南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一六 ～ 二〇一七 学年 第一学期 **《高等数学 I（1）》考试试题**

考试日期： 2017 年　月　日　　试卷类型： A　试卷代号：

班号　　　　学号　　　　姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

本题分数	18
得　分	

一．填空题（每题 3 分）：

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\arctan x}{x-\cos x}=$ ______________。

2．设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^2(a+3h)-f^2(a-2h)}{h}=$ ______________。

3. 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\int_0^1 xf(x)dx$，则 $f(x)=$ ______________。

4. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n+1}$ 的收敛半径 $R=$ ______________。

5. 函数 $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ 的麦克劳林展开式是______________________________。

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x, & \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$，记 $f(x)$ 的正弦级数的和函数是 $S(x)$，则 $S(-\dfrac{\pi}{2})=$ ______________________。

本题分数	6
得　分	

二．选择题（每题 3 分）：

1. 设 $x\to 0$ 时，$\alpha \sim \beta$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}}$ 等于（　　　　）

（A）e；　　（B）e^2；　　（C）1；　　（D）$e^{\frac{1}{2}}$。

2. 下列广义积分发散的是（　　　　）

（A）$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sin x}dx$；　（B）$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　（C）$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$；　（D）$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$。

本题分数	36
得　　分	

三．计算题（每题 6 分）：

1． $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1\cdot(2n-1)}{n^3}+\dfrac{2\cdot(2n-2)}{n^3}+\dfrac{3\cdot(2n-3)}{n^3}+\cdots+\dfrac{n\cdot(2n-n)}{n^3}\right)$；

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^x-e^y=\sin(xy)$ 所确定，求 y' 及 $y'(0)$；

3. $\displaystyle\int\frac{1}{6+2\sqrt{1-x}-x}dx$；

4. $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$；

5. $\int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx$；

6. 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+2x}, & x>0 \\ e^x, & x\le 0 \end{cases}$，计算 $\int_{-1}^5 f(x-1)dx$ 。

本题分数	8
得　　分	

四．设$\varphi(x)=\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$，求$\varphi'''(x)$，其中 $f(x)$ 是连续函数。

本题分数	10
得　　分	

五．设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的平面图形的面积为 S_2，且 $a<1$。（1）确定 a 的值，使得 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值;（2）求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

本题分数	8
得　　分	

六．判断下列级数的敛散性. 若收敛，指出是条件收敛还是绝对收敛：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n^2-n+1}$；　　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(e^n+e^{-n})}$。

本题分数	8
得　　分	

七．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+(-1)^n}{n}x^n$ 的收敛域及和函数。

本题分数	6
得　　分	

八．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导数，并且满足 $f(1)-f(0)=1$，证明：$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1$。