南京航空航天大学

二〇一九～二〇二〇学年 第一学期《高等数学I期中》考试试题

考试日期：2019年11月16日　　试卷类型：　　试卷代号：08021

班号　　学号　　姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

本题分数	21
得　分	

一、填空题（每空3分，共21分）

1、若 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$________。

2. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin(kx)}}=e$，则 $k=$________。

3. 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，则 $f'(1)=$________。

4. 曲线 $y=3^x+5x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________。

5. 设 $y=x^{\sin x}(x>0)$，则 $dy=$________。

6. 若 $y=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$，则 $y^{(n)}=$________。

7. 函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(1-x)^2}$ 的斜渐近线为________。

本题分数	9
得　分	

二、单项选择题（每题 3 分，共 9 分）

1. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=2$，则 $f(x)$ 在 x_0 处（　　）。

（A）可导且 $f'(x_0)\neq 0$；　　（B）不可导；

（C）取得极小值　　（D）取得极大值。

2. 若 $ab<0, f(x)=\dfrac{1}{x}$，则在 (a,b) 内使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立的 ξ（　　）。

(A) 至少有一个；　　(B) 只有一个；

(C) 不存在；　　(D) 是否存在与 a、b 有关。

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-3x)+d(1-e^{-x^2})}=2$, 其中 a,b,c,d 为常数，且 $ac\neq 0$，则必有（　　）

(A) $a=-6c$ ；　　(B) $a=6c$；

(C) $b=-6d$；　　(D) $b=6d$。

三、计算题（每题 6 分，共 30 分）

本题分数	6
得　分	

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2-2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2-n}}\right)$

本题分数	6
得　分	

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$。

本题分数	6
得　分	

3. 设函数 $y=x\arcsin x+e^{f(\cos x)}$，其中 f 可导，求 y'。

本题分数	6
得　分	

4. 设 $y=y(x)$ 是方程 $e^{y}+xy+x^{2}=e$ 所确定的隐函数，求 $y'(0), y''(0)$。

本题分数	6
得　分	

5. 设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \arctan t \end{cases}$ 确定函数 $y = y(x)$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$。

本题分数	8
得　分	

四、找出函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+x+x^2 e^{nx}}{1+e^{nx}}$ 的间断点并判断其类型。

本题分数	8
得　分	

五、（1）求函数 $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} - \arctan\frac{1}{x}\,(x<0)$ 的极值；

（2）求上述曲线 $y = f(x)(x<0)$ 的凹凸区间。

本题分数	8
得　分	

六. 证明：当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$2\sin x + \tan x > 3x$。

本题分数	8
得　分	

七、设$f(x) = \begin{cases} \frac{x\cos x - e^x + 1}{x^2}, x \neq 0 \\ a, x = 0 \end{cases}$

问：当a取何值时，$f(x)$在$x = 0$处连续？此时，$f(x)$在$x = 0$处是否可导？若可导，求$f'(0)$。

本题分数	8
得　分	

八. 设 a、b、c 是二次可导函数 $f(x)$ 的三个零点，且 $a<b<c$。证明

（1） 方程 $f'(x)+2f(x)=0$ 在 (a,c) 内至少有两个相异的实根；

（2） 当 $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=0$ 在 (a,c) 内至少有一个实根。

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一九 ～ 二〇二〇 学年　第 一　学期

课程名称：《 高等数学 I（1） 》参考答案及评分标准

命题教师：　　　　试卷类型：期中　　　　试卷代号：

一．填空题（每空 3 分）

1. $\begin{cases} 2+x, x<-1 \\ 1, x\geq -1 \end{cases}$　　2. -2　　3. 2　　4. $y=(5+\ln 3)x+1$

5. $x^{\sin x}(\cos x\cdot \ln x+\frac{\sin x}{x})dx$

6. $(-1)^n n![\frac{2}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}]$,　　7. $y=x+2$

二．选择题： CCA

三．计算题（每题 6 分）

1. 解： $\frac{n}{\sqrt{2n^2-1}}<\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2-2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n^2-n}})<\frac{n}{\sqrt{2n^2-n}}$　　3 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　5 分

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2-2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n^2-n}})=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　6 分

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x})=1+0=1$　　2 分

$\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x})=2-1=1$　　4 分

$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x})=1$　　6 分

3. $y'=\arcsin x+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　3 分

$-e^{f(\cos x)}f'(\cos x)\sin x$　　6 分

4. 首先 $x=0, y(0)=1$

$e^y y' + y + xy' + 2x = 0$

所以 $y'(0) = -e^{-1}$ 3 分

$e^y y'' + e^y (y')^2 + 2y' + xy'' + 2 = 0$

所以，$y''(0) = e^{-2} - 2e^{-1} = \frac{1-2e}{e^2}$ 6 分

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{2t}(t \neq 0)$ 3 分

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{1}{2t})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{4t^3}$ 6 分

四．因为 $f(x) = \begin{cases} 1+x, x<0 \\ \frac{1}{2}, x=0 \\ x^2, x>0 \end{cases}$ 4 分

易知，$x=0$ 是第一类间断点。 8 分

五．$f'(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1+x}{1+x^2}$， 2 分

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=-1$。

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$。 4 分

又因为 $f''(x) = \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$， 令 $f''(x)=0$，得 $x=-1\pm\sqrt{2}$。

当 $-\infty < x < -1-\sqrt{2}$ 时，$f''(x)<0$；

当 $-1-\sqrt{2} < x < 0$ 时，$f''(x)>0$ ， 6 分

所以得曲线凸区间为 $(-\infty, -1-\sqrt{2})$，凹区间为 $(-1-\sqrt{2}, 0)$。 8 分

六、　证明：　设$F(x)=2\sin x+\tan x-3x$，

$F'(x)=2\cos x+\sec^2 x-3.$　　2 分

$F''(x)=-2\sin x+2\sec x\sec x\tan x=2\sin x(\frac{1}{\cos^3 x}-1)$　　4 分

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$F''(x)>0$，从而$F'(x)$是严格单调增加，又$F'(0)=0$，

$F'(x)$在$x=0$处连续，所以$F'(x)>F'(0)=0$。

同理，$F(x)$是严格单调增加，

$\therefore F(x)>F(0)=0$（$0<x<\frac{\pi}{2}$），　　6 分

即当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$2\sin x+\tan x>3x$。　　8 分

七．（1）　$a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-e^x+1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$　　4 分

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos x-2e^x+x^2+2}{2x^3}=-\dfrac{2}{3}$　　8 分

八．证明：（1）　令$F(x)=e^{2x}f(x)$，且$F(a)=F(b)=F(c)$，

对$F(x)$分别在$[a,b],[b,c]$上用 Rolle 定理，

则存在$\xi_1\in(a,b),\xi_2\in(b,c)$，使$F'(\xi_1)=0,F'(\xi_2)=0$

即$e^{2\xi_1}[f'(\xi_1)+2f(\xi_1)]=0,e^{2\xi_2}[f'(\xi_2)+2f(\xi_2)]=0$

因为$e^{2\xi_1}\neq 0,e^{2\xi_2}\neq 0$,

所以$f'(\xi_1)+2f(\xi_1)=0,f'(\xi_2)+2f(\xi_2)=0$

即方程$f'(x)+2f(x)=0$在(a,c)内至少有两个相异的实根。　　4 分

（2）令$G(x)=e^x[2f(x)+f'(x)]$，　则$G(x)$可导。由(1)可知

$G(\xi_1)=G(\xi_2)$。在$[\xi_1,\xi_2]$上对$G(x)$用 Roll 定理，

则存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,c)$，使$G'(\xi)=0$，即

$e^\xi[f''(\xi)+3f'(\xi)+2f(\xi)]=0$，亦即

$f''(\xi)+3f'(\xi)+2f(\xi)=0$。

从而（2）得证。　　8 分