	班号		学号		姓名		
题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

本题分数	20 分
得　分	

一、填空题（每空 2 分）

1. 已知 R^3 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$，则这四个向量是线性__________的（填“相关”或“无关”）. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 应该满足条件：__________________________. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $[0,0,0]^T$ 是线性__________的（填“相关”或“无关”）.

2. R^2中反射变换的表示矩阵 $B=\begin{bmatrix}1-2\cos^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta\\ -2\cos\theta\sin\theta & 1-2\sin^2\theta\end{bmatrix}$的行列式值为____________________，B的伴随矩阵 $B^*=$ ________________________.

3. 写出一个三阶矩阵 A，满足 $A^2\neq O$，但是 $A^3=O$. $A=$ ________________.

4. 已知三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & & \\ -1 & & \\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$的秩为 1，将 A 的所有元素补充完整.

5. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，其元素满足 $a+b=c+d$，已知 $[1,1]^T$ 是 A 的一个特征向量，则 A 的全部特征值是：______________________.

6. 设 n 阶矩阵 A 有 n 个互异的特征值：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 A 的属于λ_1的线性无关的特征向量有__________个，且 $r(\lambda_1 I-A)=$________.

本题分数	9 分
得　分	

二、单项选择题（每题 3 分）

1. 下列陈述中错误的是：（　　）.

A. 初等变换不改变矩阵的秩.

B. 初等变换不改变矩阵的行列式.

C. 初等变换不改变矩阵的可逆与否.

D. 可逆矩阵可以表示为有限个初等矩阵的乘积.

2. 已知三阶方阵 A 和 B，下列陈述中有几个是 A 与 B 相似的充要条件：（　　）.

(1) A 与 B 有相同的特征值.　　(2) A 与 B 有相同的特征多项式.

(3) A 与 B 都相似于同一个对角阵.　　(4) A 与 B 有相同的行列式.

A. 0 个.　　B. 1 个.　　C. 2 个.　　D. 3个.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是二阶方阵 A 的属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量，则下列结论正确的是：（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是正交的.

B. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 A 的全部特征向量.

C. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ (k_1, k_2不全为零) 是 A 的全部特征向量.

D. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$, $k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ (k_1, k_2均不为零) 是 A 的全部特征向量.

本题分数	32 分
得　分	

三、计算题（每题 8 分）（要求写出计算过程）

1. 求方阵 $A = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & b & a & b \\ b & a & b & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$ 的行列式.

2. 已知$B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$，满足$BX=B+2X$，求矩阵$X$.

3. 已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，求$P^{21}AP^{22}$.

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -5 & 0 & 0\\ 4 & x & 0\end{bmatrix}$ 可对角化，求 x 的值.

本题分数	15 分
得　分	

四、已知线性方程组 $\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11\\ -3x_1+x_2-4x_3+2x_4=-5\\ -x_1-9x_2-x_4=17\\ 5x_1+3x_2+6x_3-x_4=k\end{cases}$，其矩阵形式为 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. (1) 当 k 取何值时，方程组无解、有唯一解和无穷多解？(2) 当有无穷解时，求出通解，并给出 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一个特解和 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一组基础解系.

本题分数	16分
得　分	

五、已知实二次型如下：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+6x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+12x_2x_3$$

(1) 写出系数矩阵，求出所有特征值.

(2) 用正交变换将二次型化为标准形，并求出正交变换 $\mathbf{x}=Q\mathbf{y}$ 及二次型的标准形.

(3) 判断此二次型是否正定.

本题分数	8 分
得　分	

六、证明题（三题里面自选两题做，每题 4 分）

1．设 A,B 为 n 阶矩阵，A 可逆，满足 $A^2+AB+B^2=O$.

证明：B 可逆.

2．设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，证明：A^TA 的特征值都是非负实数.

3．设 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 是三维列向量，$\mathbf{v}_1\neq\mathbf{0}$，三阶矩阵 A 满足：$A\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_1$，$A\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$，$A\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$．证明：向量组 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 线性无关.

1. 相关　$\vec{\alpha}_1 = k\vec{\alpha}_2$　相关

2. -1　$\begin{bmatrix} 1-2\sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & 1-2\cos^2\theta \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

5. 0或$a+b$

6. 1　$n-1$

二.

1. B　2. B　3. A

三

1. $|A| = a\cdot\begin{vmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{vmatrix} - b\cdot\begin{vmatrix} b & b & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} b & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} - b\cdot\begin{vmatrix} b & b & b \\ b & a & b \\ a & b & b \end{vmatrix}$

$= a\cdot(ab^2+ab^2+ab^2-b^3-b^3-a^3) - b(ab^2+ab^2+b^3-b^3-b^3-a^2b)$

$+ b\cdot(a^2b+b^3+b^3-ab^2-b^3-ab^2) - b(ab^2+b^3+ab^2-a^2b-b^3-b^3)$

$= 3a^2b^2-2ab^3-a^4-2ab^3+b^4+a^2b^2+a^2b^2+2b^4-2ab^3+b^4-2ab^3+a^2b^2$

$= -a^4+6a^2b^2-8ab^3+3b^4$

2. $\because (B-2I)X = B$

$\therefore X = (B-2I)^{-1}B$

$\because B-2I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$　$\therefore (B-2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore X = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{bmatrix}$

3. $P^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore P^{21}AP^{22} = (P^5)^4 P A (P^5)^4 \cdot P^2 = I\cdot P\cdot A\cdot I\cdot P^2 = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -9 \\ -2 & 5 & -8 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

4. $|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$　$\lambda_3 = 2$.

$\therefore$ A的秩为1

$\therefore X = 0$

四. 方程组对应增广矩阵为:

$$\begin{bmatrix}1&-5&2&-3&11\\-3&1&-4&2&-5\\-1&-9&0&-1&17\\5&3&6&-1&k\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&-14&2&-7&28\\0&-14&2&-4&28\\0&28&-4&14&k-55\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&-14&2&-7&28\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&k+1\end{bmatrix}$$

(1) $k+1\neq0$ 即 $k\neq-1$ 时无解.

$k=-1$ 时有无穷多解

不可能有唯一解.

(2) $k=-1$ 时:

增广矩阵化为 $\begin{bmatrix}1&0&\frac{9}{7}&0&1\\0&1&-\frac{1}{7}&0&-2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}x_1=1-\frac{9}{7}x_3\\x_2=-2+\frac{1}{7}x_3\\x_3=x_3\\x_4=0\end{cases}$

$\therefore$ 通解 $X=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-\frac{9}{7}\\\frac{1}{7}\\1\\0\end{bmatrix}$, $c\in R$

令 $c=0$, 特解为 $\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\end{bmatrix}$ 基础解系 $\xi=\begin{bmatrix}-\frac{9}{7}\\\frac{1}{7}\\1\\0\end{bmatrix}$

五. (1) 系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&6&6\\1&6&9\end{bmatrix}$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&1\\2&6-\lambda&6\\1&6&9-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+16\lambda^2-28\lambda$$

$\therefore\lambda_1=0\quad\lambda_2=2\quad\lambda_3=14.$ 此为三个特征值

(2) $\lambda=0$ 时 解方程组 $(A-0I)\vec{x}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ 基础解系 $\vec{\xi_1}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$ 单位化 $\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}}\\-\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt{14}}\end{bmatrix}$

$\lambda=2$ 时 解方程组 $(A-2I)\vec{x}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ 基础解系 $\vec{\xi_2}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$ 单位化 $\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$

$\lambda=14$ 时 解方程组 $(A-14I)\vec{x}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ 基础解系 $\vec{\xi_3}=\begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix}$ 单位化 $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{42}}\\\frac{4}{\sqrt{42}}\\\frac{5}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}$

$\therefore\ Q=\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{42}}\\-\frac{2}{\sqrt{14}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{4}{\sqrt{42}}\\\frac{1}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{5}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}$ 作正交变换 $x=Qy$

$\Rightarrow$ 标准形为 $2y_1^2+14y_2^2$

(3) $\because 2>0,\ 14>0$

$\therefore$ 是正定的

六

1. 证明: $\because A^2+AB+B^2=0$

$\therefore A^2=-B^2-AB=-B(A+B)$

$\therefore |A|\cdot|A|=(-1)^n|B|\cdot|A+B|$

又$\because$ A可逆 $\therefore |A|\neq 0$

$\therefore |B|\cdot|A+B|\neq 0$

$\therefore |B|\neq 0$ $\therefore$ B可逆

2. 证明: A^TA是实对称矩阵 $\therefore$ 特征值均为实数.

设λ为A^TA的特征值, η为对应特征向量,

则 $A^TA\eta=\lambda\eta$.

$\therefore \eta^TA^TA\eta=\lambda\eta^T\eta$ 即 $\lambda=\dfrac{(A\eta,A\eta)}{(\eta,\eta)}$

又$\because (\eta,\eta)>0, (A\eta,A\eta)\geqslant 0$

$\therefore \lambda\geqslant 0$

3. 证明: $\because A\vec{v}_1=\vec{v}_1$ $\therefore (A-I)\vec{v}_1=0$

又$\because A\vec{v}_2=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ $\therefore (A-I)\vec{v}_2=\vec{v}_1$

又$\because A\vec{v}_3=\vec{v}_2+\vec{v}_3$ $\therefore (A-I)\vec{v}_3=\vec{v}_2$

令 $k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+k_3\vec{v}_3=0$ ①

两边左乘$(A-I)$得:

$k_2\vec{v}_1+k_3\vec{v}_2=0$ ②

再左乘$(A-I)$得:

$k_3\vec{v}_1=0$

$\because \vec{v}_1\neq 0$ $\therefore k_3=0$ 代入②

$\therefore k_2\vec{v}_1=0$ $\therefore k_2=0$ 代入①

$\therefore k_1\vec{v}_1=0$ $\therefore k_1=0$ $\therefore \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$线性无关.