹簧刚度为 *k* = 2 N/mm，不计套筒 *A* 及弹簧的质量。如连杆在图示位置被无初速的释放后，*A* 端沿光滑杆滑下，圆盘作纯滚动。求：（1）当 *AB* 达水平位置而接触弹簧时，圆盘与连杆的角速度；（2）弹簧的最大压缩量 *δ*。



解：(1) AB 水平时 ∵ A 端无水平速度 ∴ AB 杆也不存在水平速度

∴ 圆盘纯滚动 $v_B=0$　∴ $\omega_{盘}=0$

B 为 AB 杆速度瞬心　∴ AB 杆动能 $T=\frac{1}{2}J_{Bz}\omega_{AB}^2$

由动能定理　$T-T_0=mg\cdot\frac{1}{2}l\sin\theta$

∴ $\omega_{AB}=5$ rad/s

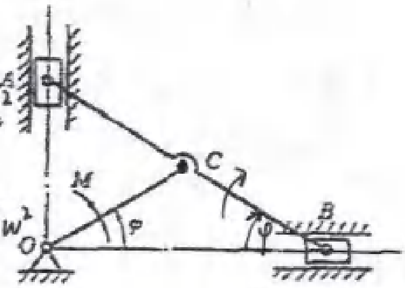
(2) ∵ 最大压缩时，动能为 0　由机械能守恒

$T+0=0+V$　　$V=\frac{1}{2}k\delta^2-mg\cdot\frac{1}{2}\delta$

∴ $\frac{1}{2}k\delta^2-\frac{1}{2}mg\delta=\frac{1}{6}ml^2\omega^2$

解得 $\delta=\frac{mg+\sqrt{m^2g^2+4kmgl\sin\theta}}{2k}\approx 88.1\text{mm}$

十三、椭圆规位于水平面内，由曲柄 OC 带动规尺 AB 运动，如图所示。曲柄和椭圆规尺都是均质杆，质量分别为 m_1 和 $2m_1$，$OC=AC=BC=l$，滑块 A 和 B 的质量均为 m_2。如作用在曲柄上的力偶矩为 M，且 M 为常数。设 $\varphi=0$ 时系统静止，忽略摩擦，求曲柄的角速度和角加速度（以转角 φ 的函数表示）。



解：$\omega_{OC}=\dot{\varphi}$　$\omega_{AB}=\dot{\varphi}$

对系统整体分析：动能 $T=\frac{1}{2}J_{Oz}\cdot\omega_{OC}^2+\frac{1}{2}(2m_1+2m_2)\cdot v_C^2+\frac{1}{2}J_{Cz}\cdot\omega_{AB}^2$

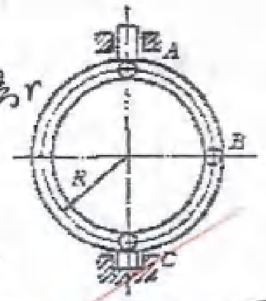
$T=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}m_1l^2\omega^2+\frac{1}{2}(2m_1+2m_2)\omega^2l^2+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\cdot2m_1(2l)^2+2m_2l^2\right]\omega^2$

$=\frac{3}{2}m_1\omega^2l^2+2m_2\omega^2l^2$

由动能定理　$T-T_0=M\varphi$　　$T_0=0$　　$\therefore(\frac{3}{2}m_1+2m_2)\omega^2l^2=M\varphi$

$\therefore\omega=\sqrt{\frac{2M\varphi}{(3m_1+4m_2)l^2}}$　　$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\frac{2M}{(3m_1+4m_2)l^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\cdot\sqrt{\frac{2M\varphi}{(3m_1+4m_2)l^2}}=\frac{M}{(3m_1+4m_2)l^2}$

十四、图示圆环以角速度 ω_0 绕铅垂轴 AC 自由转动，圆环半径为 R，对转轴的转动惯量为 J。圆环中在 A 点处置一质量为 m 的小球，由于微小干扰小球离开 A 点。若不计摩擦，试求当小球达到 B 和 C 点时圆环的角速度和小球的速度。



解：对小球和圆环整体分析：$M_e=0$

由动量矩定理 $\frac{dL_{AC}}{dt}=0$　　$L_{AC_0}=J\cdot\omega_0=J'\omega'$　　设小球到轴距离 r

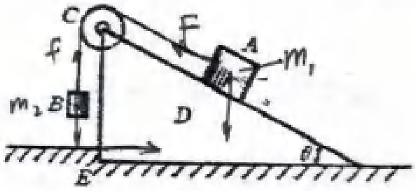
$J'=J+m\cdot r^2$　　$\therefore\omega'=\frac{J\cdot\omega_0}{J+mr^2}$

又由机械能守恒　$\frac{1}{2}J\omega_0^2+mg\cdot2R=\frac{1}{2}J'\omega'^2+\frac{1}{2}mv^2+mg\cdot h$

$\therefore$ 在B点时 $r=R$　$h=R$　　$\therefore\omega_B'=\frac{J\omega_0}{J+mR^2}$　　$v_B=\sqrt{\frac{2mgR-J\omega_0^2(\frac{J}{J+mR^2}-1)}{m}}$

在C点时 $r=0$　$h=0$　　$\therefore\omega_C'=\omega_0$　　$v_C=2\sqrt{gR}$

十五、A 物质量为 m_1，沿楔状物 D 的斜面下降，同时借绕过滑车 C 的绳使质量为 m_2 的物体 B 上升，如图所示。斜面与水平成 θ 角，滑轮和绳的质量以及一切摩擦均略去不计。求楔状物 D 作用于地板凸出部分 E 的水平压力。



解：对A, B, 受力分析，设绳拉力 F

$\therefore F - m_2 g = m_2 a \qquad m_1 g \cdot \sin\theta - F = m_1 a$

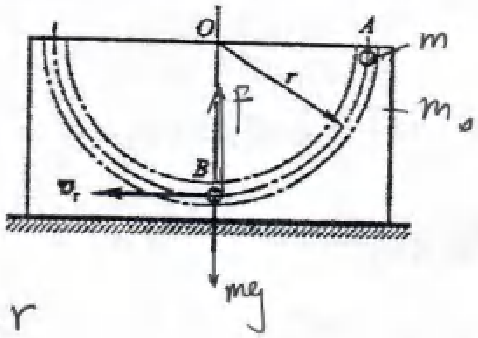
$\therefore a = \dfrac{m_1 \sin\theta - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$

在水平方向对整体分析

由质心运动定理 $\quad \therefore m_1 a \cdot \cos\theta = F_x$

$$\therefore F_x = \frac{m_1(m_1\sin\theta - m_2)}{m_1 + m_2} g \cdot \cos\theta$$

十六、质量为 m_0 的物体上刻有半径为 r 的半圆槽，放在光滑水平面上，原处于静止状态。有一质量为 m 的小球自 A 处无初速地沿光滑半圆槽下滑。若 $m_0 = 3m$，求小球滑到 B 处时相对于物体的速度及槽对小球的正压力。



解：对球和滑槽整体分析

水平方向合外力为0，$\therefore P = P_0 = 0$

设 球速度 V_1 槽速度 V_2

$\therefore -mV_1 + m_0 V_2 = 0$

又由动能定理 $\left(\frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} m_0 V_2^2\right) - 0 = mg \cdot r$

联立解得：$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6gr} \\ V_2 = \sqrt{\frac{6gr}{6}} \end{cases}$

$\therefore V_r = V_1 + V_2 = \frac{2}{3}\sqrt{6gr}$

对球受力分析，在其竖直方向 使用质心运动定理：

$m \cdot \dfrac{V_r^2}{r} = F_N - mg \qquad \therefore F_N = \dfrac{11}{3} mg$

十阅

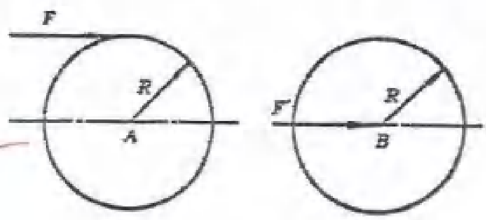
121

一、概念题

1. 两个完全相同的圆盘，放在光滑水平面上，如图所示。在两个圆盘的不同位置上，分别作用两个相同的力 F 和 F。设两圆盘从静止开始运动。某瞬时两圆盘动量 p_A 和 p_B 的关系是（ 3 ）。

① $p_A < p_B$　　② $p_A > p_B$

③ $p_A = p_B$　　④ 不能确定



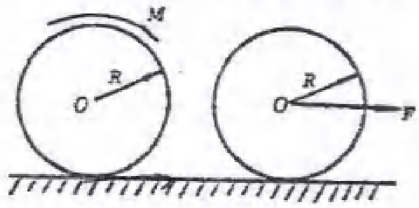
2. 如图所示，一半径为 R，质量为 m 的圆轮，在下列两种情况下沿平面作纯滚动：(1) 轮上作用一顺时针的力偶矩为 M 的力偶；(2) 轮心作用一大小等于 M/R 的水平向右的力 F。若不计滚动摩擦，则两种情况下（ 3 ）。

① 轮心加速度相等，滑动摩擦力大小相等

② 轮心加速度不相等，滑动摩擦力大小相等

③ 轮心加速度相等，滑动摩擦力大小不相等

④ 轮心加速度不相等，滑动摩擦力大小不相等



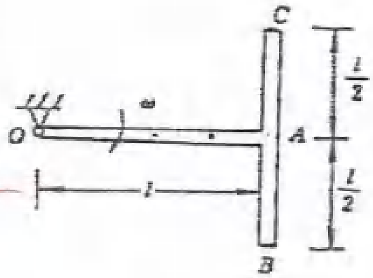
3. 两均质细杆 OA 和 BC 的质量均为 $m = 8$ kg，长度均为 $l = 0.5$ m，固连成如图所示的 T 字形构件，可绕通过 O 点的水平轴转动。当 OA 处于图示水平位置时，该构件的角速度 $\omega = 4$ rad/s，则该瞬时轴 O 反力的铅垂分力 N_{Oy} 的大小为（ 2 ）。

① $N_{Oy} = 24.5$ N

② $N_{Oy} = 32.3$ N

③ $N_{Oy} = 73.8$ N

④ $N_{Oy} = 156.8$ N



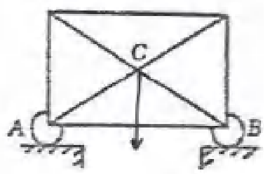
4. 均质长方形板由 A、B 两处的滑动轮支撑在光滑水平面上。初始板处于静止状态，若突然撤去 B 端的支撑轮，试问此瞬时（ 1 ）。

① A 点有水平向左的加速度

② A 点有水平向右的加速度

③ A 点加速度方向垂直向上

④ A 点加速度为零



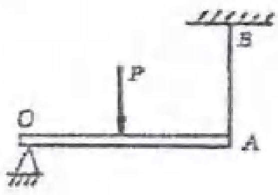
5. 如图所示，水平均质杆 OA 重量为 P，细绳 AB 未剪断前 O 点的支反力为 $P/2$。现将绳剪断，试判断在刚剪断 AB 绳瞬时，下列说法正确的是（ 2 ）

① O 点支反力仍为 $P/2$

② O 点支反力小于 $P/2$

③ O 点支反力大于 $P/2$

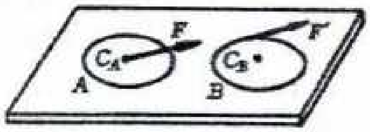
④ O 点支反力为 0



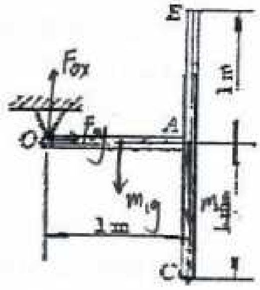
6. 图示二均质圆盘 A 和 B，它们的质量相等，半径相同，各置于光滑水平面上，分别受到 F 和 F' 的作用，由静止开始运动。若 $F=F'$，则在运动开始以后到相同的任一瞬时，二圆盘动能 T_A 和 T_B 的关系为（ 4 ）。

① $T_A=T_B$　　② $T_A=2T_B$

③ $2T_A=T_B$　　④ $3T_A=T_B$



二、图示均质细杆 OA 和 EC 的质量分别为 50kg 和 100kg，并在 A 点相互垂直地焊成一体。若此结构在图示位置由静止状态释放，计算刚释放时，结构的角加速度和杆 OA 与杆 EC 间的约束力偶，不计铰链摩擦。



解：对两杆整体分析

受力分析：$F_{Ox}, F_{Oy}, m_1g, m_2g$

运动分析：以O为转轴的定轴转动

$\therefore L_{Oz}=J_z\omega \qquad \frac{dL_{Oz}}{dt}=M_O^e \Rightarrow J_{Oz}\alpha=M_O^e$

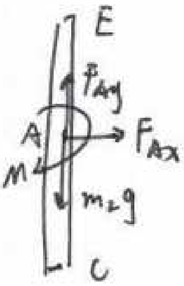
$J_{Oz}=\frac{1}{3}m_1l^2+\frac{1}{12}m_2(2l)^2+m_2l^2 \qquad M_O^e=m_1g\cdot\frac{1}{2}l+m_2g\cdot l$

解得：$\alpha=\frac{5g}{6l}\approx 8.17\ rad/s^2$

对 EC 杆分析：

受力：F_{Ax} F_{Ay} m_2g，力偶 M

$J_{Az}\cdot\alpha=M_A^e \qquad \therefore \frac{1}{12}m_2(2l)^2\cdot\alpha=M$



$\therefore M=\frac{5}{9}mgl\approx 272.2\ N\cdot m$

三、图示匀质圆盘的质量为16kg，半径为100mm，与地面间的动滑动摩擦因数f=0.25。若球心O的初速度$v_O = 400mm/s$，初角速度$\omega = 2rad/s$，试问经过多少时间后球停止滑动?此时球心速度为多大?

解：对圆盘整体分析：受力：mg、F_N、f $\Sigma F_y = 0$：$F_N = mg$

$\therefore f = \mu F_N = 40N$ 设最终状态速度v'，角速度ω'

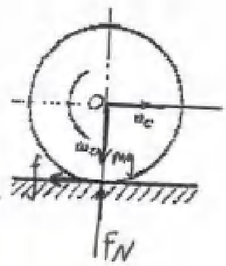
$v' = -\omega' \cdot R$ $\because \frac{dL_{O}}{dt} = M_O^e$ $\therefore J_O\omega' - J_O\omega_0 = -f \cdot R \Delta t$

又 $\frac{dp}{dt} = \sum F^e$ $\therefore mv' - mv_0 = -f\Delta t$

联立解得：$v' = 0.2 m/s$

$\Delta t = \frac{4}{5g} = 0.08s$

$\therefore$ 经过0.08s停止滑动，此时球心速度0.2m/s



四、重物A质量为m_1，系在绳子上，绳子跨过不计质量的固定滑轮D，并绕在鼓轮B上，如图所示。由于重物下降，带动了轮C，使它沿水平轨道滚动而不滑动。设鼓轮半径为r，轮C的半径为R，两者固连在一起，总质量为m_2，对于其水平轴O的回转半径为ρ。求重物A的加速度。

解：对A分析：受力 m_1g、T

$\therefore m_1 g - T = m_1 a_A$

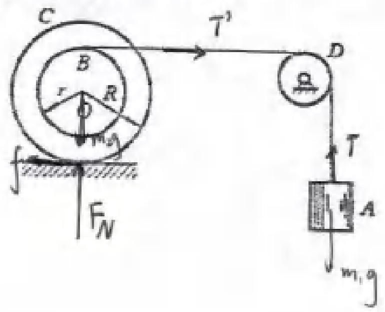
对轮分析，受力 T', m_2g, F_N, f

得：$T' - f = m_2 a_2$

$-T' \cdot r - f \cdot R = -J\alpha$

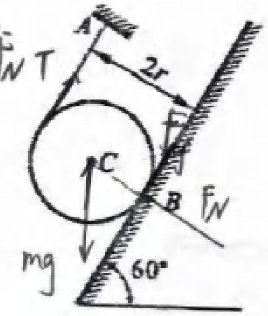
分析运动关系：$\alpha(R+r) = a_A$ $a_2 = \alpha \cdot R = \frac{R}{R+r} \cdot a_A$ $J = m_2\rho^2$

联立解得：$a_A = \frac{(R+r)^2}{m_1(R+r)^2 + m_2(R^2+\rho^2)} \cdot m_1 g$



五、图示均质圆柱体的质量为 m，半径为 r，放在倾角为 60°的斜面上。一细绳缠绕在圆柱体上，其一端固定于点 A，此绳与点 A 相连部分与斜面平行。若圆柱体与斜面间的摩擦因数为 $f = 1/3$，试求其中心沿斜面落下的加速度 a_C。

解：对圆柱体分析，受力 mg、T、F_N、F_f　$F_N = mg\cdot\cos 60°$　$F_f = fF_N$

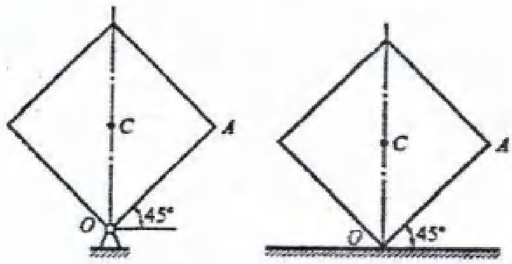


沿斜面方向：$m\cdot a_c = mg\cdot\sin 60° - T - F_f$

$-T\cdot R + F_f\cdot R = -J_{cz}\alpha$　　$\alpha\cdot R = a_c$

联立：$a_c = \frac{3\sqrt{3}-2}{9}g \approx 3.48\,m/s^2$

六、图 a，b 所示为在铅垂面内两种支持情况的均质正方形板，边长均为 a，质量均为 m，初始时均处于静止状态。受某干扰后均沿顺时针方向倒下，不计摩擦，求当 OA 边处于水平位置时，两方板的角速度。



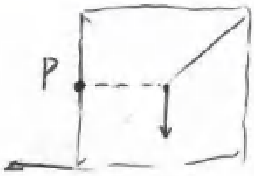
解：对于 a 情况：由动能定理

$mg(\frac{1}{2}\sqrt{2}a - \frac{1}{2}a) = \frac{1}{2}J_{Oz}\omega_a^2$

$J_{Oz} = \frac{1}{6}ma^2 + m(\frac{\sqrt{2}a}{2})^2$

$\therefore \omega_a = \sqrt{\frac{3(\sqrt{2}-1)g}{2a}}$

对于b：水平方向无外力 ∴ C速度向下，又 O速度水平向左 ∴速度瞬心P如图：

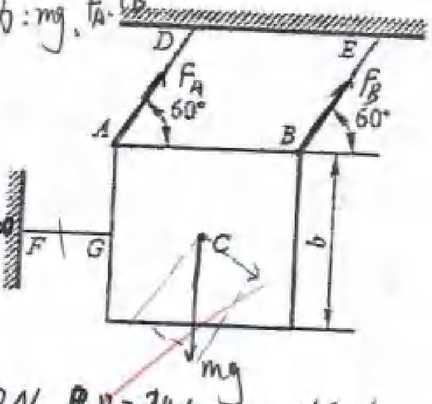


由动能定理：$\frac{1}{2}J_{Pz}\omega_b^2 = mg(\frac{1}{2}\sqrt{2}a - \frac{1}{2}a)$

$J_{Pz} = \frac{1}{6}ma^2 + m(\frac{1}{2}a)^2 = \frac{5}{12}ma^2$

$\therefore \omega_b = \sqrt{\frac{12(\sqrt{2}-1)g}{5a}}$

七、正方形均质板的质量为 40 kg，在铅直平面内以三根软绳拉住，板的边长 $b=100$ mm，如图所示。求：（1）当软绳 FG 剪断后，木板开始运动的加速度以及 AD 和 BE 两绳的张力；（2）当 AD 和 BE 两绳位于铅直位置时，板中心 C 的加速度和两绳的张力。



解：(1) 对板分析 ∵A,B点速度方向相同 ∴板为平动，只受力：mg、F_A、F_B

对绳方向分析 $a=0$ ∴ $mg\cdot\cos30^\circ=F_A+F_B$ ①

垂直绳方向：$mg\cdot\sin30^\circ=m\cdot a_C$ ② ∴ $a_C=\frac{1}{2}g$

∵$\alpha=0$ ∴ $\sum M_C^F=0$ ∴ $-F_A\cdot\sin60^\circ\cdot\frac{1}{2}b-F_A\cdot\cos60^\circ\cdot\frac{1}{2}b+F_B\sin60^\circ\cdot\frac{1}{2}b-F_B\cos60^\circ\cdot\frac{1}{2}b=0$

与① 联立，解得：$F_A=\frac{\sqrt{3}-1}{4}mg$　$F_B=\frac{\sqrt{3}+1}{4}mg$

∴对板加速度：$a_C=\frac{1}{2}g\approx4.9m/s^2$　AD张力为 $F_A=\frac{\sqrt{3}-1}{4}mg\approx72N$　BE张力 $F_B\approx268N$

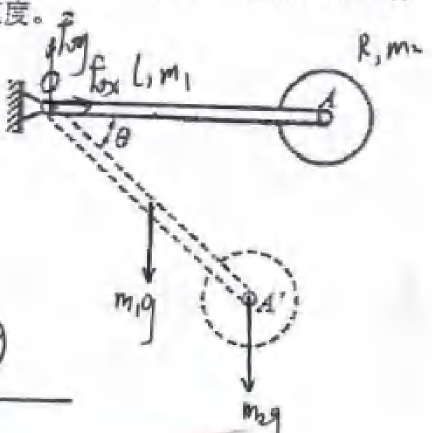
(2) 由动能定理：$\frac{1}{2}mv^2=mg\cdot l(1-\sin60^\circ)$　无水平外力 ∴ $a_{Cx}=0$

又 $ma_{Cy}=F_A+F_B-mg$　以D为基点分析A ∴ $\vec{a}_A=0+\vec{a}_{AD}^\tau+\vec{a}_{AD}^n$ ∵ $\vec{a}_{AD}^\tau=a_{Cx}=0$

$a_{AD}^n=\omega^2\cdot l=\frac{v_C^2}{l}$　∴ $a_A=\frac{v_C^2}{l}=a_{Cy}$　又$\alpha=0$ ∴ $-F_A\cdot\frac{1}{2}b+F_B\cdot\frac{1}{2}b=0$

联立：$F_A=F_B=\frac{1}{2}mg(3-\sqrt{3})\approx248.5N$

八、均质细杆 OA 可绕水平轴 O 转动，另一端铰接一均质圆盘，圆盘可绕 A 在铅直面内自由旋转，如图所示。已知杆 OA 长 l，质量为 m_1；圆盘半径 R，质量为 m_2。摩擦不计，初始时杆 OA 水平，杆和圆盘静止。求杆与水平线成 θ 角的瞬时，杆的角速度和角加速度。



解：对圆盘分析：位置O转到 只受重力与杆约束力，无外力矩

∴圆盘平动，等效为在A处的质点

对杆和盘整体分析：受力：$m_1g, m_2g, F_{Ox}, F_{Oy}$

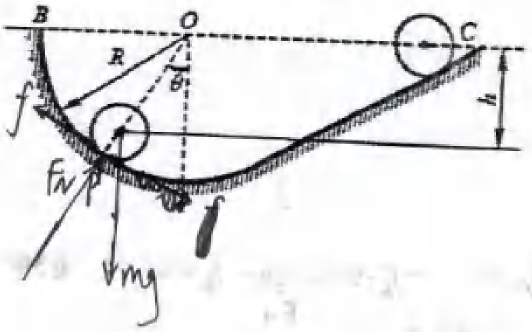
由动能定理，$\frac{1}{2}J_{Oz}\omega^2=m_1g\cdot\frac{1}{2}l\cdot\sin\theta+m_2g\cdot l\cdot\sin\theta$

$J_{Oz}=\frac{1}{3}m_1l^2+m_2l^2$　∴ $\omega=\sqrt{\frac{3m_1g+6m_2g}{m_1l+3m_2l}\sin\theta}$

∵ $\omega=\frac{d\theta}{dt}$　$\alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{3m_1g+6m_2g}{m_1l+3m_2l}\right)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos\theta\cdot\sqrt{\frac{3m_1g+6m_2g}{m_1l+3m_2l}\sin\theta}$

$=\frac{3m_1g+6m_2g}{2m_1l+6m_2l}\cdot\cos\theta$

九、图示质量为 m，半径为 r 的均质圆柱，开始时其质心位于与 OB 同一高度的点 C。设圆柱由静止开始沿斜面向下作纯滚动，当它滚到半径为 R 的圆弧 AB 上时，求在任意位置上对圆弧的正压力和摩擦力。



解：对~~球~~圆柱分析，为θ时，速度瞬心P

由动能定理：$\frac{1}{2}J_P w^2 = mg(R-r)\cdot\cos\theta$

又 $\begin{cases} mg\cdot\sin\theta - f = ma_\tau \\ f\cdot r = J_c\alpha \end{cases}$　　$a_\tau = \alpha\cdot r$

$\therefore f = \frac{1}{3}mg\sin\theta$

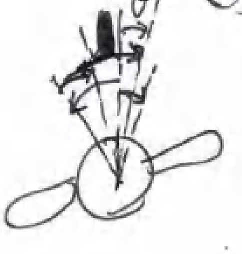
又 $F_N - mg\cos\theta = m\cdot a^n$　　$a^n = \frac{v^2}{R-r} = \frac{w^2\cdot r^2}{R-r} = \frac{4}{3}g\cdot\cos\theta$

$\therefore F_N = \frac{7}{3}mg\cdot\cos\theta$

*十、假设宇航员出舱在太空中漫步，如果他不希望利用助推火箭的推力，仅仅依靠自身的力量，在身体初始角速度等于零的情况下，能否实现绕身体纵轴（纵轴定义为：直立时从头到脚的连线）的180度转体动作？请举例加以说明。

解：

将人体看作上下两部分，两部分间(腰)可旋转，
加上部有两个质量块(手臂)。



转体时：① 将手臂张开，上部分转动惯量 J_1，下部分 J
扭动腰，两部分相对转动 φ　∴下部分转动 $\frac{J_1}{J_1+J}\varphi$，上部分转动 $\frac{J}{J_1+J}\varphi$

② 收回手臂，上部分转动惯量 J_2　下部分仍为 J
扭动腰回到最初状态：下部分转动 $\frac{J_2}{J_2+J}\varphi$　上部分转动 $\frac{J}{J_2+J}\varphi$

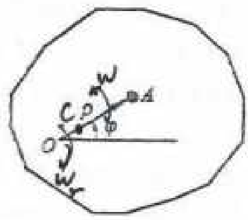
$\therefore$ 整体转动 $\overset{\text{即上部分转动}}{\theta} = \frac{J_1}{J_1+J}\varphi - \frac{J_2}{J_2+J}\varphi = \frac{(J_2-J_1)J\varphi}{(J_1+J)(J_2+J)}$　　$\because J_1 > J_2$

$\therefore$ 转过了一个θ角

不断重复①②，则能转过180°

4
阅
12.1

*十一、在光滑水平面上有一质量为 M 的任意形状的薄板，O 点为薄板的质心，其中心回转半径为 ρ_0，薄板上有一质量为 m 的甲虫 A。甲虫 A 相对于薄板的运动规律 $\rho(t)$、$\varphi(t)$ 为已知。求在任意时刻薄板运动的绝对角速度 Ω。(选自《力学与实践》，No.6，1984)



解：对甲虫和板整体分析，水平方向无外力 ∵ $\Sigma F^e=0$ $\Sigma M^e=0$ ∴质心位置不变

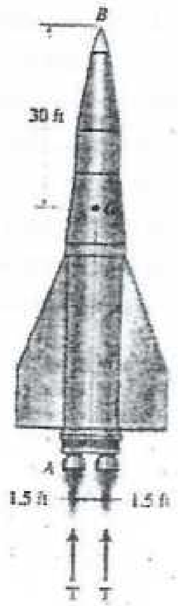
设O到C距离 d_1，A到C距离 d_2　$d_1=\frac{m}{M+m}\rho(t)$　$d_2=\frac{M}{M+m}\rho(t)$　$\frac{dL_C}{dt}=0$

对任意时刻：设AO连线绕C角速度 ω　∴ $L_C=M\cdot d_1^2\cdot\omega+md_2^2\omega-M\rho_0^2\omega_r$

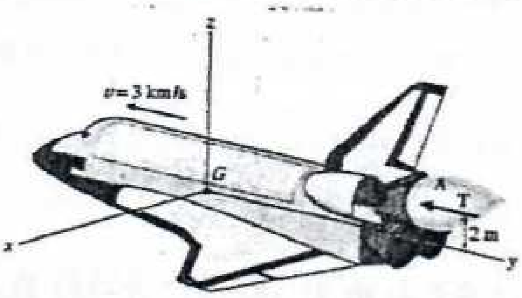
设初始时静止 则 $L_{C0}=0$　∴ $\omega=\frac{M\rho_0^2\omega_r}{Md_1^2+md_2^2}$　又 $\omega_r=\dot\varphi(t)$

绝对角速度 $\omega_a=(-\omega_r)+\omega=\left(\frac{(M+m)\rho_0^2}{m\rho^2(t)}-1\right)\dot\varphi(t)$

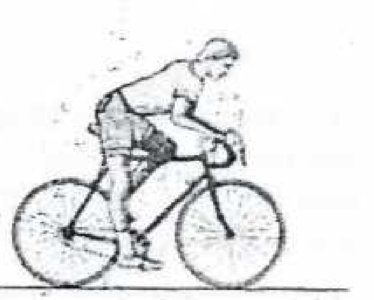
*十二、The rocket has a weight of 20 000 lb, mass center at G, and radius of gyration about the mass center at k_G=21 ft when it is fired. Each of its two engines provides a thrust T=50 000 lb. At a given instant, engine A suddenly fails to operate. Determine the angular acceleration of the rocket and the acceleration of its nose B.



*十三、The space shuttle is located in "deep space", where the effects of gravity can be neglected. It has a mass of 120 Mg, a center of mass at G, and a radius of gyration $(k_G)_x$=14 m about the x axis. It is originally traveling forward at v=3 km/s when the pilot turns on the engine at A, creating a thrust $T=600(1-e^{-0.3t})$ kN, where t is in seconds. Determine the shuttle's angular velocity 2 s later.



*十四、**SAFETY PERFORMANCE OF A BICYCLE:** One of the most common accidents one can have on a bicycle is to flip over the handle bars. Obtain the necessary measurements of a standard-size bicycle and its mass and center of mass. Consider yourself as the rider, with center of mass at your navel. Perform an experiment to determine the coefficient of kinetic friction between the wheels and the pavement. With this data, calculate the possibility of flipping over when (a) only the rear brakes are applied, (b) only the front brakes are applied, and (c) both front and rear brakes are applied simultaneously. What effect does the height of the seat have on these results? Suggest a way to improve the bicycle's design, and write a report on the safety of cycling based on this analysis.

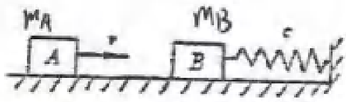


一、概念题。

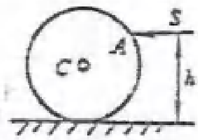
1. 已知在同一光滑水平面上平移的两个小球发生对心碰撞后，互换了速度，则（ ② ）。
   ① 其碰撞为弹性碰撞
   ② 其碰撞为完全弹性碰撞
   ③ 其碰撞为塑性碰撞
   ④ 碰前两球的动能相同，但质量不同

2. 设锤的质量为 M，桩的质量为 m_1，锻件连同砧座的质量为 m_2。为了提高打桩和锻造的效率，则应（ ① ）。
   ① $M<m_1$，$M>m_2$
   ② $M>m_1$，$M<m_2$
   ③ $M>m_1$，$M>m_2$
   ④ $M<m_1$，$M<m_2$

3. 物块 B 的质量为 m_B，置于光滑水平面上，并与一刚度系数为 c 的水平弹簧相连，开始时处于静止；另一质量为 m_A 的物体 A 以速度 v 撞击 B 物块，如图所示。设碰撞是塑性的，碰撞后两物体一起以速度 u 向右运动，则两物块共同前进的最大距离 $s=$（ $\dfrac{m_A v}{\sqrt{(m_A+m_B)c}}$ ）。

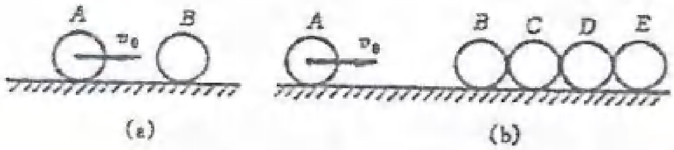


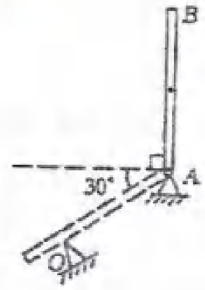
4. 如图所示，一半径为 r 的均质球静止放置在水平地面上，今在球上 A 点作用一水平冲量 S，欲使球开始滚动而不滑动，则 A 点距地面的高度应为 $h=$（ $\frac{7}{5}r$ ）。



5. 具有质量对称面的定轴转动刚体，当其质心在转轴 O 上时，该刚体的撞击中心到转轴 O 的距离 h 应为（无穷大）。

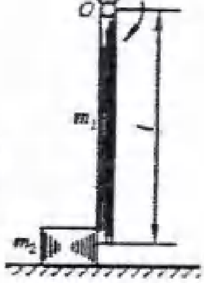
6. 图 a、图 b 中各球质量及半径都相等，A 球以速度 v_0 在水平面上纯滚动，其余各球皆静止。设发生完全弹性正碰撞，各球间摩擦不计，则
   （1）只有 A、B 两球时，碰撞后各球的速度分别为（ 0，v_0 ）；
   （2）有 A、B、C、D、E 五个小球时，碰撞后各球的速度分别为（ $0,0,0,0,v_0$ ）。





7. 如图所示，均质细杆 AB 自铅垂静止位置绕 A 轴倒下，碰到固定钉子 O 后弹回至水平位置。碰撞时的恢复因数 e 为（ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ）。

二、一均质杆的质量为 m_1，长为 l，其上端固定在圆柱铰链 O 上，如图所示。杆由水平位置落下，其初角速度为零。杆在铅直位置处撞到一质量为 m_2 的重物，使后者沿着粗糙的的水平面滑动。动滑动摩擦因数为 f。如碰撞是完全塑性的，求重物移动的路程。



解：对杆分析：由动能定理：$\frac{1}{2}J_{Oz}\omega_0^2 = mg\frac{l}{2}$　$\therefore \omega_0=\sqrt{\frac{3g}{l}}$

对碰撞过程分析：设碰撞中总冲量 ΔI，碰后速度为 V_2，W_2

对物块：$\Delta I = m_2 V_2$　对杆：$\Delta I \cdot l = J_{Oz}(\omega_0-\omega_2)$

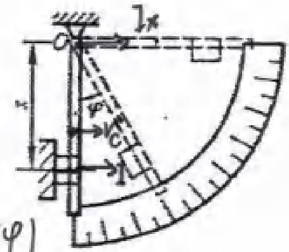
又 $\because e=0$　$\therefore V_2-\omega_2 l=0$

解得：$V_2=\frac{m_1}{3m_2+m_1}\sqrt{3gl}$　摩擦力 $F_f=f\cdot m_2 g$

由动能定理：$0-\frac{1}{2}m_2V_2^2=-F_f\cdot\Delta S$

$\therefore$ 距离 $\Delta S=\frac{3l}{2f}\left(\frac{m_1}{m_1+3m_2}\right)^2$

三、如图所示，在测定碰撞恢复因数的仪器中，有一均质杆可绕水平轴 O 转动，杆长为 l，质量为 m_1。杆上带有用试验材料所制的样块，质量为 m。杆受重力作用由水平位置落下，其初角速度为零。在铅直位置时与障碍物相碰。如碰撞后杆回到与铅直线成 φ 角处，求恢复因数 k。又问：在碰撞时欲使轴承不受附加压力，样块到转轴的距离 x 应为多大？



解：对杆和重物整体分析：对碰前过程和碰后过程分别用动能定理

设质心位置距O点 x_C

$\therefore \frac{1}{2}J_{Oz}\omega_1^2-0=mg\cdot x_C$　$0-\frac{1}{2}J_{Oz}\omega_2^2=-mg\,x_C(1-\cos\varphi)$

$\therefore \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2=\frac{1}{1-\cos\varphi}$　$\therefore k=\frac{\omega_2\cdot x}{\omega_1\cdot x}=\sqrt{1-\cos\varphi}$

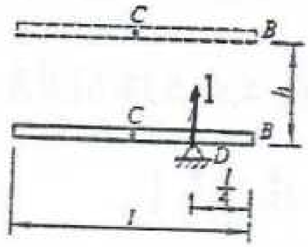
设碰撞时碍碍冲量 I，O处水平冲量 I_x，O处无竖直冲量

$\therefore I+I_x=(m+m_1)V_C$　又 $I\cdot x=J_{Oz}\cdot\omega$　$V_C=\omega\cdot x_C$

解得：$I_x=\left(\frac{(m+m_1)x_C x}{J_{Oz}}-1\right)I$　当 $x=\frac{J_{Oz}}{(m+m_1)x_C}$ 时 无附加轴承力

$\because J_{Oz}=\frac{1}{3}m_1l^2+mx^2$　$x_C=\frac{\frac{1}{2}m_1l+mx}{m+m_1}$　代入 得：$x=\frac{2}{3}l$

四、图示质量为 m，长为 l 的均质杆 AB，水平地自由下落一段距离 h 后，与支座 D 碰撞（$BD=l/4$）。假定碰撞是完全塑性的，求碰撞后的角速度 ω 和碰撞冲量 I。



解：设碰撞过程中冲量为 I，之后角速度 w

对碰撞前分析：$\frac{1}{2}mv^2-0=mgh$　∴ $v=\sqrt{2gh}$

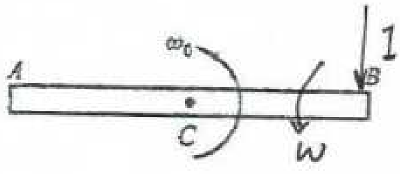
对碰撞过程：$m(v'-v)=-I$

$I\cdot\frac{1}{4}l=J_{Cz}\cdot(w-0)$　又 $w\cdot\frac{1}{4}l=v'$

解得：$w=\frac{12}{7l}v=\frac{12}{7l}\sqrt{2gh}$

$I=?$　$I=\frac{4J_{Cz}w}{l}=\frac{4m}{7}\sqrt{2gh}$

五、均质细杆 AB 置于光滑的水平面上，围绕其重心 C 以角速度 ω_0 转动，如图所示。如突然将点 B 固定（作为转轴），问杆将以多大的角速度围绕点 B 转动？



解：∵一直无 AB 方向速度　∴ B 处无此方向冲量.

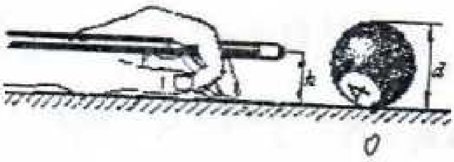
设 B 处冲量为 I，此后角速度 w

∴ $m(v-0)=I$

$-I\cdot\frac{1}{2}l=J_{Cz}(w-w_0)$

又 $v=\frac{1}{2}l\cdot w$，解得：$w=\frac{1}{4}w_0$

六、用台球棍打击台球，使台球不借助摩擦而能作纯滚动。假设棍对球只施加水平力，试求满足上述运动的球棍位置高度h。



解：设之后台球的速度v，角速度ω

设冲量I

$\therefore I = m(v-0)$

$I \cdot h = J_{Oz}(\omega-0)$　其中$J_{Oz} = m(\frac{d}{2})^2 + \frac{2}{5}m(\frac{d}{2})^2$

若纯滚动，则 $v=\omega \cdot \frac{d}{2}$

$\therefore$解得：$h=\frac{7}{10}d$

一、概念题

1．定轴转动刚体，其转轴垂直于质量对称平面，且不通过质心 C，当角速度 $\omega=0$，角加速度 $\alpha\neq0$ 时，其惯性力系的合力大小为 $F_I=ma_C$，合力作用线的方位是（ ③ ④ ）（设转轴中心 O 与质心 C 的连线为 OC；J_C、J_O 分别为刚体对质心及转轴中心的转动惯量）。

① 合力作用线通过转轴轴心，且垂直于 OC

② 合力作用线通过质心，且垂直于 OC

③ 合力作用线至轴心的垂直距离为 $h=J_O\alpha/ma_C$

④ 合力作用线至轴心的垂直距离为 $h=OC+J_C\alpha/ma_C$

2．刚体作定轴转动时，附加动反力等于零的充分必要条件是（ ④ ）。

① 转轴是惯性主轴　　② 质心位于转轴上

③ 转轴与质量对称面垂直　　④ 转轴是中心惯性主轴

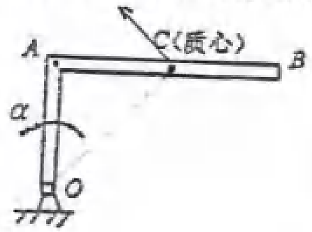
3．长度为 r 的杆 OA 与质量为 m、长度为 $2r$ 的均质杆 AB 在 A 端垂直固接，可绕轴 O 转动。假设在图示瞬时，角速度 $\omega=0$，角加速度为 α，则此瞬时 AB 杆惯性力系简化的主矢 F_I 和主矩 M_I 的大小应分别为（②③）。

① $F_I=mr\alpha$（作用于 O 点），$M_I=mr^2\alpha/3$

② $F_I=\sqrt{2}mr\alpha$（作用于 A 点），$M_I=4mr^2\alpha/3$

③ $F_I=\sqrt{2}mr\alpha$（作用于 O 点），$M_I=7mr^2\alpha/3$

④ $F_I=\sqrt{3}mr\alpha$（作用于 C 点），$M_I=7mr^2\alpha/3$



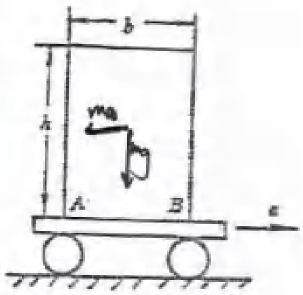
4．如图所示，用小车运送货箱。已知货箱宽 $b=1$m，高 $h=2$m，可视为均质长方体。货箱与小车间的静摩擦因数 $f=0.35$，为了安全运送，则小车的最大加速度 a_{max} 应为（ ① ）。

① 0.35g

② 0.2g

③ 0.5g

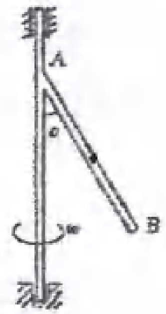
④ 0.4g



5．均质细杆 AB 长为 l，重为 P，与铅垂轴固结成角 $\alpha=30°$，并以匀角速度 ω 转动，则杆惯性力系的合力的大小等于（ ④ ）。

① $\dfrac{\sqrt{3}l^2P\omega^2}{8g}$　　② $\dfrac{l^2P\omega^2}{2g}$

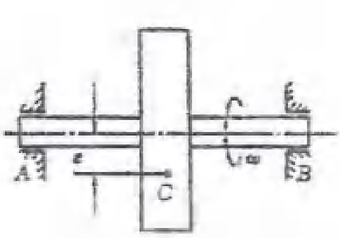
③ $\dfrac{lP\omega^2}{2g}$　　④ $\dfrac{lP\omega^2}{4g}$



6．图示飞轮由于安装的误差，其质心不在转轴上。如果偏心距为 e，飞轮以匀角速度 ω 转动时，轴承 A 处的附加动反力的大小为 F''_{NA}，则当飞轮以匀角速度 2ω 转动时，轴承 A 处的附加动反力的大小为（ ④ ）。

① F''_{NA}　　② $2F''_{NA}$

③ $3F''_{NA}$　　④ $4F''_{NA}$

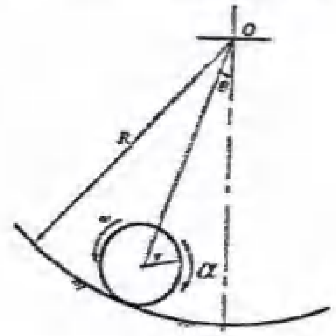


7. 质量为 m，半径为 r 的均质圆柱体，沿半径为 R 的圆弧面作纯滚动，其瞬时角速度 ω 及角加速度 α 方向如图所示，将其上的惯性力系向其质心简化，所得惯性力的主矢、主矩大小分别为

主矢切向＝（ $m\alpha r$ ），

主矢法向＝（ $m\cdot\frac{\omega^2 r^2}{R-r}$ ）；

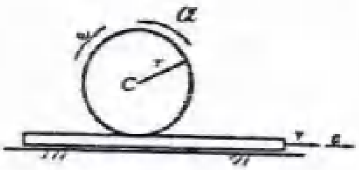
主矩＝（ $\frac{1}{2}mr^2\cdot\alpha$ ）。



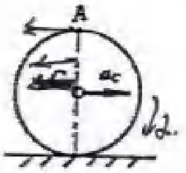
8. 均质圆柱体质量为 m，半径为 r，相对于一运动的平板作纯滚动，其角速度与角加速度的方向如图所示，且平板的速度与加速度都是水平向右。将圆柱体上的惯性力系向其质心简化时，其惯性力的主矢、主矩的大小分别为

主矢＝（ $ma - m\alpha\cdot r$ ），

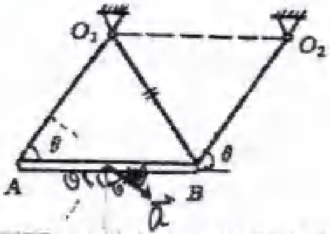
主矩＝（ $\frac{1}{2}mr^2\cdot\alpha$ ）。



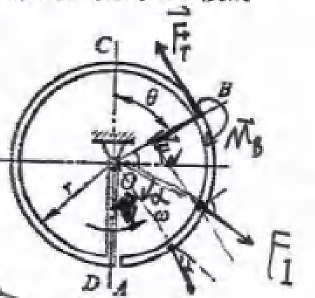
9. 均质圆盘的质量为 m，半径为 r，在水平直线轨道上作纯滚动，如图所示。若圆盘中心 C 的加速度为 a_C，则圆盘的惯性力向盘上最高点 A 简化的主矢大小 F_I＝（ ma_C ），方向为（水平向左）；主矩大小 M_{IA}＝（ $\frac{1}{2}mr\cdot a_C$ ），转向为（顺时针）。



10. 均质杆 AB 的质量为 m，有三根等长细绳悬挂在水平位置，在图示位置突然割断 O_1B，则该瞬时杆 AB 的加速度为（ $g\cdot\cos\theta$ ）。（表示为 θ 的函数，方向在图中画出）



二、图示为均质细杆弯成的圆环，半径为 r，转轴 O 通过圆心垂直于环面，A 端自由，AD 段为微小缺口，设圆环以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，环的线密度为 ρ，不计重力，求任意截面 B 处对 AB 段的约束力。



对AB整体分析

解：AB段质量 $m_{AB}=\rho\cdot(\pi-\theta)\cdot r$　对于每一小段，$a=\omega^2\cdot r$

$\therefore dF_I = dm\cdot a = \rho\omega^2 r^2 d\alpha$

∵ 惯性力系 等效于AB段中心处

$$F_I=\int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} dF_I\cdot\cos\alpha = \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} \rho\omega^2 r^2\cdot\cos\alpha\, d\alpha = 2\rho\omega^2 r^2\cos\frac{\theta}{2}$$

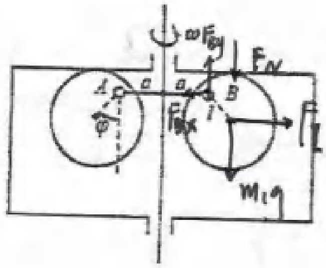
设B处约束力如图

则：$\sum F^\tau=0$　$F_T - F_I\sin(\frac{\pi-\theta}{2})=0$　$\Rightarrow$ $F_T=\rho\omega^2 r^2(1+\cos\theta)$

$\sum F^n=0$　$F_N - F_I\cdot\cos(\frac{\pi-\theta}{2})=0$　$\Rightarrow$ $F_N=\rho\omega^2 r^2\sin\theta$

$\sum M_B=0$　$\therefore F_I\cdot r\cdot\sin(\frac{\pi-\theta}{2}) - M_B=0$　$\Rightarrow$ $M_B=\rho\omega^2 r^3(1+\cos\theta)$

三、调速器由两个质量为 m_1 的均质圆盘构成，圆盘偏心地铰接于距转动轴为 a 的 A、B 两点。调速器以~~等角速度~~ ω 绕铅直轴转动，圆盘中心到悬挂点的距离为 l，如图所示。调速器的外壳质量为 m_2，并放在圆盘上。如不计摩擦，求角速度 ω 与偏角 φ 之间的关系。



解：以圆盘为研究对象：其惯性力 $F_I = m_1 w^2(a+l\sin\varphi)$

由达朗贝尔原理：

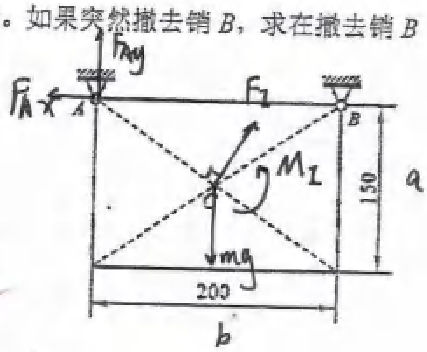
$\Sigma M_B(\vec{F})=0 \quad \therefore F_I\cdot l\cdot\cos\varphi - m_1 g l\sin\varphi - F_N\cdot l\sin\varphi = 0$

对壳分析可得 $F_N = \frac{1}{2}m_2 g$

所以得：$m_1 w^2(a+l\sin\varphi) = (m_1 g+\frac{1}{2}m_2 g)\tan\varphi$

即 $w^2 = \dfrac{(m_1+\frac{1}{2}m_2)g\cdot\tan\varphi}{m_1(a+l\sin\varphi)}$

四、图示长方形均质平板，质量为 27 kg，由两个销 A 和 B 悬挂。如果突然撤去销 B，求在撤去销 B 的瞬时平板的角加速度和销 A 的约束力。



解：对木板整体分析，其惯性力 $F_I = |AC|\cdot\alpha\cdot m$

$= m\alpha\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

惯性力矩 $M_{IC} = J_C\cdot\alpha = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)\cdot\alpha$

由达朗贝尔原理：

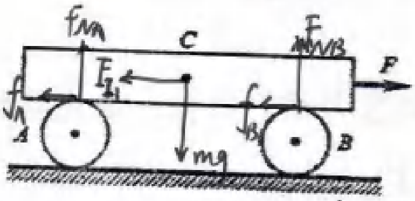
$\Sigma M_A(\vec{F})=0 \quad \therefore M_{IC} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot F_I - mg\cdot\frac{b}{2} = 0$

解得：$\alpha = 47.0\ \mathrm{rad/s^2}$

又 $\Sigma F_x = 0 \quad \therefore -F_{Ax} + F_I\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \quad \therefore F_{Ax} = 95.3N$

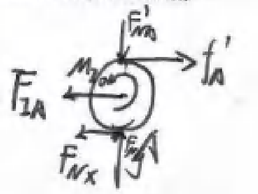
$\Sigma F_y = 0 \quad F_{Ay} - mg + F_I\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \quad \therefore F_{Ay} = 137.6N$

五、图示均质板质量为 m，放在两个均质圆柱滚子上，滚子质量皆为 $m/2$，其半径均为 r。如在板上作用一水平力 $\boldsymbol{F}$，并设滚子无滑动，求板的加速度。



解：设板加速度 a ∴其惯性力 $F_{I1}=m\cdot a$

对板分析：由达朗贝尔原理 $\sum F_x=0$ ∴ $F-F_{I1}-f_A-f_B=0$



对轮A分析：惯性力 $F_{IA}=\frac{1}{2}m\cdot a'=\frac{1}{2}m\cdot\frac{1}{2}a=\frac{1}{4}ma$

惯性力矩 $M_{IO}=J_{O2}\cdot\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\cdot r^2\cdot\frac{1}{2}\frac{a}{r}=\frac{1}{8}mar$

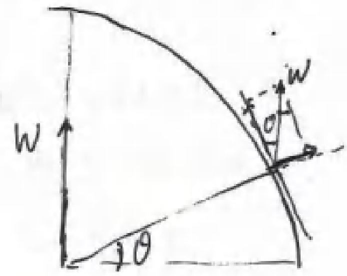
$\sum M_O(F)=0$ ∴ $M_{IO}+F_{IA}\cdot r-f'_A\cdot 2r=0$

∴ $f'_A=\frac{3}{16}ma$

同理可得：$f'_B=\frac{3}{16}ma$

代入：$F-ma-\frac{3}{16}ma-\frac{3}{16}ma=0$ ∴ $a=\frac{8F}{11m}$

*六、在非常有利的条件下，当从正上方俯视时，若发现海洋表面上有一个作逆时针旋转的海洋环流，其旋转周期是 14h，问这个海洋环流是在什么纬度和哪个半球探测到的？（选自《力学与实践》，No.3，1990）



解：对于环流：设其速度 $\vec{v}$ ∴ $\vec{a}_C=2\vec{\omega}\times\vec{v}$

∴ $F_C=2m\omega\cdot v\cdot\sin\theta$

∵ $F_C=\frac{mv^2}{R}=m\cdot\frac{2\pi}{T_{洋流}}\cdot v=2m\omega\cdot v\cdot\sin\theta$

$\omega=\frac{2\pi}{T_{地球}}$ ∴ $\sin\theta=\frac{T_{地球}}{2T_{洋流}}$ ∴ $\theta=\arcsin\frac{24}{28}=\arcsin\frac{6}{7}\approx 60^\circ$

又∵逆时针 在南半球 纬度约60°

5
阅
12,28

一、概念题

1. 在以下约束方程中

①$x^2+y^2=4$　　②$x^2+y^2\le 4$　　③$\dot{x}-r\dot{\varphi}=0$

④ $x^2+y^2=10t$　　⑤$(\dot{x}_1+\dot{x}_2)(y_1-y_2)=(\dot{y}_1+\dot{y}_2)(x_1-x_2)$

属于几何约束的有（① ② ④），属于运动约束的有（③ ⑤）；

属于完整约束的有（① ③ ② ④），属于非完整约束的有（⑤）；

属于定常约束的有（① ② ③ ⑤），属于非定常约束的有（④）。

2. 静力学中的平衡方程和虚功方程都可以用来求解平衡问题，且（①）。

① 静力学平衡方程给出了质点系平衡的必要条件，而虚功方程给出了质点系平衡的充要条件

② 二者都给出了质点系平衡的充要条件

③ 静力学平衡方程给出了质点系平衡的充分条件，而虚功方程给出了质点系平衡的必要条件

④ 静力学平衡方程给出了质点系平衡的必要条件，而虚功方程给出了质点系平衡的充分条件

3. 图示平面机构，CD 连线铅直，杆 $BC=BD$。在图示瞬时，角 $\varphi=30°$，杆 AB 水平，则该瞬时点 A 和点 C 的虚位移大小之间的关系为（③）。并在图上画出虚位移 δr_A，δr_B，δr_C。

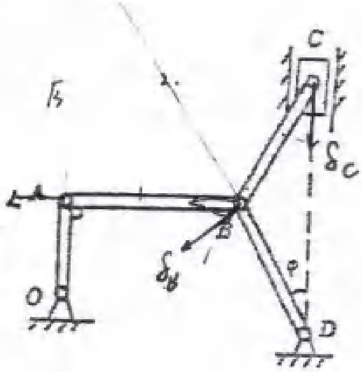
① $\delta r_A=\dfrac{3}{2}\delta r_C$

② $\delta r_A=\sqrt{3}\delta r_C$

③ $\delta r_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\delta r_C$

④ $\delta r_A=\dfrac{1}{2}\delta r_C$

$\frac{1}{2}\sqrt{3}$　$\frac{\sqrt{3}}{2}V_C$



$\delta_C\cdot 2=\delta_A\cdot\sqrt{3}$

4. 图示平面结构中，$AB=BC=AD=l$，角 $\theta=60°$，设杆重及摩擦不计，在铅直力 P 作用下 AC 杆和 CD 杆的内力应分别为（②）。

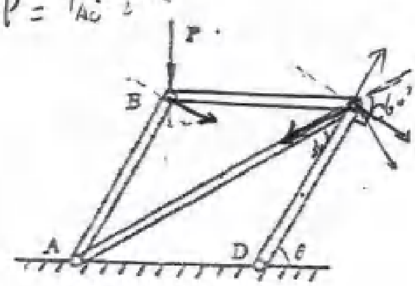
$\frac{1}{2}\delta_B\, P=F_{AC}\cdot\frac{1}{2}\delta_C$

① $S_{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}P$（拉力），$S_{CD}=-\dfrac{1}{2}P$（压力）

② $S_{AC}=P$（拉力），$S_{CD}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}P$（压力）

③ $S_{AC}=-P$（压力），$S_{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}P$（拉力）

④ $S_{AC}=\dfrac{1}{2}P$（拉力），$S_{CD}=\dfrac{1}{2}P$（拉力）



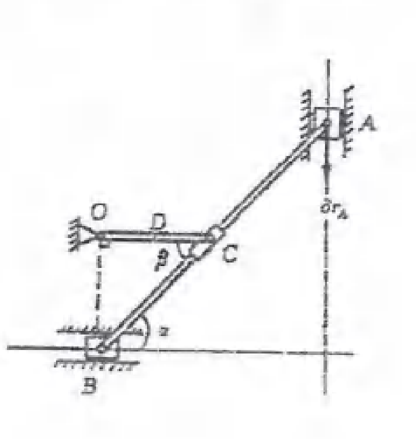
5. 机构在图示瞬时有 $\alpha=\beta=45°$，若 A 点的虚位移为 δr_A，C 为 AB 的中点，则 B 点虚位移的大小 δr_B =（①），杆 OC 中点 D 的虚位移的大小 δr_D =（④）。

① δr_A

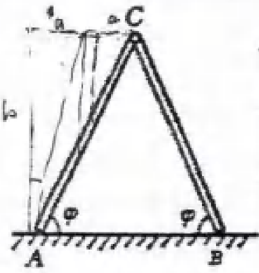
② $0.5\delta r_A$

③ $2\delta r_A$

④ 0



6. 一折梯放在粗糙水平地面上，如图所示。设梯子与地面之间的滑动摩擦系数为f_s，且AC和BC两部分为等长均质杆，则梯子与水平面所成最小角度 $\varphi_{\min}$ 为（ ④ ）。



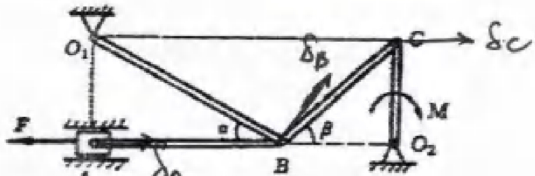
$\frac{2a}{b}=2f_s$

$\tan\varphi=\frac{b}{2a}=\frac{1}{2f_s}$

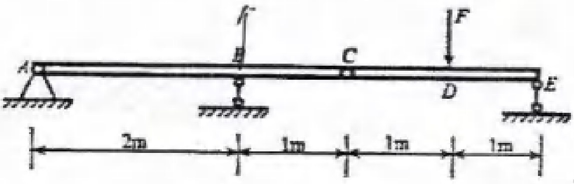
① 0　　② $\operatorname{arccot}\frac{1}{2f_s}$

③ $\arctan\frac{1}{4f_s-1}$　　④ $\arctan\frac{1}{2f_s}$

7. 在图示平面机构中，A、B、O_2和O_1、C分别在两水平线上，O_1A和O_2C分别在两铅垂线上，$\alpha=30°$，$\beta=45°$，A和C点虚位移大小之间的关系为（ $\delta_C=(\sqrt{3}+1)\delta_A$ ）。



8. 为了用虚位移原理求解系统B处反力，需将B支座解除，代以适当的约束力，其时B、D两点虚位移大小之比值 $\delta r_B:\delta r_D=$（ 4:3 ），若已知$F=50$ N，则B处约束力的大小为（ 37.5 ），方向为（ 向上 ）。



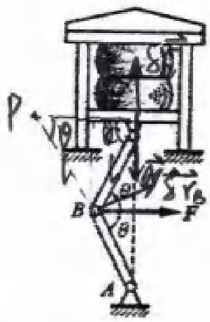
$\omega_{AC}\cdot 3=\omega_{CE}\cdot 2$

$v_B=\omega_{AC}\cdot 2$

$v_C=\omega_{CE}\cdot 1$

$v_B:v_C=2\omega_{AC}:\omega_{CE}$

二、图示曲柄式压榨机的销钉B上作用有一水平力$\boldsymbol{F}$，此力位于平面ABC内，作用线平分$\angle ABC$，$AB=BC$，各处摩擦及杆重不计，求对物体的压缩力。



解：研究对象：压榨机　受力分析：$\vec{F}$、$\vec{N}$

$\therefore \vec{F}\cdot\delta\vec{r}_B+\vec{N}\cdot\delta\vec{r}_0=0$

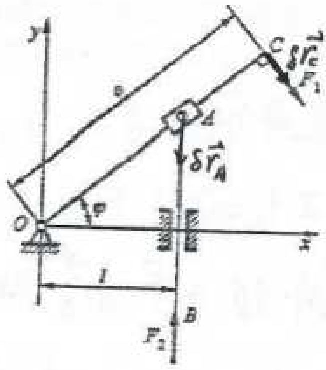
分析运动：绕速度瞬心P

$\therefore v_B:v_C=l:2l\cdot\cos\theta$　　$\therefore \delta r_B=\frac{1}{2\cos\theta}\delta r_0$

$\therefore F\cdot\delta r_B\cdot\sin\theta-N\cdot\delta r_C=0$

$\therefore N=\frac{1}{2}F\cdot\tan\theta$

三、在图示机构中，当曲柄 OC 绕 O 轴摆动时，滑块 A 沿曲柄滑动，从而带动杆 AB 在铅直导槽内移动，不计各构件自重与各处摩擦。求机构平衡时力 F_1 与 F_2 的关系。



解：研究对象：整个系统　　受力分析：$\vec F_1, \vec F_2$

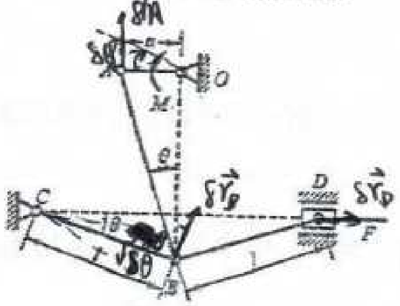
∴ $\delta\vec r_C\cdot\vec F_1 + \delta\vec r_A\cdot\vec F_2 = 0$

$\delta r_C = a\cdot\delta\varphi$　　又 $y_A = l\cdot\tan\varphi$

∴ $\delta y_A = \frac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi$　　$\delta r_A = \delta y_A$

∴ $\delta r_C\cdot F_1 - \delta y_A F_2 = 0$　　∴ $F_1 = \frac{l}{a\cos^2\varphi}\cdot F_2$

四、在图示机构中，曲柄 OA 上作用一力偶，其矩为 M，另在滑块 D 上作用水平力 F。机构尺寸如图所示，不计各构件自重与各处摩擦。求当机构平衡时，力 F 与力偶矩 M 的大小之间的关系。



解：研究对象：整个系统　　受力分析：$\vec F, M$

$\delta\vec r_D\cdot\vec F + \delta\varphi\cdot M = 0$

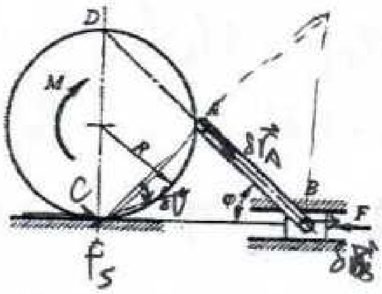
$x_D = 2l\cdot\cos\theta$　　∴ $\delta r_D = \delta x_D = -2l\cdot\sin\theta\cdot\delta\theta$

又 $\delta r_A = a\cdot\delta\varphi$　　$\delta r_B = -l\cdot\delta\theta$

由速度关系　$\delta r_B\cdot\cos 2\theta = \delta r_A\cdot\cos\theta$

代入　∴ $F = \frac{1}{a\tan 2\theta}\cdot M$

五、半径为 R 的滚子放在粗糙水平面上，连杆 AB 的两端分别与轮缘上的点 A 和滑块 B 铰接。现在滚子上施加矩为 M 的力偶，在滑块上施加力 F，使系统在图示位置处于平衡。设力 F 为已知，忽略滚动摩阻，不计滑块和各铰链处的摩擦，不计杆 AB 和滑块 B 的重量，滚子有足够大的重量 P。求力偶矩 M 以及滚子与地面间的摩擦力 F_s。



解：对整体分析：受力 F_s，F，M

$\because \Sigma F_x = 0 \quad \therefore F_s = F$

又 $M\cdot\delta\theta + \vec{F}\cdot\delta\vec{r}_B + \vec{F}_s\cdot\delta\vec{r}_C = 0$

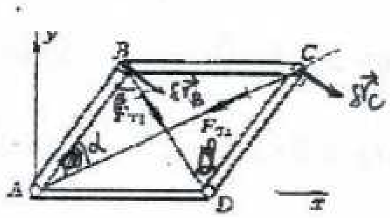
$\because$ P足够大 $\therefore$ 只滚不滑 $\therefore \delta r_C = 0$

又 $\delta r_B\cdot\cos\varphi = \delta r_A = \dfrac{R}{\cos\varphi}\cdot\delta\theta$

代入 $M\cdot\dfrac{\cos^2\varphi}{R}\cdot\delta r_B - F\cdot\delta r_B = 0 \qquad \varphi = 45^\circ$

$\therefore M = 2F\cdot R$

六、四根杆用铰连接组成平行四边形 ABCD，其中 AC 和 BD 用绳连结。绳中张力为 F_{T1} 和 F_{T2}。试证：$F_{T1}:F_{T2} = AC:BD$。



证明：对整体分析，解除约束，受力：$\vec{F}_{T_1}$，$\vec{F}_{T_2}$

$\therefore \vec{F}_{T_1}\cdot\delta\vec{r}_C + \vec{F}_{T_2}\cdot\delta\vec{r}_B = 0$

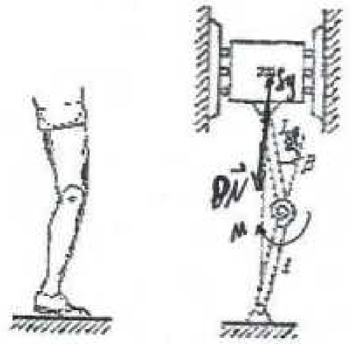
由运动关系，因 $\delta r_C = \delta r_B$

$\therefore F_{T_1}\cdot\sin\alpha = F_{T_2}\cdot\sin\beta$

又 $\dfrac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}BD} = \dfrac{\sin\beta}{\frac{1}{2}AC} \qquad \therefore F_{T_1} : F_{T_2} = \sin\beta : \sin\alpha$

$= AC : BD$

七、为残疾人设计假腿时，关键要求之一是，使他在直线行走中防止膝关节产生弯曲失稳。作为第一次近似，将假腿简化成用扭簧连接的两轻杆系统，如图所示。扭簧产生的力偶矩 $M = k\beta$，k 为扭簧刚度系数，β 为假腿在膝关节处的弯曲角度。试求保证膝关节在 $\beta = 0$ 时稳定的最小 k 值。



解：对整体分析：主动力 N、M

$\therefore \quad N \cdot \delta y + M \cdot \delta\beta = 0$

$\because y = 2l \cdot \cos\frac{\beta}{2} \qquad \therefore \delta y = -l \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \delta\beta$

$\therefore N \cdot l \cdot \sin\frac{\beta}{2} = M$

$\therefore mg \cdot l \cdot \sin\frac{\beta}{2} = k\beta \qquad \beta \to 0$ 时 $\quad \sin\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$

$\therefore k = \frac{1}{2} mgl$

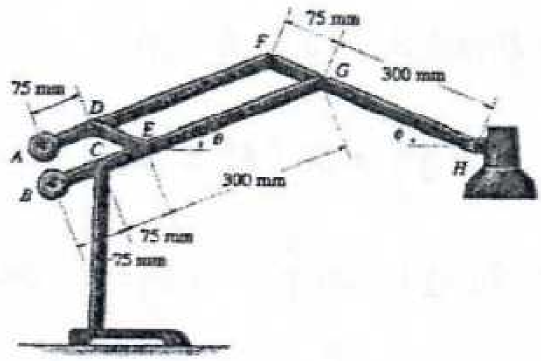
解二：$V = mg \cdot 2l \cdot \cos\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}k\beta^2$

$\frac{dV}{d\beta} = mgl\sin\frac{\beta}{2} + k\beta$

$\frac{d^2V}{d\beta^2} = -\frac{1}{2}mgl\cos\frac{\beta}{2} + k \geq 0 \rightarrow$ 保证函数

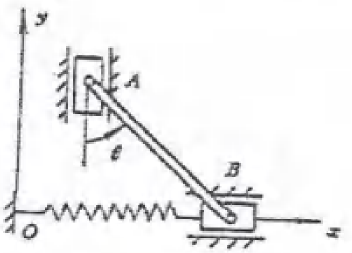
$k \geq \frac{1}{2}mgl$

*八、Determine the mass of A and B required to hold the 400-g desk lamp in balance for any angle θ and ϕ. Neglect the weight of the mechanism and the size of the lamp.

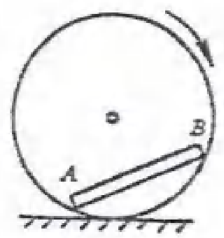


一、概念题

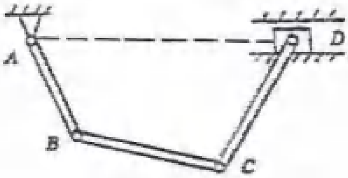
1. 图示平面机构，其广义坐标可选为（ ③ ）。
① x_B 和 θ　　② y_A 和 θ　　③ θ　　④ y_A 和 x_B



题 1 图



题 2 图

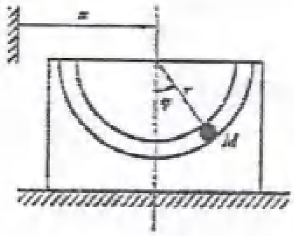


题 3 图

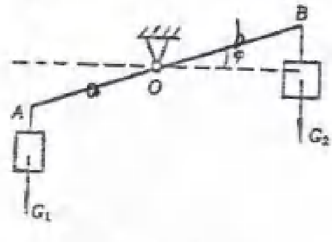
2. 图示平面系统，圆环内放置的直杆 AB 可自由运动，圆环在水平面上作纯滚动，则该系统的自由度数为（ ④ ）。
① 3　　② 1　　③ 4　　④ 2

3. 图示平面机构的自由度数为（ 2 ）。

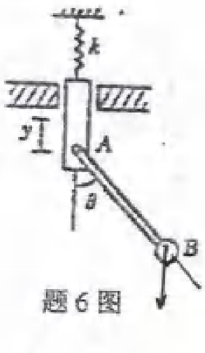
4. 如图所示，矩形物块重为 P，放在光滑的水平面上，其上有半径为 r 的圆槽。小球 M 重 W，可在圆槽内运动，不计各处摩擦，则该系统有（ 2 ）个自由度，若取 x 及 φ 为广义坐标，则对应于 x 的广义力为（ 0 ）。



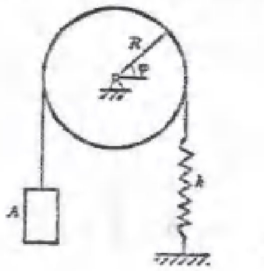
5. 在铅垂平面内放置的杠杆 AOB，支于光滑点 O，臂长 $OA=a$，$OB=b$，两端 A、B 分别挂有重量为 G_1、G_2 的物体，如图所示。如选杠杆与水平方向的夹角 φ 为广义坐标，则对应的广义力 F_Q 为（ $(G_1\cdot a-G_2 b)\cdot\cos\varphi$ ）。



题 5 图



题 6 图



题 7 图

6. 在图示系统中，已知摆锤 B 的质量为 m，摆长为 b，其它的物体的质量忽略不计，弹簧的刚度系数为 k，则该系统对应于广义坐标 y（y 从点 A 的静平衡位置算起）和 θ 的广义力分别为 $F_{Qy}=$（ $-ky$ ），$F_{Q\theta}=$（ $-mgb\sin\theta$ ）。

7. 如图所示，均质滑轮质量为 M，半径为 R，物体 A 质量为 m，弹簧的刚度系数为 k，若取 φ 为广义坐标（$\varphi=0$ 时，系统处于平衡状态），则系统的拉格朗日函数 L 为（ $(\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}M)R^2\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}kR^2\varphi^2$

8. 若系统的拉格朗日函数中不显含几个广义坐标，则这些广义坐标称为（　　　　）。
循环坐标

二、应用拉格朗日方程推导单摆的动力学微分方程。分别以下列参数为广义坐标：（1）转角φ；（2）水平坐标x；（3）铅直坐标y。

解：(1) 对于广义坐标φ $T=\frac{1}{2}ml^2\cdot\dot\varphi^2$ $V=-mgl\cos\varphi$

$\therefore L=T-V=\frac{1}{2}ml^2\cdot\dot\varphi^2+mgl\cos\varphi$ $\therefore \frac{\partial L}{\partial\varphi}=-mgl\sin\varphi$

$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=ml^2\dot\varphi$ $\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$ $\therefore ml^2\ddot\varphi+mgl\sin\varphi=0$

即 $\ddot\varphi+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$

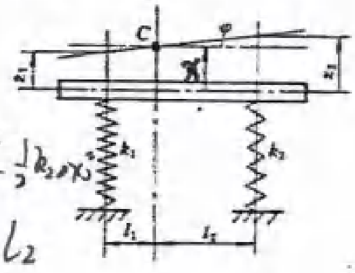
(2) 对于广义坐标x $T=\frac{1}{2}m\frac{l^2}{l^2-x^2}\cdot\dot x^2$ $V=-mg\sqrt{l^2-x^2}$ $L=T-V=\frac{1}{2}m\frac{l^2}{l^2-x^2}\dot x^2+mg\sqrt{l^2-x^2}$

由Lagrange方程：$\frac{ml^2x}{(l^2-x^2)^2}\dot x^2+\frac{ml^2}{l^2-x^2}\ddot x+mg\frac{x}{\sqrt{l^2-x^2}}=0$ 即 $\ddot x+\frac{x}{l^2-x^2}\dot x^2+\frac{g\sqrt{l^2-x^2}}{l^2}\cdot x=0$

(3) 对于广义坐标y：$T=\frac{1}{2}m\,l^2\frac{l^2}{l^2-y^2}\cdot\dot y^2$ $V=-mgy$ $L=T-V=\frac{1}{2}m\frac{l^2}{l^2-y^2}\dot y^2+mgy$

由Lagrange方程：$\frac{ml^2y}{(l^2-y^2)^2}\dot y^2+\frac{ml^2}{l^2-y^2}\ddot y+mg=0$ 即 $\ddot y+\frac{y}{l^2-y^2}\dot y^2+\frac{g}{l^2}(l^2-x^2)=0$

三、车厢的振动可以简化为支承于弹簧上的物体在铅垂面内的振动，如图所示。设支承于弹簧上的车厢质量为m，相对于质心C的转动惯量为$m\rho^2$，两弹簧的刚度系数分别为k_1和k_2，质心距前后轮轴的距离分别为l_1和l_2。试在φ角很小的情况下列出车厢振动的微分方程。



解：对整体分析 广义坐标：x,φ，受力：F_1, F_2, mg

$T=\frac{1}{2}m\dot x^2+\frac{1}{2}m\rho^2\dot\varphi^2$

以平衡为0势位置 $V=mg\cdot x+\underbrace{\frac{1}{2}k_1(x-l_1\varphi-\Delta x_0)^2}_{-\frac{1}{2}k_1\Delta x_0^2}+\frac{1}{2}k_2(x+l_2\varphi-\Delta x_0)^2-\frac{1}{2}k_2\Delta x_0^2$

又 $mg=k_1\Delta x_0+k_2\Delta x_0$ 且 $k_1\Delta x_0\cdot l_1=k_2\Delta x_0\cdot l_2$

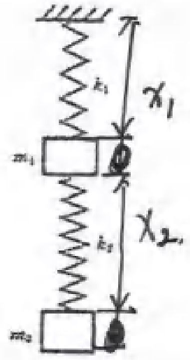
$\therefore V=\frac{1}{2}k_1(x-l_1\varphi)^2+\frac{1}{2}k_2(x+l_2\varphi)^2$ $L=T-V=\frac{1}{2}m\dot x^2+\frac{1}{2}m\rho^2\dot\varphi^2-\frac{1}{2}k_1(x-l_1\varphi)^2-\frac{1}{2}k_2(x+l_2\varphi)^2$

$\frac{\partial L}{\partial\dot x}=m\dot x$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x}\right)=m\ddot x$ $\frac{\partial L}{\partial x}=-k_1(x-l_1\varphi)-k_2(x+l_2\varphi)$ $\therefore$ $m\ddot x+k_1(x-l_1\varphi)+k_2(x+l_2\varphi)=0$

又 $\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=m\rho^2\dot\varphi$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right)=m\rho^2\ddot\varphi$ $\frac{\partial L}{\partial\varphi}=+k_1l_1(x-l_1\varphi)-k_2l_2(x+l_2\varphi)$

$\therefore m\rho^2\ddot\varphi-k_1l_1(x-l_1\varphi)+k_2l_2(x+l_2\varphi)=0$

四、质量为 m_1 和 m_2 的两物体悬挂如图所示。弹簧刚度系数分别为 k_1 和 k_2。试列出两物体的动力学微分方程。



解：对整体分析；广义坐标 x_1, x_2 为弹簧长度.

设平衡时弹簧长度 l_1, l_2

$\therefore T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2$

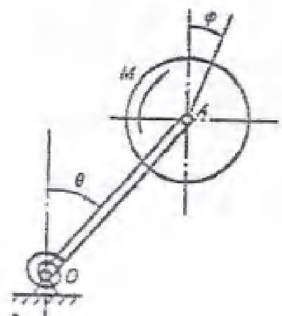
$V=\frac{1}{2}k_1(x_1-l_1)^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-l_2)^2$

$L=T-V=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2-\frac{1}{2}k_1(x_1-l_1)^2-\frac{1}{2}k_2(x_2-l_2)^2$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=m_1\dot{x}_1+m_2(\dot{x}_1+\dot{x}_2)$　$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)=(m_1+m_2)\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2$　$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-k_1(x_1-l_1)$　$\therefore (m_1+m_2)\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2+k_1(x_1-l_1)=0$

同理：$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)=m_2\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2$　$\frac{\partial L}{\partial x_2}=-k_2(x_2-l_2)$　$\therefore m_2\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2+k_2(x_2-l_2)=0$

五、质量为 m_1 的均质杆 OA 长为 l，可绕水平轴 O 在铅直面内转动，其下端有一与基座相连的螺线弹簧，刚度系数为 k，当 $\theta=0$ 时，弹簧无变形。OA 杆的 A 端装有可自由转动的均质圆盘，盘的质量为 m_2，半径为 r，在盘面上作用有矩为 M 的常力偶，设广义坐标为 φ 和 θ，如图所示。求该系统的动力学微分方程。



解：

$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1l^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_2r^2\dot{\varphi}^2$

$V=mgl\cos\theta+\frac{1}{2}k\theta^2+\frac{1}{2}m_1gl\cos\theta$

$L=T-V=(\frac{1}{6}m_1+\frac{1}{2}m_2)l^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{4}m_2r^2\dot{\varphi}^2-(\frac{1}{2}m_1+m_2)gl\cos\theta-\frac{1}{2}k\theta^2$

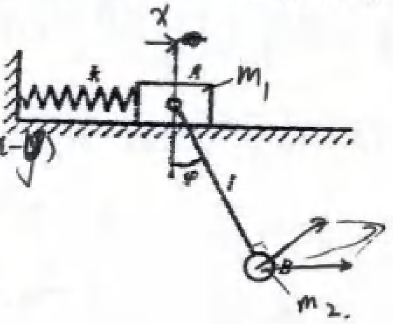
$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=(\frac{1}{3}m_1+m_2)l^2\dot{\theta}$　$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=(\frac{1}{3}m_1+m_2)l^2\ddot{\theta}$　$\frac{\partial L}{\partial \theta}=(\frac{1}{2}m_1+m_2)gl\sin\theta-k\theta$

$\therefore (\frac{1}{3}m_1+m_2)l^2\ddot{\theta}-(\frac{1}{2}m_1+m_2)gl\sin\theta+k\theta=0$

又 $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{1}{2}m_2r^2\dot{\varphi}$　$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)=\frac{1}{2}m_2r^2\ddot{\varphi}$　$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$　$\therefore \frac{1}{2}m_2r^2\ddot{\varphi}=M$

六、设有一与弹簧相连的滑块 A，其质量为 m_1，它可沿光滑水平面无摩擦地来回滑动，弹簧的刚度系数为 k。在滑块 A 上又连一单摆，如图所示。摆长为 l，B 的质量为 m_2。试列出该系统的动力学微分方程。

解：对整体分析：广义坐标 x, φ.



$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m_2\cdot 2\dot{x}l\dot{\varphi}\cos(\pi-\varphi)$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mgl\cos\varphi$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + m_2 gl\cos\varphi$$

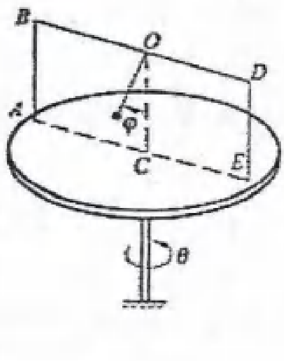
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{x}\cos\varphi \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$$

$$\therefore (m_1+m_2)\ddot{x} + kx + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0$$

$$\therefore l^2\ddot{\varphi} + l\ddot{x}\cos\varphi + gl\sin\varphi = 0$$

*七、如图所示，水平圆台上，圆台可绕通过质心 C 的固定铅垂轴转动。在刚架上水平杆 BD 的 O 点在悬挂一单摆，摆球质量为 m，摆线长 l，O 点在圆台的转动轴线上。刚架及圆台对其转动轴的转动惯量为 J，单摆的摆动平面垂直于水平杆 BD，不计轴承摩擦。如给圆台初始角速度 $\dot{\theta}_0$ 后即任其自由转动，求单摆相对于刚架作微小振动的周期。(选自《力学与实践》，No.6，1990)

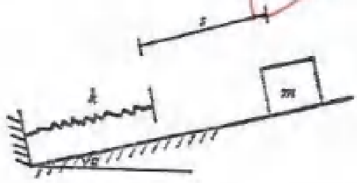


一、概念题

1. 如图所示，在倾角为 α 的光滑斜面上，置一刚度系数为 k 的弹簧，一质量为 m 的物块沿斜面下滑 s 距离与弹簧相碰，碰后弹簧与物块不分离并发生振动，则自由振动的固有频率为（ ① ）。

① $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　　② $\sqrt{\dfrac{k}{ms}}$

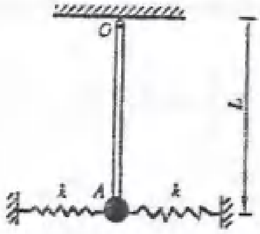
③ $\sqrt{\dfrac{k}{m\sin\alpha}}$　　④ $\sqrt{\dfrac{k\sin\alpha}{m}}$



2. 如图所示，单摆由无重刚杆 OA 和质量为 m 的小球 A 构成。小球上连接有两个刚度系数为 k 的水平弹簧，则单摆微振动的固有频率为（ ③ ）。

① $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　　② $\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

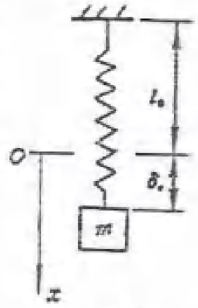
③ $\sqrt{\dfrac{g}{L}+\dfrac{2k}{m}}$　　④ $\sqrt{\dfrac{g}{L}+\dfrac{k}{m}}$



3. 图示质量弹簧系统，已知物块的质量为 m，弹簧的刚度系数为 k，静伸长为 δ_s，原长是 l_0。若以弹簧未伸长的下端点为坐标原点 O，则物块的运动微分方程为（ ② ）。

① $\ddot{x}+\dfrac{k}{m}x=0$　　② $\ddot{x}+\dfrac{k}{m}(x-\delta_s)=0$

③ $\ddot{x}+\dfrac{k}{m}(x-\delta_s)=g$　　④ $\ddot{x}+\dfrac{k}{m}(x+\delta_s)=0$

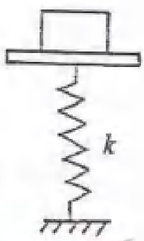


4. 在图示中，当把弹簧原长的中点 O 固定后，系统的固有频率与原来固有频率的比值为（ ③ ）。

① $\dfrac{1}{2}$　　② 2

③ $\sqrt{2}$　　④ 4

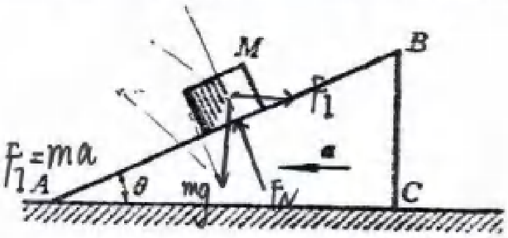
5. 图示弹簧秤，秤盘重未知，当盘上放一重 P 的物体时，测得振动周期为 T_1；换一重 Q 的物体时，其振动周期为 T_2，则弹簧的刚度系数应为 $k=$（ $\dfrac{4\pi^2(P-Q)}{g(T_1^2-T_2^2)}$ ）。



6. 单自由度振动系统中有两个振刚度系数分别为 k_1 和 k_2 的弹簧，两弹簧并联时的特征是（伸长量）相等，其等效刚度系数 $k=$（ k_1+k_2 ）；两弹簧串联时的特征是（受力）相等，其等效刚度系数 $k=$（ $\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$ ）。

7. 用能量法计算固有频率的前提是（振动系统为保守系统），其理论依据是（机械能守恒定律）。

二、如图所示，在三棱柱 ABC 的粗造斜面上，放一质量为 m 的物体 M，三棱柱以匀加速 $\boldsymbol{a}$ 沿水平方向运动。设摩擦系数为 f_s，且 $f_s < \tan\theta$。为使物体 M 在三棱柱上处于相对静止，试求 $\boldsymbol{a}$ 的最大值，以及这时物体 M 对三棱柱的压力。



解：若物体相对于三棱柱静止，

对物体分析，由达朗贝尔定理，施加惯性力 $F_I = ma$

再将摩擦力与支持力等效为全反力 F_R，∴ F_R、mg、F_I 平衡

~~又 $f_s < \tan\theta$ ∴ $\varphi < \theta$ 当 a 最大时 $\varphi = \theta$~~

~~∴ $F_I = mg\cdot\tan 2\theta$ ∴ $a_m = g\cdot\tan 2\theta$~~

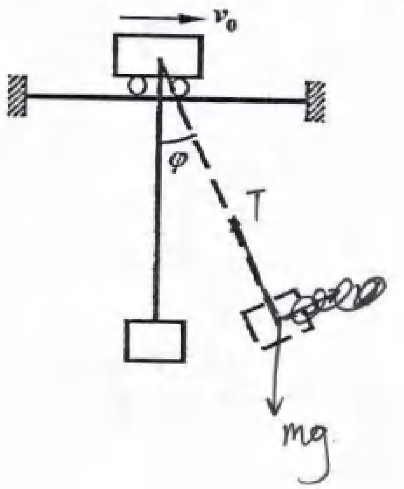
~~∴ $F_R = \frac{mg}{\cos 2\theta}$ ∴ $F_N = F_R\cdot\cos\theta = \frac{mg\cos\theta}{\cos 2\theta}$~~

a最大时，如图所示，全反角为 $\varphi = \arctan f_s$ ∴ $ma = mg\cdot\tan(\varphi+\theta)$

$$F_N = F_R\cdot\cos\varphi = \frac{mg\cdot\cos\varphi}{\cos(\varphi+\theta)} = \frac{mg\cos\varphi}{\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta} = \frac{mg}{\cos\theta - f_s\sin\theta}$$

$$\therefore a_m = g\cdot\tan(\varphi+\theta) = g\cdot\frac{\tan\varphi+\tan\theta}{1-\tan\varphi\tan\theta} = g\cdot\frac{f_s+\tan\theta}{1-f_s\cdot\tan\theta}$$

三、跑车通过绳子带着重量为 P 的重物以常速 $\boldsymbol{v}_0$ 的速度沿桥架向右运动，突然刹车，由于惯性使重物绕 O 点向前摆动，绳子长为 l。求刹车后绳子的张力。



解：对重物分析：角度为φ时

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg\cdot l(1-\cos\varphi)$$

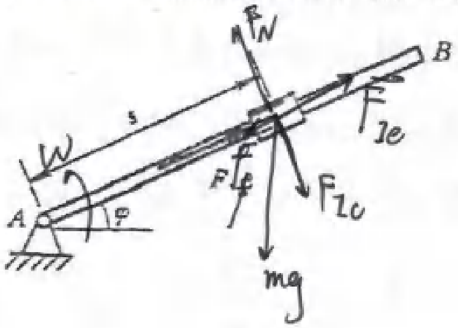
$$\therefore a^n = \frac{v^2}{l}$$

$$T - mg\cdot\cos\varphi = ma^n$$

$$\therefore T = mg\cos\varphi + \frac{mv_0^2}{l} - 2mg(1-\cos\varphi)$$

$$= \frac{mv_0^2}{l} - mg(2-3\cos\varphi)$$

四、质量为 2 kg 的滑块在力 F 作用下沿杆 AB 运动，杆 AB 在铅直平面内绕 A 转动。已知：$s = 0.4\,t$，$\varphi = 0.5\,t$（s 的单位为 m，φ 的单位为 rad，t 的单位为 s），滑块与杆 AB 的摩擦系数为 0.1。求 $t = 2$ s 时力 F 的大小。



解 $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 0.5\ rad/s$ $v_r = \frac{ds}{dt} = 0.4\ m/s$

$t=2s$ 时 $\varphi = 1$ $s = 0.8$

物体加速度 $\vec{a} = \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

$= \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_c$

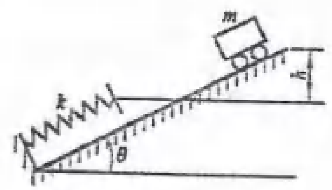
由达朗贝尔原理，添加惯性力 F_{Ie}，F_{Ic} $F_{Ie} = \omega^2 S \cdot m$ $F_{Ic} = 2\omega \cdot v_r \cdot m$

对物块研究 $F_N = mg\cos\varphi + F_{Ic} = mg\cos\varphi + 2m\cdot\omega\cdot v_r$

又 $F_f = 0.1 F_N$ $F = mg\sin\varphi + F_f - F_{Ie}$

综上 $F = mg\sin\varphi + 0.1mg\cos\varphi + 0.2m\omega v_r - m\omega^2 S = 17.23N$

五、质量为 m 的小车在斜面上自高度 h 处滑下，而与缓冲器相碰，如图所示。缓冲弹簧的刚度系数为 k，斜面倾角为 θ。求小车碰着缓冲器后自由振动的周期和振幅。



解：$\because m_{eq} = m$ $k_{eq} = k$ $\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

以平衡位置为势能零点，设顶端距平衡位置 x

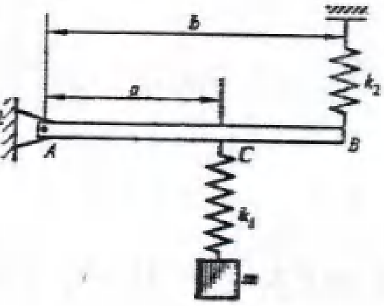
$\therefore kx = mg\sin\theta$

由机械能守恒 $T_{max} + 0 = 0 + mgh + mgx\sin\theta - \frac{1}{2}kx^2$

又 $T_{max} = V_{max} = \frac{1}{2}kA^2$

$\therefore A = \sqrt{\frac{mg}{k}(2h + \frac{mg\sin^2\theta}{k})}$

六、质量为 m 的物体悬挂如图。如杆 AB 的质量不计，两弹簧的刚度系数分别为 k_1 和 k_2，又 $AC = a$，$AB = b$。求物体自由振动的频率。



解：设物体偏离平衡位置 Δx，回复力 F $\therefore F = k_{eq}\cdot\Delta x$

设两弹簧伸长量 Δx_1，Δx_2 $\therefore F_1 = \Delta x_1\cdot k_1 = F$ $F_2 = k_2\Delta x_2$

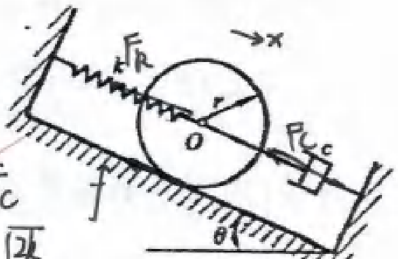
又 $\Delta x_1 + \Delta x_2\cdot\frac{a}{b} = \Delta x$ $F_1\cdot a = F_2\cdot b$

解得：$k_{eq} = \frac{k_1\cdot k_2 b^2}{k_1 a^2 + k_2 b^2}$

$\therefore \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = b\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 a^2 + k_2 b^2)}}$ $f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{b}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 a^2 + k_2 b^2)}}$

$\cancel{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{b}\sqrt{\frac{m(k_1 a^2 + k_2 b^2)}{k_1\cdot k_2}}}$

七、图示均质滚子质量 $m = 10$kg，半径 $r = 0.25$m，能在斜面上保持纯滚动，弹簧刚度系数 $k = 20$N/m，阻尼器粘阻系数 $c = 10$N·s/m。试求：（1）无阻尼的固有频率；（2）阻尼比；（3）有阻尼的固有频率；（4）此阻尼系统自由振动的周期。



解：(1) 对整体分析，设偏移 x $F_k = kx$

$F_c = c\dot{x}$

$\alpha = \frac{\ddot{x}}{r}$ $f\cdot r = J\cdot\alpha$ $\therefore m\ddot{x} = -F_k - f - F_c$

$\therefore (m + \frac{1}{2}m)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ $\therefore \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$

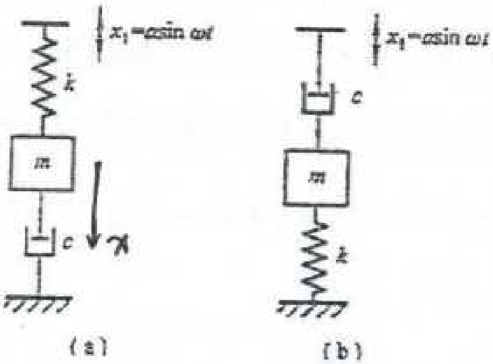
$\therefore f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{3m}} \approx 0.1841\text{Hz}$

(2) $n = \frac{c}{2(\frac{3}{2}m)}$ $\zeta = \frac{n}{\omega_0} \approx 0.289\text{ Hz}$

(3) $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \approx 0.176\text{Hz}$

(4) $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \approx 5.677\text{s}$

八、图示两个振动系统，其质量为 m，弹簧刚度系数为 k，阻尼系数为 c。设干扰位移 $x_1 = a\sin\omega t$，推导它们的强迫振动公式。



解：(a) 以平衡位置为原点

$\because m\ddot{x} = -F_k - F_c = -k(x-x_1) - c\dot{x}$

$\therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ak\sin\omega t$

$$x = \frac{a}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}}\cdot\sin(\omega t-\varphi)$$

$$\varphi = \arctan\frac{2\zeta\lambda}{1-\lambda^2}$$

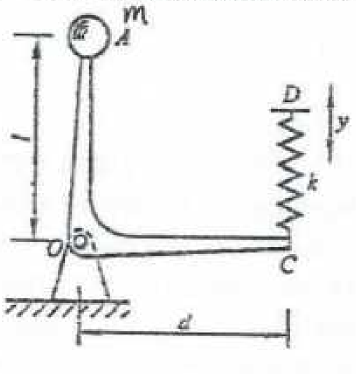
(b) 同理 $m\ddot{x} = -F_k - F_c = -kx - c(\dot{x}-\dot{x}_1)$

$\therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ca\omega\cos\omega t$

$$x = \frac{\frac{c\omega a}{k}}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}}\cos(\omega t-\varphi)$$

$$\varphi = \arctan\frac{2\zeta\lambda}{1-\lambda^2}$$

九、已知图示机构，其杠杆可绕点 O 转动，重量忽略不计。质点 A 质量为 m，在杠杆的点 C 加一弹簧 CD 垂直于 OC，刚度系数为 k。在点 D 加一鉛直方向的干扰位移 $y = b\sin\omega t$。求机构的强迫振动规律。



解！设转动角度 θ

$\therefore J_0\cdot\ddot{\theta} = mgl\cdot\sin\theta - d\cdot k(\theta\cdot d - b\cdot\sin\omega t)$

$\because \theta\to 0 \quad \therefore \sin\theta\approx\theta$

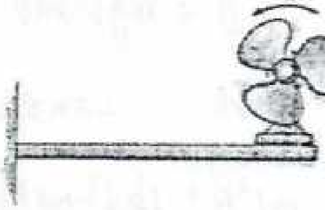
$\therefore ml^2\ddot{\theta} + (kd^2 - mgl)\theta = kdb\cdot\sin\omega t$

$\therefore \omega_0 = \sqrt{\dfrac{kd^2-mgl}{ml^2}}$ $\quad\therefore \theta = \dfrac{kdd}{ml^2(\omega_0^2-\omega^2)}\cdot\sin\omega t$

*十、在第一次世界大战期间，英国炮手在马尔维纳斯群岛海战中发射的炮弹经常落在德国战舰的左边而不能命中。瞄准器的设计者其实已经考虑了地球自转的影响，问题是他们假设海战是在英国本土（北纬50°）附件进行，并作了向左的校正，但马岛却在南纬50°附近。由于炮手们不知道地球自转的影响，不知校正的方法，结果产生了双倍的向左误差！现假设炮弹以$300m/s$发射，质量为$10kg$，发射角为45°，空气阻力$R=\gamma mv^2$，$\gamma=1.157\times10^{-4}m^{-1}$，则这个误差有多大？(选自《力学与实践》, No.1，2000)

*十一、载人飞船中的宇航员处于失重状态。在长期的宇宙航行中，为了监测宇航员的体质变化，需要定期测量身高、体重等参数，但地面上测体重的磅秤已不能使用。请你提出一个能在失重状态下测量体重的方案，应合乎力学原理并简单易行。

*十二、The fan has a mass of 25 kg and is fixed to the end of a horizontal beam that has a negligible mass. The fan blade is mounted eccentrically on the shaft such that it is equivalent to an unbalanced 3.5-kg mass located 100 mm from the axis of rotation. If the static deflection of the beam is 50 mm as a result of the weight the fan, determine the amplitude of steady-state vibration of the fan when the angular velocity of the fan is 10 rad/s.



5
闵
12123