一、填空

1. $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$，则 $dy\big|_{y=0}=$ ______

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\arcsin x}=$ ______

3. $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，则 $f'(50)=$ ______

4. $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 处 n 阶泰勒多项式 ______

5. $f(2)=4$，$\int_0^2 x f(x)\,dx=8$，$\int_0^1 x^2 f'(2x)\,dx=$ ______

6. $r=\sqrt{2}\sin\theta$ 与 $\theta=0$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ 所围面积 $S=$ ______

7. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，该级数收敛半径为 ______

8. $f(x)=x^2$，$0\le x\le 1$，傅里叶级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos n\pi x$，$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx$，则 $S(-\frac{1}{2})=$ ______

二、选择

1. 若 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1$，则 $x=a$ 处（　　）

A. 有极大值　　B. 极小值　　C. 拐点　　D. 无法确定为极值

2. 下列广义积分收敛的是（　　）

A. $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　　B. $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}}dx$　　C. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$　　D. $\int_0^1\frac{1}{x(x+1)}dx$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$（　　）

A. 收敛　　B. 发散　　C. 可能收敛或发散　　D. 一定绝对收敛

三、计算

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\pi}\right)$

2. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

3. $f(x)$ 连续，$\int_0^x f(2x-t)\,dt=e^{2x}-e^x$，则 $\int_0^2[f(x)+f(-x)]\,dx$

4. 将 $f(x)=\frac{x}{x^2+5x+6}$ 展开成 $(x+1)$ 的幂级数

5. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+\sin^2 x}{1+\cos x}, & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ xe^{2x}, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$，求 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x-\pi)\,dx$

四. 判断级数收敛性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot n! \dfrac{\sin\frac{n\pi}{5}}{n^n}$　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin n^2$

五. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} x^{n-1}$ 收敛域及和函数 $S(x)$

六.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0 \\ \sqrt{2}, & x=0 \\ \dfrac{1}{x-\sin x}\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t^2}}\,dt, & x>0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续. 求 a. b.

七. D_1 为 $y=2x^2$, $x=a$, $x=2$, $y=0$ 所围面积, 绕 x 轴旋转体积为 V_1,

D_2 为 $y=2x^2$, $x=a$, $y=0$ ~, 绕 y 轴 V_2, $0<a<2$, 则 $(V_1+V_2)_{max}=?$, 此时 $a=?$

八. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可导, $f'(x)>0$, $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明在 (a,b) 上 $f(x)>0$