2018-2019 学年第二学期期中考试 A 卷

一、填空题

1. 设$u(x,y,z)=x^2y+e^{xz}$，则$du\big|_{(1,1,0)}=$__________

2. 曲线$\begin{cases} x=t^2 \\ y=\sin\pi t \\ z=2\ln t \end{cases}$在对应$t=2$点处的切线方程为________.

3. 函数$f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$在点$(0,1)$处的梯度为_______

4. 函数$u=x^2+2y^2-z$，在$P(2,1,0)$处沿$\vec{l}=(2,2,1)$的方向导数为_______

5. 已知$z=f(\sin(x^2),\cos y,e^{x+y})$，其中$f$具有一阶连续偏导数，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$_______

6. 交换二次积分的次序$\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx=$________

7. 已知$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq 2z\}$，将三重积分化$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$化为球面坐标下的三次积分________

8. 已知椭圆L: $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$的周长为a,则曲线积分$\int_L (xy+2x^2+y^2)ds=$________

9. 设C: $x^2+y^2=1$，取逆时针方向，则曲线积分$\oint_C \dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=$________

二、设$z=z(x,y)$是由方程$xy+\sin(z-3x)=0$确定的隐函数，计算$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}$

三、已知$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，判断函数$f(x,y)$在(0，0)点处的（1）连续性；（2）偏导数是否存在；（3）可微性。

四、已知$f(x,y)$是连续函数，区域D: $x^2+y^2\leq 1$，且$f(x,y)=x^2+y^2+xy-\dfrac{1}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy$，求函数$f(x,y)$。

五、计算$\iiint_\Omega x\,dxdydz$，其中Ω是由平面$x+2y-z=1$与三个坐标面所围成的空间闭区域

六、已知上半球面Σ_1: $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$与上半锥面Σ_2: $2z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体为Ω，求Ω的表面积和体积。

七、计算$\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$,其中 C 为圆$x^2+y^2=4x$的一周。

八、求曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$的切平面，使得该切平面在三个坐标面上的截距之积最大。

九、计算曲线积分$I=\int_L (1-y)dx+(2x+e^{\sin y})dy$，其中 L 是从点 A(1,0)沿第一象限的直线段$x+y=1$到点 B(0,1)，再沿第二象限中的圆弧$x^2+y^2=1$到点 C(-1,0)所构成的曲线弧。

十、设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在光滑曲线 L 上连续，L 的长度为 s，$M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$，证明

$$\left|\int_L Pdx+Qdy\right|\le Ms。$$

2018-2019 学年第二学期期中考试 A 卷参考答案

一、填空题(15 分，每小题 3 分)

1、【正解】$2dx+dy+dz$

【学解】$u_x'=2xy+ze^{xz}$，$u_y'=x^2$，$u_z'=xe^{xz}$

$$du\big|_{(1,1,0)}=2dx+dy+dz$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1 偏导数的定义及其算法.

2、【正解】$\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y}{\pi}=\dfrac{z-2\ln 2}{1}$

【学解】当 $t=2$ 时，

$$\begin{cases}x=4\\ y=0\\ z=2\ln 2\end{cases}\quad \text{对 } t \text{ 求导可得：}\begin{cases}x_t'=2t=4\\ y_t'=\pi\cos\pi t=\pi\\ z_t'=\dfrac{2}{t}=1\end{cases}$$

故切线方程 $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y}{\pi}=\dfrac{z-2\ln 2}{1}$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.3 参数方程求导.

3、【正解】$(1,0)$或$\vec{i}$

【学解】$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$

$$\mathrm{grad}f(0,1)=(1,0)=\vec{i}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.2 梯度

4、【正解】5

【学解】在点$P(2,1,0)$处$\begin{cases}u_x'=2x=4\\ u_y'=4y=4\\ u_z'=-1\end{cases}$

沿$\vec{l}=(2,2,1)$方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=4\times\frac{2}{3}+4\times\frac{2}{3}+(-1)\times\frac{1}{3}=5$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1 方向导数.

5、【正解】$2x\cos x^2\cdot f_1'+f_3'e^{x+y}$

【学解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'(\sin x^2)'+0+f_3'e^{x+y}$

$$=2x\cos x^2\cdot f_1'+f_3'e^{x+y}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.2 高阶偏导数

6、【正解】$\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}f(x,y)dy$

【学解】$\int_0^1 dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx$

画出积分区域D:$\left\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,\ \dfrac{x}{2}\leqslant y\leqslant 3-x\right\}$

对该区域积分：$\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}f(x,y)dy$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1 利用直角坐标系计算二重积分

7、【正解】$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\sin\varphi dr$

【学解】球面坐标系：$0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

积分：$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\sin\varphi dr$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 第三部分 三重积分

8、【正解】$2a$

【学解】$\int_L(xy+2x^2+y^2)ds=\int_L xyds+\int_L(2x^2+y^2)ds$

椭圆L: $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$关于原点对称,周长为a，曲线积分$\int_L xyds=0$

$$\int_L(2x^2+y^2)ds=2a$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1 对弧长的曲线积分的概念与性质

9、【正解】-2π

【学解】在曲线 C 上，$x^2+y^2=1$

$$\oint_C \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\oint_C ydx-xdy=\oint_C Pdx+Qdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=-2\pi$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 3.1 格林公式

二、【学解】方程对 x 求偏导

$$y+\cos(z-3x)\cdot(z_x'-3)=0$$

$$z_x'=3-\frac{y}{\cos(z-3x)}$$

方程对 y 求偏导

$$x+\cos(z-3x)\cdot z_y'=0$$

$$z_y'=-\frac{x}{\cos(z-3x)}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=3x-\frac{xy}{\cos(z-3x)}+\frac{xy}{\cos(z-3x)}=3x$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 第四部分 隐函数的求导公式

三、【学解】

(1) 令 $x=t\cos\theta$，$y=t\sin\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2\cos^2\theta\cdot t^2\sin^2\theta}{\sqrt{(t^2)^3}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^4\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta}{t^3}=0$$

$f(x,y)$在(0，0)点处连续

(2) $$f_x'(0,0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x,0)-f(0,0)}{\triangle x}=0$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{f(0,\triangle y)-f(0,0)}{\triangle y}=0$$

故偏导数存在

(3) 令$\triangle x = p\cos\alpha$，$\triangle y = p\sin\alpha$

$$\lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}}\frac{f(\triangle x,\triangle y)-f'_x(0,0)\triangle x-f'_y(0,0)\triangle y}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}=\lim_{p\to 0^+}\frac{\frac{p^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{p^3}}{p}=\cos^2\alpha\sin^2\alpha$$

此式不恒为0，故$f(x,y)$在(0，0)点处不可微

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1 偏导数的定义及其算法

四、【学解】已知区域D. 设$\iint_D f(x,y)dxdy = A$

$$f(x,y)=x^2+y^2+xy-\frac{1}{\pi}A$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D(x^2+y^2+xy)dxdy-\frac{1}{\pi}A\iint_D dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^2+r^2\cos\theta\sin\theta)rdr-A$$

$$A=\frac{\pi}{2}-A$$

$$A=\frac{\pi}{4}$$

$$f(x,y)=x^2+y^2+xy-\frac{1}{4}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 第二部分二重积分的计算方法

五、【学解】

$$原式=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}dy\int_{x+2y-1}^0 x\,dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}x(1-x-2y)dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x(1-x)^2dx$$

$$=\frac{1}{48}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 3.1 利用直角坐标计算三重积分.

六、【学解】求Ω的体积

Σ_1: $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 与 Σ_2: $2z=\sqrt{x^2+y^2}$

联立 $2\sqrt{5-x^2-y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$，得交线：$x^2+y^2=4$

$$体积V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_{\frac{r}{2}}^{\sqrt{5-r^2}} r\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left(r\sqrt{5-r^2}-\frac{r^2}{2}\right)dr$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{3}(5-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_0^2$$

$$=\frac{10\pi\left(\sqrt{5}-1\right)}{3}$$

求Ω表面积

上半球面Σ_1: $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$

$$z'_x=\frac{-x}{\sqrt{5-x^2-y^2}},\quad z'_y=\frac{-y}{\sqrt{5-x^2-y^2}}$$

$$表面积S_1=\iint_D\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5-r^2}}r\,dr=2\sqrt{5}\,\pi\left(\sqrt{5}-1\right)$$

锥面Σ_2: $2z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$z'_x=\frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}},\quad z'_y=\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$表面积S_2=\iint_D\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\iint_D dxdy=2\sqrt{5}\,\pi$$

其中，D: $x^2+y^2\leqslant 4$

$$S=S_1+S_2=10\pi$$

综上所述，表面积10π，体积$\dfrac{10\pi\left(\sqrt{5}-1\right)}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 曲线积分与曲面积分

七、【学解】令$x=r\cos\theta$，$y=\sin\theta$，

$r^2=4r\cos\theta$，故$r=4\cos\theta$

代入得$x=4\cos^2\theta$，$y=4\cos\theta\sin\theta$

$$\oint_C\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\oint_C\sqrt{4x}\,ds$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos\theta\cdot\sqrt{16\cos^2\theta+16\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}16\cos\theta\,d\theta$$

$$=32$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1 对坐标的曲线积分的概念与性质.

八、【学解】令$F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-1$，$F(x,y,z)$上的任意一点为$(x_0,y_0,z_0)$

$$\begin{cases}F'_x=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\\F'_y=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\\F'_z=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\end{cases}$$

切平面：$\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\dfrac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$

该平面在三个坐标面上截距：

当$y=0,z=0$时，$x=\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)\cdot\sqrt{x_0}=\sqrt{x_0}$

当$x=0,z=0$时，$y=\sqrt{y_0}$

当$x=0,y=0$时，$z=\sqrt{z_0}$

设所求截距之积为d，则$d=\sqrt{x_0y_0z_0}$

设$L(x,y,z,\lambda)=\sqrt{xyz}-\lambda\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-1\right)=0$

$$\begin{cases} L'_x=\dfrac{yz}{2\sqrt{xyz}}-\dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}=0 \\ L'_y=\dfrac{xz}{2\sqrt{xyz}}-\dfrac{\lambda}{2\sqrt{y}}=0 \\ L'_z=\dfrac{xy}{2\sqrt{xyz}}-\dfrac{\lambda}{2\sqrt{z}}=0 \\ L'_\lambda=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-1=0 \end{cases}$$ 解得 $x=y=z$

当 $x=y=z$ 时，d 最大

代入原式 $x=y=z=\dfrac{1}{9}$

切平面 $\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{1}{9}\right)+\dfrac{3}{2}\left(y-\dfrac{1}{9}\right)+\dfrac{3}{2}\left(z-\dfrac{1}{9}\right)=0$

即 $x+y+z-\dfrac{1}{3}=0$，该切平面在三个坐标面上的截距之积最大，为 $\dfrac{1}{27}$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.2 条件极值拉格朗日乘数法.

九、【学解】补线法，补充 $\overrightarrow{CA}$，使积分曲线构成闭区域 D

$$I=\oint_{\overrightarrow{ABCA}}-\int_{\overrightarrow{CA}}=\oint_{\overrightarrow{ABCA}}+\int_{\overrightarrow{AC}}$$

$$I_1=\oint_{\overrightarrow{ABCA}}Pdx+Qdy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=3\iint_D dxdy=3\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}dx$$

$$=3\left[\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1+\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy\right]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3\pi}{4}$$

$$I_2=\int_{\overrightarrow{AC}}(1-y)dx+(2x+e^{\sin y})dy=\int_1^{-1}dx=-2$$

$$故 I=\frac{3}{2}+\frac{3\pi}{4}-2=\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 曲线积分与曲面积分.

十、【学解】

$$\left|\int_L Pdx+Qdy\right|=\left|\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds\right|\leqslant\int_L |P\cos\alpha+Q\cos\beta|ds$$

设$\vec{F}=(P,Q)$，$\vec{t}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，两向量夹角为$\theta$

$$\int_L\left|\vec{F}\cdot\vec{t}\right|ds\leqslant\int_L|\vec{F}||\vec{t}|ds\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\cdot\int_L ds=\sqrt{P^2+Q^2}\cdot s\leqslant Ms$$

即证$\left|\int_L Pdx+Qdy\right|\leqslant Ms$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1 对弧长的曲线积分的概念与性质.