

二〇二三~二〇二四学年 第一学期 《线性代数》 考试试题

考试日期: 2024年 1 月 7 日

试卷类型: B 卷

试卷代号: [REDACTED]

班号

学号

姓名

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

本题分数	20 分
得分	

一、填空题 (每空 2 分) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & 2a & -2 \\ 3a & -3 & 3 \end{pmatrix} | \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 | = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) \neq 0$
 1. 设 $\alpha_1 = (1, -2, 3a)^T, \alpha_2 = (-1, 2a, -3)^T, \alpha_3 = (a, -2, 3)^T$.
 当 a 满足条件: $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

当 $a = -2$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$ 2 < 3 (秩, $|A|=0$, 不可逆)

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{2023} A^{2023} P^{2024} =$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2$$

$$3A^{-1} - \frac{1}{2}A^*$$

3. 设 A 是三阶方阵, 且 $|A+E| = |2A+E| = |A-4E| = 0$, 则 $\left| \left(\frac{1}{3}A \right)^{-1} - \frac{1}{2}A^* \right| =$ 4
 (特征值) 矩阵的行列式. $(-1) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 4 = 2$

4. 三阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, 2\alpha_1)$, 若 $|A| = 1$, 则 $r(A+B) =$ 2, $r(AB) =$ $r(B) = 3$

5. 设 A 为三阶实对称矩阵, 且满足 $A\eta_i = \eta_i (\eta_i \neq 0)$, $A+3E$ 与 $E+A$ 均不可逆. 则符号差为 -1

二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T (A+A^*) X$ 的规范形为

$$f = \begin{pmatrix} y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_1 E - A| = 0 \Rightarrow |-3E - A| = 0$$

$$|A - 3E|$$

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 将 A^{-1} 表示成初等矩阵的乘积:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

本题分数	9 分
得分	

二、选择题 (每题 3 分)

1. 设 2×3 矩阵 A 的秩为 2, 则下列命题中有几个是正确的?

(A)

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

 $Ax=0$ 有非零解(1) 齐次线性方程组 $A^T x = 0$ 只有零解; $\times$ (2) 齐次线性方程组 $(A^T A)x = 0$ 只有零解; $\times$

$$r(A^T A) = r(A) = 2 < 3$$

(3) 对任意的 2 维向量 b , 线性方程组 $A^T A x = b$ 有无穷多解; $\checkmark$ (4) 对任意的 2 维向量 b , 线性方程组 $A^T A x = b$ 只有唯一解. $\times$

A. 1 个;

B. 2 个;

C. 3 个;

D. 4 个.

2. 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^3 = 0$, 则 (B) $(E+A)(E-A) \neq (E-A^2) = A$ $A(E+A)(E-A) = AE$ A. $E-A$ 可逆, $E+A$ 不可逆;B. $E-A$ 可逆, $E+A$ 可逆;C. $E-A$ 不可逆, $E+A$ 可逆;D. $E-A$ 不可逆, $E+A$ 不可逆.3. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数分别是 (B)

A. 2, 0.

B. 1, 1.

C. 1, 2.

D. 2, 1.

三、计算题 (每题 8 分) (要求写出计算过程)

本题分数	32 分
得分	

1. 求行列式 $D =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

的值.

2. 设矩阵 $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, 矩阵 $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 满足方程 $AX = 3X + B$, 求 X .

解:

$$(A - 3E | B) \rightarrow (E | X)$$

即:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3E)X = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^* A = A A^*$$

③ 在实向量空间 R^3 的一个 2 维子空间 $V = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, x_1, x_2, x_3 \in R \right\}$

中有两组基: $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)^T$, $\varepsilon_2 = (3, 0, 1)^T$ 及 $\eta_1 = (2, -1, 0)^T$, $\eta_2 = (1, -2, -1)^T$.

(1) 求 V 中由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 到基 η_1, η_2 的过渡矩阵:

(2) 求 V 中向量 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的坐标.

4. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ 有3个线性无关的特征向量, 求k的

取值范围?

本资源免费共享收集网站 www.xuestore.com

本题分数	13 分
得分	

四、设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 + (a+5)x_4 = b \\ 2x_2 - 4x_3 + (a+4)x_4 = 2 \end{cases}, \text{ 当 } a, b \text{ 为}$$

何值时, 方程组无解, 有唯一解, 有无穷多个解? 当方程组有无穷多个解, 并写出方程组的通解.

本题分数	14 分
得分	

五、实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overset{a_{11}}{5}x_1^2 + \overset{a_{22}}{5}x_2^2 + \overset{a_{33}}{5}x_3^2 + \overset{2a_{12}}{2}x_1x_2 + \overset{2a_{13}}{2}x_1x_3 - \overset{2a_{23}}{2}x_2x_3$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$$

1. 写出此二次型的系数矩阵 A ;
2. 用正交变换将二次型化为标准形, 并写出正交变换 $X = TY$ 及二次型的标准形;
3. 问 t 满足什么条件时, 矩阵 $tE + A$ 是正定矩阵? 并说明理由.

一般解:

本题分数	12 分
得分	

六、证明题(每题6分,任选两题)

1. 设 A 是 n 阶方阵($n \geq 3$), A^* 是 A 的伴随矩阵, 证明:

$$(A^*)^* = |A|^{n-2} A.$$

$$(A^*)^* = |A|^{n-2} A$$

$$AB=0$$

2. 设 A, B, C, D 都是 n 阶矩阵, 且秩(A)= n , 证明:

如果 $AB=BA$, 则秩 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = n + \text{秩}(DA - CB)$.

3. 设 α, β 为 R^3 中的单位列向量且相互正交, 实二次型 $f(X) = 2(\alpha^T X)^2 + (\beta^T X)^2$ 的矩阵为 A , 其中 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$. 证明:

存在正交矩阵 U 使得矩阵 $U^T A U$ 为对角形 $\text{diag}(2, 1, 0)$.

$$3. 11) (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\eta_1, \eta_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

过渡矩阵 C .

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)C = (\eta_1, \eta_2)$$

故令 $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

故 $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

12)

设 $k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2 = \alpha$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \alpha$$

解得

$$\begin{cases} k_1 = x_2 \\ k_2 = x_3 - x_2 \end{cases} \quad \text{即坐标为} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

4. A 有 3 个线性无关的特征向量,

$\Rightarrow$ A 一定可以相似对角化.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda - 4 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - k \end{vmatrix} = (\lambda - k)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

故 $k \neq 2$ 且 $k \neq 3$.

四. 增广矩阵 $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & a & a+5 & b \\ 0 & 2 & -4 & a+4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a-1 & a+4 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a+3 & a+3 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & 0 \end{bmatrix}$

① 当 $a = -3, b \neq 1$ 时,
方程组无解.

② 当 $a = -3, b = 1$ 时,
方程组有无穷多解.

③ $a \neq -3$ 时,
方程组有唯一解.

当 $a = -3, b = 1$ 时.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $x_3 = x_4 = 0$ 则 $x_2 = 1, x_1 = -2$

故特解 $\alpha = (-2, 1, 0, 0)^T$.

对应齐次方程的基础解系 $\eta_1 = (-3, 2, 1, 0)^T$

$\eta_2 = (-1, -1, 0, 2)^T$

故方程组的通解为

$x = \alpha + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2$, k_1, k_2 为任意常数.

五. 1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

2. $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-6 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-5 & 1 \\ \lambda-6 & 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-6 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-5 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$

令 $|\lambda E - A| = 0$ 得 $\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$

$\lambda_1 = 3$ 时. $\lambda_1 E - A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 令 $(\lambda_1 E - A)x = 0$. $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

特征向量 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ 时. $\lambda E - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T$ $\alpha_3 = (1, 0, 1)^T$

对于 $\lambda = 6$, α_2, α_3 不正交. 需正交化. 令 $\beta_2 = \alpha_2 = (1, 1, 0)^T$

$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^T$

单位化. $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$ $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$ $\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^T$

故 $T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$

$x^T A x = y^T (T^T A T) y$
 $= y^T (T^T A T) y = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2$

3. $tE + A = \begin{bmatrix} 5+t & 1 & 1 \\ 1 & 5+t & -1 \\ 1 & -1 & 5+t \end{bmatrix}$ 为正定矩阵

$\begin{cases} 5+t > 0 \\ (5+t)^2 - 1 > 0 \\ |tE + A| > 0 \end{cases} \Rightarrow t > -3$

六.证明. ① $|A|=0$ 时, 成立

② $|A| \neq 0$ 时, $AA^* = |A|E$. A 为 n 阶方阵. $A^* = A^{-1}|A|$

$$(A^*)^* = (A^*)^{-1}|A^*| \quad \text{由于 } |A \cdot A^*| = | |A|E | = |A|^n |E| \Rightarrow |A| \cdot |A^*| = |A|$$

$$\text{故 } |A^*| = |A|^{n-1}. \quad \text{故 } (A^*)^* = (A^*)^{-1} \cdot |A|^{n-1} = (|A| \cdot A^{-1})^{-1} \cdot |A|^{n-1}$$

$$= |A|^{-1} \cdot A \cdot |A|^{n-1} = |A|^{n-2} \cdot A$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & DA-CB \end{bmatrix} \quad r(A) = n.$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & DA-CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AB \\ 0 & DAA-CBA \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & AB \\ 0 & DA-CB \end{bmatrix}$$

$$\therefore r \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & DA-CB \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & AB \\ 0 & DA-CB \end{pmatrix} = r(A) + r(DA-CB) = n + r(DA-CB)$$

3. 已知 a, b 为单位向量, 且相互正交.

则可任取 $a = (1, 0, 0)^T$ $b = (0, 1, 0)^T$ 则有 $f(x) = 2x_1^2 + 1x_2^2$ 的情况

此时, 系数矩阵为 $A' = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix}$. $n_1, n_2, n_3 = 0$ 或 1 或 2 , 且互不相同.

任意 $n_1 = 0$ 或 1 , $n_2 = 1$, $n_3 = 2$ 或 0 .

有 $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $U^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 正交阵. $U^T A U = A'$