南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一九～二〇二〇学年 第一学期 **《理论力学(II)》考试试题**

考试日期：2020 年 1 月 6 日 试卷类型：A 卷 试卷代号：

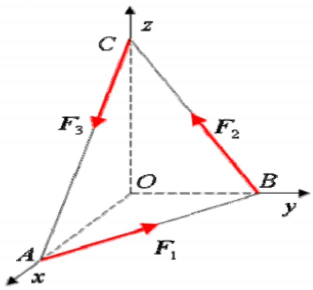
班号 **学号** **姓名**

题号	一	二	三	四	五	六	七	**总分**
得分								

本题分数	10
得 分	

一、计算题

如图所示，已知 $OA=OB=a$，$OC=\sqrt{3}a$。空间力系由力 $\boldsymbol{F_1}$、$\boldsymbol{F_2}$ 和 $\boldsymbol{F_3}$ 组成，三个力的大小均等于 $\boldsymbol{F_P}$，方向如图所示。试求（1）该力系的主矢，（2）该力系对坐标原点 O 的主矩。



解： $\boldsymbol{F}_1$ 的矢量为：$F_P(-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j})$；

$\boldsymbol{F}_2$ 的矢量为：$F_P(-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k})$；

$\boldsymbol{F}_3$ 的矢量为：$F_P(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k})$；

力系的主矢 $\boldsymbol{F}_{R'}=\sum\boldsymbol{F}_i=\frac{1-\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$

主矩

$$\boldsymbol{M}_O=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a & 0 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}F_P & \frac{\sqrt{2}}{2}F_P & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & a & 0\\ 0 & \frac{-1}{2}F_P & \frac{\sqrt{3}}{2}F_P\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 0 & \sqrt{3}a\\ \frac{-1}{2}F_P & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}F_P\end{vmatrix}$$

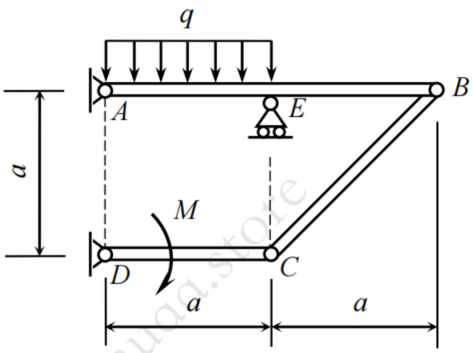
$$=\frac{F_P a}{2}(\sqrt{3}\boldsymbol{i}+\sqrt{3}\boldsymbol{j}+\sqrt{2}\boldsymbol{k})$$

（主矢 5 分，主矩 5 分）

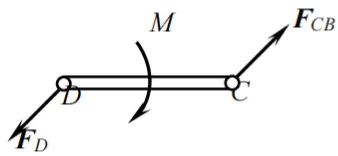
本题分数	15
得　分	

二、计算题

图示平面结构由杆 *AEB*、*DC* 和 *BC* 组成，尺寸如图，长度 a 为已知。在杆 *AEB* 的 *AE* 段受到均布载荷作用，载荷集度为 q，在杆 *DC* 上作用一力偶矩为 M 的力偶（顺时针），且 $M = qa^2$。各杆自重及各处摩擦均不计。试求：支座 *A*、*D* 处的约束力（化简到仅包含 q，a）。



解：取杆 *DC*，受力如图所示（杆 *BC* 为二力杆）。

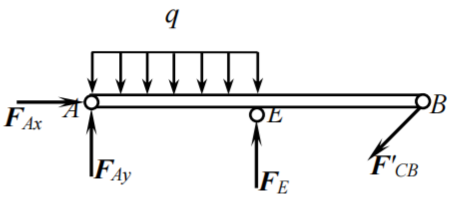


$$\sum M = 0 \qquad F_D \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a - M = 0$$

$$F_D = F_{CB} = \sqrt{2}qa$$

即： $F_{Dx} = qa\,(\leftarrow)$ ， $F_{Dy} = qa\,(\downarrow)$ 　(7 分)

取杆 *AEB*，受力如图所示。（$F'_{CB} = F_{CB}$）



$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} - F'_{CB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$F_{Ax} = qa\,(\rightarrow)$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0 \qquad F_E \cdot a - \frac{1}{2}qa^2 - F'_{CB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2a = 0$$

$$F_E = \frac{5}{2}qa\,(\uparrow)$$

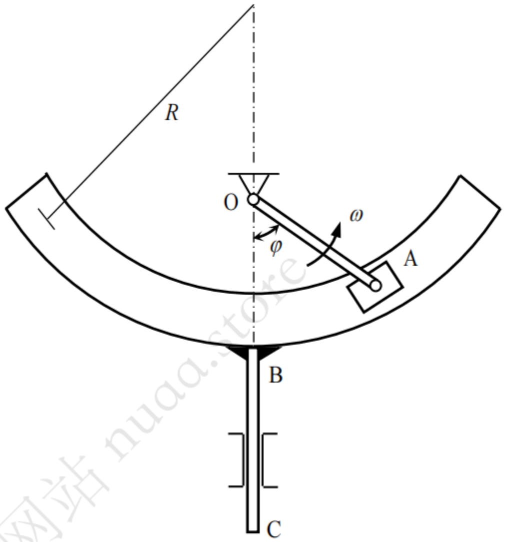
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_E - qa - F'_{CB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$F_{Ay} = -\frac{1}{2}qa\,(\downarrow) \qquad (8\text{ 分})$$

本题分数	15
得　　分	

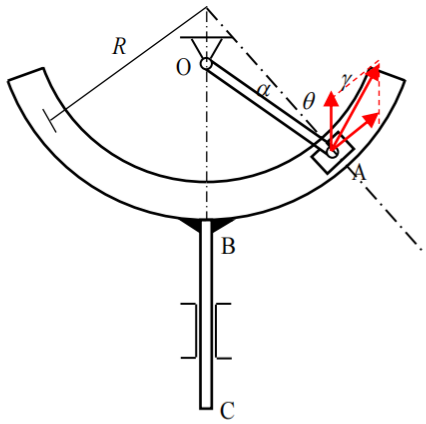
三、计算题（要求用点的合成运动求解）

图示系统中，曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕 O 轴转动，通过滑块 A 带动半圆形滑道 BC 作铅垂平动。已知：$OA=r=10\text{cm}$，$\omega=1\text{rad/s}$，$R=20\text{cm}$。试求 $\varphi=60°$时杆 BC 的加速度。



解：

动点：滑块 A，动系：滑道 BC；牵连运动：平动



$$\alpha = 34.34^0, \theta = 25.66^0, \gamma = 30^0$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_A^e + \vec{v}_A^r$$

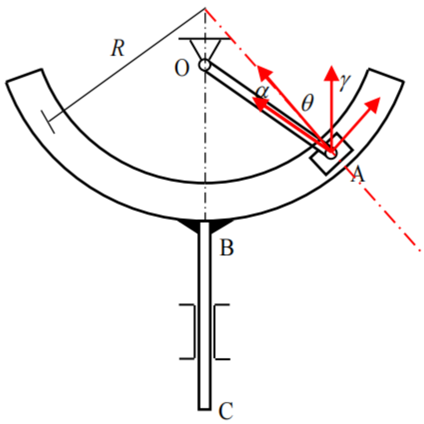
$$v_A^r = \frac{v_A}{2\sin 115.66^0} = 5.55cm/s$$ ------------ （5 分）

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^e + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$$ ------------------------------ （5 分）

向 η 轴投影

$$a_A \cos\alpha = a_r^n + a_e \cos\theta$$ ---------------------- （5 分）

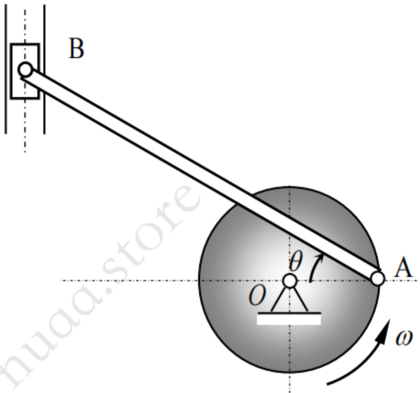
$$a_e = 7.45cm/s^2$$



本题分数	15
得　　分	

四、计算题（要求用刚体平面运动求解）

图示曲柄连杆滑块机构，圆轮匀速转动，通过 A 点铰接连杆 AB，从而带动滑块 B 沿竖直轨道滑动。已知圆轮的半径 r=0.2m，$AB=2\sqrt{3}\,r$，ω=5rad/s。在图示位置时，OA 连线位于水平方向，AB 与 OA 的夹角 θ=30°，求：（1）该瞬时杆 AB 的角速度和滑块 B 的速度；（2）该瞬时杆 AB 的角加速度和滑块 B 的加速度。



解：$v_A \parallel v_B$ 平行，AB 杆为瞬时平动

$v_A = v_B = r\cdot\omega = 0.2\times 5 = 1m/s$ ------------------（5 分）

$\omega_{AB} = 0$

以 A 为基点，研究 B 点加速度

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}$

$a_A = r\cdot\omega^2 = 5m/s^2, \vec{a}_{BA}^{n} = AB\cdot\omega_{AB}^2 = 0$

在 AB 方向投影，得到：$a_B\cdot\sin 30^0 = a_A\cdot\cos 30^0$ ---------（5 分）

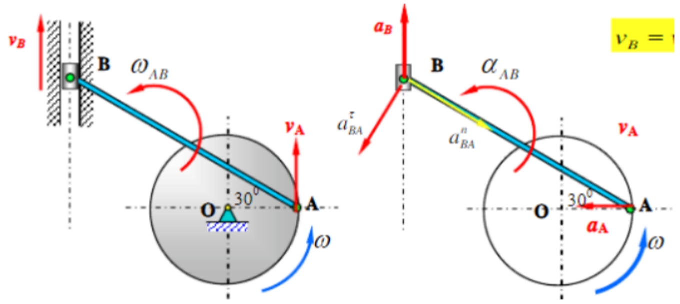
$a_B = 5\sqrt{3}m/s^2$

在水平方向投影，得到：

$0 = -a_A - a_{BA}^{\tau}\cdot\sin 30^0$

$a_{BA}^{\tau} = -10m/s^2$ --------------------------------（5 分）

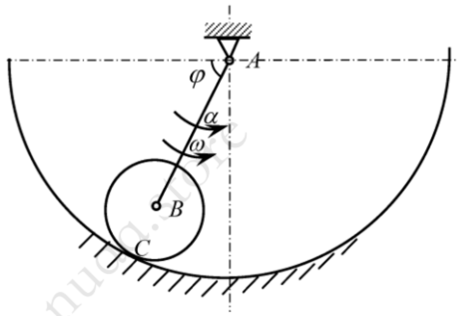
$\alpha_{AB} = a_{BA}^{\tau}/AB = -10/(2\sqrt{3}) = -\dfrac{5\sqrt{3}}{3}rad/s^2$



本题分数	15
得　分	

五、计算题（要求用动力学普遍定理求解）

图示铅垂面内固定圆弧轨道圆心在 A 点处，均质杆 AB 和均质圆轮 B 质量均为 m，杆 AB 长为 l，圆轮 B 的半径为 r，轮 B 在圆弧轨道上作纯滚动，杆 AB 由水平位置无初速释放，图示瞬时杆 AB 与水平线夹角为 φ，不计滚阻，试求在图示位置：（1）AB 杆的角速度；（2）AB 杆的角加速度；（3）轮 B 与轨道间的静滑动摩擦力。

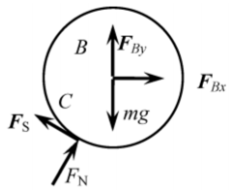


解：（1） $\omega_B = \omega_{AB} l / r = \dfrac{\omega l}{r}$

$$T = \frac{1}{2}J_A\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_B^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\omega_B^2 = \frac{11}{12}ml^2\omega^2 \qquad \text{（5 分）}$$

$$W = mgl\sin\varphi + \frac{1}{2}mgl\sin\varphi = \frac{3}{2}mgl\sin\varphi$$

据动能定理 $T_2 - T_1 = W$



解得 $\omega = \sqrt{\dfrac{18g\sin\varphi}{11l}}$ （4 分）

（2）对上式求导

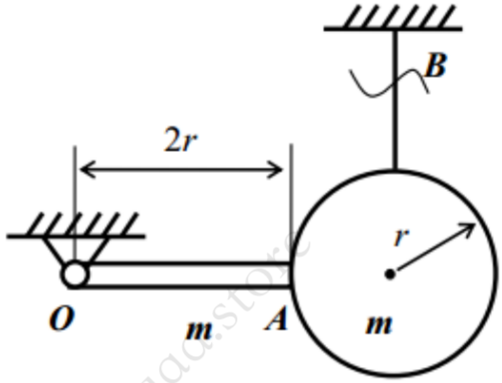
$$\alpha = \frac{9g\cos\varphi}{11l} \qquad \text{（2 分）}$$

（3）对圆盘 $\dfrac{1}{2}mr^2\alpha_B = F_S r$，$\alpha_B = \dfrac{\alpha l}{r}$，$F_S = \dfrac{1}{2}ml\alpha = \dfrac{9mg\cos\varphi}{22}$ （4 分）

本题分数	15
得　　分	

六、计算题（要求用达朗贝尔原理求解）

图示摆由均质细杆和均质圆盘在 A 处固结而成，通过绳子悬挂于天花板上。已知圆盘质量为 m，半径为 r，细杆质量为 m，长为 $2r$。应用**达朗贝尔原理**求解：B 端绳子突然断裂瞬时，圆盘在**固结点 A** 处受到的约束反力。



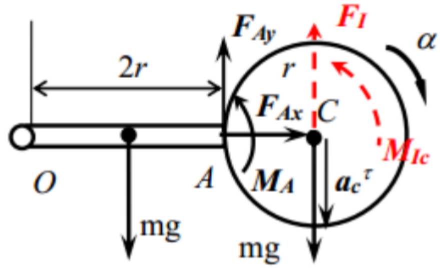
解：摆对 O 轴的转动惯量：

$$J_o=J_{杆}+J_{盘}=\frac{1}{3}\cdot m\cdot(2r)^2+[\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2+m\cdot(3r)^2]=\frac{65}{6}mr^2$$

绳子断裂瞬时，摆角速度为 0，角加速度为：

$$J_o\alpha=\sum M_o(F)$$

$$\therefore\ \ \alpha=\frac{mg\cdot 3r+mg\cdot r}{\frac{65}{6}mr^2}=\frac{24g}{65r}$$



以圆盘为研究对象，

$$a_c^\tau=\alpha\cdot 3r=\frac{72g}{65}$$

$$F_{\rm I}=ma_C^\tau=\frac{72mg}{65}$$

（9 分）

$$M_{\rm IC}=J_C\alpha=\frac{12mgr}{65}$$

列写平衡方程：

$$\sum F_x=0,F_{Ax}=0$$

$$\sum F_y=0,F_{Ay}+F_I-mg=0$$

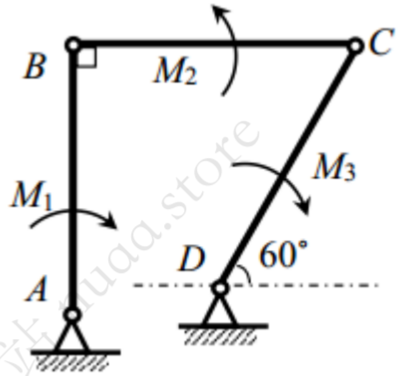
$$\sum M_C(F)=0,M_A+M_{\rm IC}-F_{Ay}r=0$$

$F_{Ax}=0$ ， $F_{Ay}=-\dfrac{7}{65}mg$ （竖直向下），$M_A=-\dfrac{19}{65}mgr$ （顺时针）　　**（6 分）**

本题分数	15
得　分	

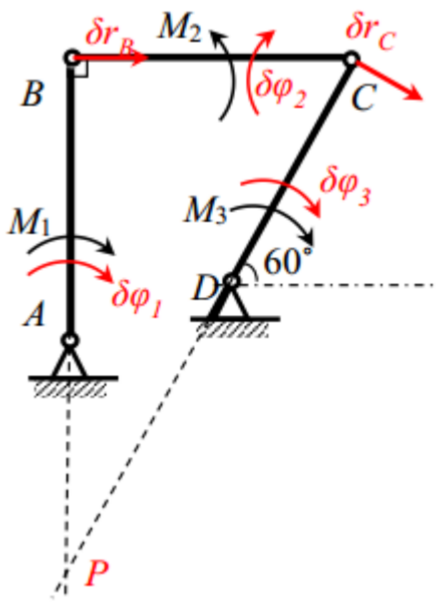
七、计算题（要求用虚位移原理求解）

等长的 AB、BC、CD 三直杆不计自重，在 B、C 铰接并用铰支座 A、D 固定，如图所示。设在三杆上分别作用 M_1、M_2 和 M_3 三个力偶。图示位置时，AB 竖直，BC 水平，CD 与水平成 60°，机构处于平衡状态。应用**虚位移原理**求此时三个力偶矩之间的关系。



解：应用虚位移原理

$$M_1 \cdot \delta\varphi_1 - M_2 \cdot \delta\varphi_2 + M_3 \cdot \delta\varphi_3 = 0$$ **(3 分)**



如图所示，设三杆长均为 l，则有

$$\delta r_C \cos 30° = \delta r_B = \delta\varphi_1 \cdot l$$

$$\delta r_C = \delta\varphi_3 \cdot l = \delta\varphi_2 \cdot 2l$$

所以：$\frac{\sqrt{3}}{2}\delta\varphi_3 = \delta\varphi_1$，$\frac{1}{2}\delta\varphi_3 = \delta\varphi_2$

(10 分)

得：$M_2 = \sqrt{3}M_1 + 2M_3$

(2 分)

本题分数	10
得　　分	

一、计算题

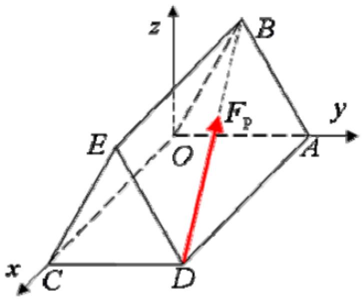
正三棱柱 $OABCDE$ 的高为 $10\sqrt{2}$ cm，底面正三角形的边长为 10cm。大小为 10N 的力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ 作用于棱角 D，力的作用线沿侧面的对角线 DB，如图所示。设沿图示各坐标轴的单位矢量为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$，试求（1）力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ 的矢量表示；（2）$\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ 对 O 点之矩。

解：D 点坐标：$(10\sqrt{2},10,0)$；B 点坐标：$(0,5,5\sqrt{3})$；

矢量 $\overrightarrow{DB}$ 的单位矢量：

$$\boldsymbol{n}_{DB}=(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2})；$$

所以力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ 的矢量表示为：



$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}=F_{\mathrm{P}}\boldsymbol{n}_{DB}=(-\frac{10\sqrt{6}}{3}\boldsymbol{i}-\frac{5\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})\ \mathrm{N}$$

$\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ 对 O 点之矩(取点 B 为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ 作用点)

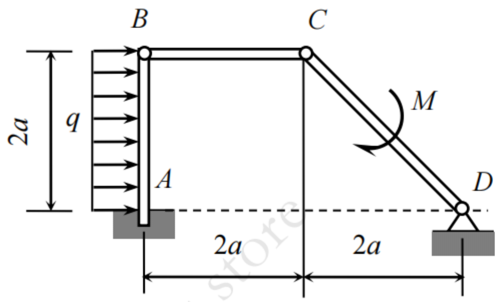
$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 5 & 5\sqrt{3}\\ -\frac{10\sqrt{6}}{3} & -\frac{5\sqrt{3}}{3} & 5\end{vmatrix}=(50\boldsymbol{i}-50\sqrt{2}\boldsymbol{j}+\frac{50}{3}\sqrt{6}\boldsymbol{k})\ \mathrm{N\cdot cm}$$

（5 分）

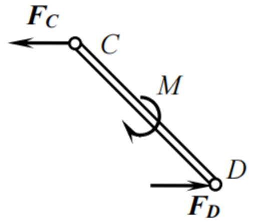
本题分数	15
得　分	

二、计算题

图示平面结构，B、C 为光滑铰链，A 端插入地面，D 端为固定铰链支座。受均布载荷 q 和力偶 M(**顺时针**)作用，且 $M=qa^2$。各杆自重及各处摩擦均不计，尺寸如图。试求：支座 D 处和插入端 A 处的约束力（化简到仅包含 q，a)。



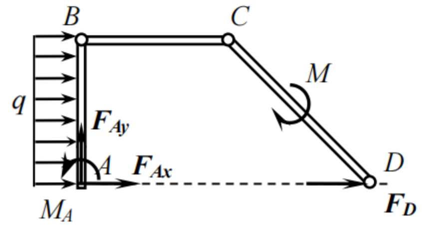
解：（1）取杆 CD，受力如图（杆 BC 为二力杆）。



$$\sum M_C=0 \qquad 2aF_D-M=0$$

$$F_D=F_C=\frac{M}{2a}=\frac{qa}{2} \qquad \text{（5 分）}$$

（2）取整体为研究对象，受力如图。



$$\sum F_x=0 \qquad q\cdot 2a+F_{Ax}+F_D=0$$

$$F_{Ax}=-\frac{5qa}{2}(\leftarrow)$$

$$\sum F_y=0 \qquad F_{Ay}=0$$

$$\sum M_A(F)=0 \qquad M_A-2qa\cdot a-M=0$$

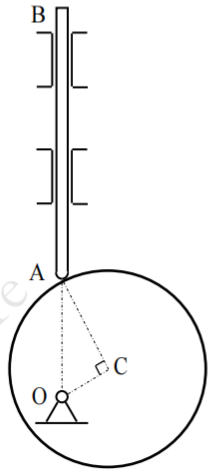
$$M_A=3qa^2 \qquad \text{（逆时针）}$$

（10 分）

本题分数	15
得　　分	

三、计算题（要求用点的合成运动求解）

偏心凸轮的偏心距 $OC=a$，轮的半径 $r=\sqrt{3}a$， 凸轮以匀角速度 ω_0 绕 O 轴**逆时针**转动，设某瞬时 OC 与 CA 成直角，试求该瞬时杆 AB 的速度和加速度。



解：动点：AB 杆端点 A，动系：凸轮，牵连：定轴转动

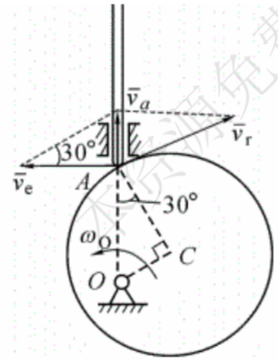
（1）求速度

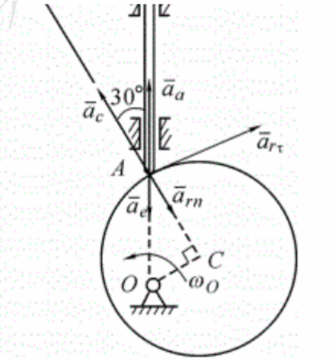
速度平行四边形如图：

$$v_e = OA\cdot\omega_0 = 2a\omega_0，\quad v_a = v_e\cdot tg30^o = \frac{2\sqrt{3}}{3}a\omega_0（\uparrow），\quad v_r = \frac{v_e}{\cos 30^o} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a\omega_0 \text{ -----（5 分）}$$

（1）求加速度：作动点 A 的加速度矢量图

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_{r\tau} + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_c$$





-------------------------（5 分）

其中 $a_e = a_{en} = OA\cdot\omega_0{}^2 = 2a\omega_0{}^2, a_{rn} = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}a\omega_0{}^2, a_c = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}a\omega_0{}^2$

在 η 方向投影，

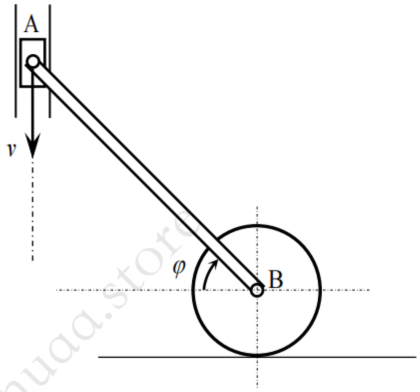
$$a_a\cos 30^0 = -a_{en}\cos 30^0 - a_{rn} + a_c \text{ ------------------------------（5 分）}$$

$$a_a = -\frac{2}{9}a\omega_0{}^2(\downarrow)$$

本题分数	15
得　分	

四、计算题（要求用刚体平面运动求解）

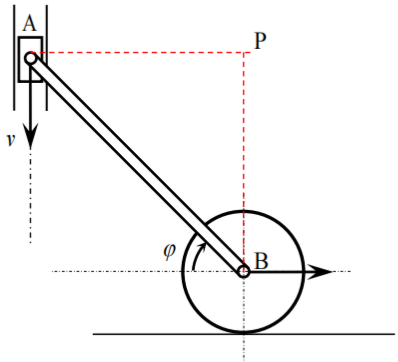
图示平面机构，滑块 A 以匀速 v 向下运动，通过连杆 AB 带动圆轮 B 在固定水平面上作纯滚动。已知连杆 AB 的长度为 l，圆轮 B 的半径为 r。试求 φ=45°时圆轮 B 的角速度和角加速度。



解：瞬心法：

$$v_B = PB \cdot \omega = PA \cdot \omega = v$$

$$\omega_B = \frac{v_B}{r} = v/r$$ --------------------------（5 分）



以 A 为基点，B 点加速度如下

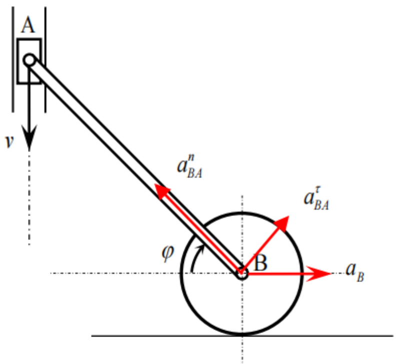
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}$$ --------------------------（3 分）

在 AB 方向投影

$$a_B = -\frac{v^2}{l}$$ --------------------------（2 分）

所以得到

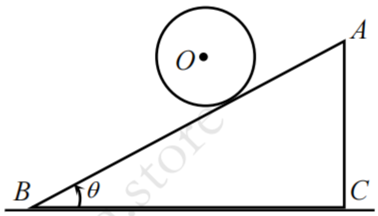
$$\alpha_B = \frac{a_B}{r} = -\frac{v^2}{lr}$$ --------------------------（5 分）



本题分数	15
得　　分	

五、计算题（要求用动力学普遍定理求解）

如图所示，质量为 m 的三棱柱 ABC 放在**光滑**的水平面上，半径为 R、质量也为 m 的均质圆柱 O 由静止开始沿三棱柱的斜面 AB 向下作**纯滚动**，斜面的倾角为θ。试求：（1）三棱柱 ABC 的加速度；（2）圆柱 O 的角加速度；（3）三棱柱给圆柱 O 的摩擦力。



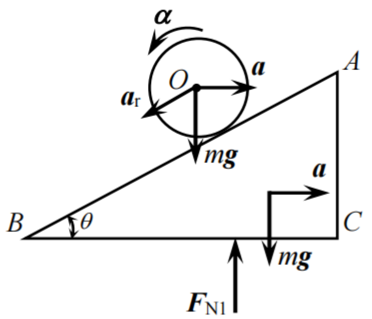
解：1. 取整体，受力如图。

圆柱质心 O 的加速度为

$$\boldsymbol{a}_O=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$$

由质心运动定理，有

$$ma+m(a-a_\mathrm{r}\cos\theta)=0 \quad \text{（5 分）}$$



2. 取圆柱 O，受力如图。

由平面运动微分方程，有

$$m(a\cos\theta-a_\mathrm{r})=F_\mathrm{s}-mg\sin\theta$$

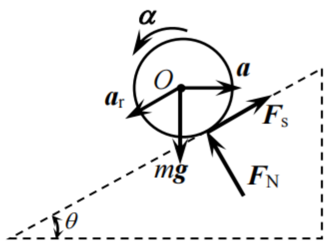
$$\frac{1}{2}mR^2\cdot\alpha=F_\mathrm{s}R$$

且 $\qquad \alpha=a_\mathrm{r}/R \qquad$ （7 分）

联立解得

$$a=\frac{\sin\theta\cos\theta}{3-\cos^2\theta}g=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2+\sin^2\theta}g \quad （\rightarrow）$$

$$\alpha=\frac{2\sin\theta}{3-\cos^2\theta}\frac{g}{R}=\frac{2\sin\theta}{2+\sin^2\theta}\frac{g}{R} \quad （逆时针）$$

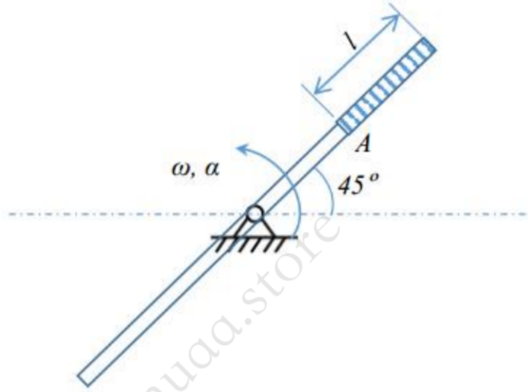


$$F_\mathrm{s}=\frac{\sin\theta}{3-\cos^2\theta}mg=\frac{\sin\theta}{2+\sin^2\theta}mg \quad （\nearrow） \qquad （3 分）$$

本题分数	15
得　分	

六、计算题（要求用达朗贝尔原理求解）

如图所示，一质量为 $4m$、长度为 $4l$ 的均质细杆在竖直面上绕其中心作定轴转动。某瞬时该杆位置如图所示，角速度 ω 与角加速度 α 方向相同。应用**达朗贝尔原理**，求解细杆图示的阴影部分 l 长度，在 A 处受到的约束反力。

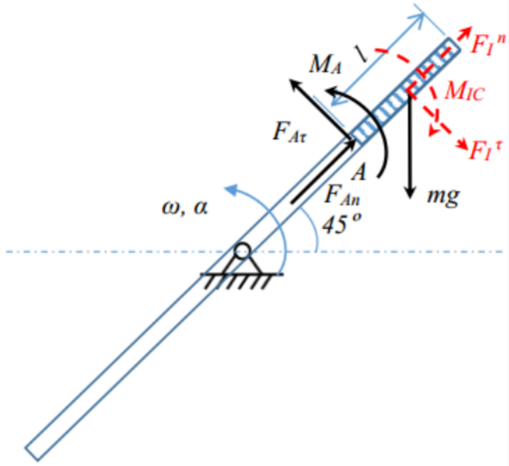


解：以阴影部分为研究对象，将惯性力向其质心简化

$$F_{\mathrm{I}}^{\tau}=ma_C^{\tau}=\frac{3}{2}m\alpha l$$

$$F_{\mathrm{I}}^{n}=ma_C^{n}=\frac{3}{2}m\omega^2 l$$

$$M_{\mathrm{IC}}=J_C\alpha=\frac{1}{12}ml^2\alpha$$



（9 分）

$$\sum F_n=0,\ F_{An}+F_{\mathrm{I}}^{n}-mg\sin(45°)=0$$

$$\sum F_\tau=0,\ F_{A\tau}-F_{\mathrm{I}}^{\tau}-mg\cos(45°)=0$$

$$\sum M_A(F)=0,\ M_A-(mg\cos(45°)+F_{\mathrm{I}}^{\tau})\frac{l}{2}\text{-}M_{\mathrm{IC}}=0$$

$$F_{An}=\frac{m(\sqrt{2}g-3\omega^2 l)}{2}$$

$$F_{A\tau}=\frac{m(\sqrt{2}g+3\alpha l)}{2}$$

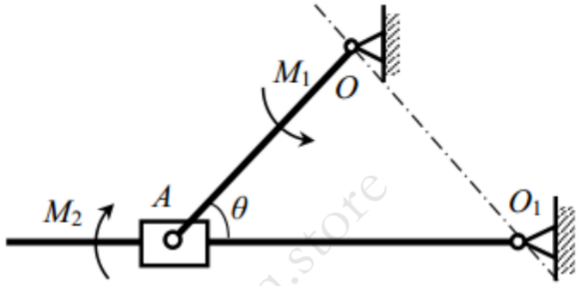
$$M_A=\frac{m(3\sqrt{2}gl+10\alpha l^2)}{12}$$

（6 分）

本题分数	15
得　分	

七、计算题（要求用虚位移原理求解）

图示摇杆机构位于水平面上，已知 $OO_1 = OA$。机构上受到力偶矩 M_1 和 M_2 的作用。机构在可能的任意角度 θ 下处于平衡时，应用**虚位移原理**求 M_1 和 M_2 之间的关系。



解：应用虚位移原理：$M_1 \cdot \delta\varphi_1 - M_2 \cdot \delta\varphi_2 = 0$　　　（**5 分**）

如图所示，$\delta r_a \cos\theta = \delta r_e$

其中：$\delta r_a = OA \cdot \delta\varphi_1$；$\delta r_e = 2\cos\theta \cdot OA \cdot \delta\varphi_2$　　　（**8 分**）

所以：$\delta\varphi_1 = 2\delta\varphi_2$，

得：$M_2 = 2M_1$　　　（**2 分**）