

南京航空航天大学

第1页 (共6页)

二〇二〇~二〇二一 学年 第1学期 《高等数学(1)》 期末考试试题

考试日期: 2021 年1月13日

试卷类型: B

试卷代号:

080035

班号

学号

姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	24
得分	

一. 填空 (每空格 3 分)

1. 设曲线 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \int_0^u e^{-t^2} dt \\ y = \int_0^u \sin(u-t) dt \end{cases}$ 确定, 则 $y'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 曲线 $y = \ln(1-x^2)$ 上相应于 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 的一段弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 半球面 $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ 和旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 所围闭曲面在 xoy 面上投影部分的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{2}{n}} \cdots e^{\frac{n}{n}}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 已知三点 $A(1,0,1), B(2,1,1), C(1,1,1)$, 则 $\triangle ABC$ 底边 AC 上高为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 设有二阶连续导数的函数 $y = f(x) > 0$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = 0$, 且 $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx = 0$, 则 $y = f(x)$ 与 $x=0$, $x=2$ 所围平面图形的面积 $S = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 已知 $f(x)$ 有连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right] = 2$, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

本题分数	9
得分	

二. 选择题 (每题 3 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $bx - \sin x$ 与 $\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt$ 是等价无穷小, 则 ()

A. $a=4, b=1$ B. $a=1, b=4$ C. $a=-4, b=1$ D. $a=4, b=-1$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 则下列说法正确的是 ()

1. 若 $f''(x) > 0$, 则 $\int_0^1 f(x)dx > f\left(\frac{1}{2}\right)$; 2. 若 $f''(x) > 0$, 则 $\int_0^1 f(x)dx < f\left(\frac{1}{2}\right)$;

3. 若 $f''(x) < 0$, 则 $\int_0^1 f(x)dx > f\left(\frac{1}{2}\right)$; 4. 若 $f''(x) < 0$, 则 $\int_0^1 f(x)dx < f\left(\frac{1}{2}\right)$;

A. 1, 4 B. 2, 3 C. 2, 4 D. 1, 3

3. 下列反常积分收敛的是 ()

A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+2x}} dx$ B. $\int_0^1 \frac{\sqrt{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[3]{x}} dx$

C. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$ D. $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^3} dx$

本题分数	6
得分	

三. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) \ln(3+t^2) dt}{\sin^2 x}$.

四. 计算题 (每题 5 分)

本题分数	25
得 分	

1. $\int \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} dx.$

2. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

3. $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx.$

4. 若函数 $f(x) = xe^x + \frac{x(e^x + e^{-x})}{1 + \sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^1 f(x) dx$, 求 $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$

本题分数	8
得分	

五. 已知一直线通过 $x + y - z - 8 = 0$ 与直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ 的交点, 且与 $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ 垂直相交, 求该直线的方程。

本题分数

8

得分

六. 曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体, 将它在 $x=0, x=\xi (\xi > 0)$ 之间部分的体积记为 $V(\xi)$, 且 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi) (0 < a < \xi)$, 求 a 为多少?

本题分数

10

得分

七. 设 $x \in R$, 求 $f(x) = \int_0^1 |2x-t| dt$ 及 $f(x)$ 的极值。

本题分数	10
得分	

八. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 且

$$f(0) = f(1) = \int_0^1 f(x) dx. \text{ 证明:}$$

1. 方程 $f(x) = \int_0^1 f(x) dx$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根;

2. 存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f''(\xi) = 0$ 。

1. 设曲线 $y=f(y(x))$ $\begin{cases} x = \int_0^u e^{-t^2} dt \\ y = \int_0^u \sin(u-t) dt \end{cases}$ 确定 则 $y'(0) = 0$
 $\downarrow x=0 \quad u=0$

[积分上限函数] $w = u - t$ $-\int_u^0 \sin w dw$
 $\Rightarrow \int_0^u \sin w dw$

t	0	u
w	u	0

2. $y = \ln(1-x^2)$ 相应于 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 的一段弧长为

$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx$
 $= -\frac{1}{2} + \ln \frac{1+x}{1-x} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \ln 3$

3. 半球面 $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ 和旋转抛物面 $z = x^2+y^2$ 所围闭曲面在 xOy 面上

投影部分的面积 πr^2

联立 $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2} \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=1 \\ z=\sqrt{2-z} \end{cases}$

$2-x^2-y^2 = x^4+y^4+2x^2y^2$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{2}{n}} \cdots e^{\frac{n}{n}}} = \left(e^{\frac{1+2+\cdots+n}{n}} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}} = e^{\frac{1}{2}}$

取对 定积分

5. $A(1,0,1)$ $B(2,1,1)$ $C(1,1,1)$ 则 $\triangle ABC$ 底边 AC 上高为 1

$\frac{1}{2} |\vec{AC}| h = |\overline{S_{\triangle ABC}}| = \frac{1}{2} S_{\square} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

外积

$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$

6. 设有二阶连续导数函数 $y=f(x)$ 有, $f(2)=\frac{1}{2}$ $f'(2)=0$ $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx = 0$

则 $y=f(x)$ 与 $x=0$ $x=2$ 所围平面图形 $S=$ 1

$$0 = \int_0^1 x^2 f''(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 df(2x) = \frac{x^2}{2} f'(2x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f'(2x) d(x^2)$$

$$0 = f'(2x) x dx \Rightarrow \int_0^1 x df(2x) = x f(2x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(2x) dx \quad u=2x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^2 f(u) du \quad dx = \frac{1}{2} du$$

7. $f(x)$ 有连续导数 $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x}] = 2$ $f(0) = -1$ $f'(0) =$ 2

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$ $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - A) = 0$ $f(x) - A = o(x)$ 无穷小 $\therefore f(x) = A + o(x)$

$$\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} = 2 + o(x)$$

$$f(x) = (2 + o(x))x - \frac{\sin x}{x}$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{x} + 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} (2 + o(x))$$

$$\frac{\cos x + x f'(x) + f(x)}{2x} = \frac{\sin x + x f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} + 2$$

选

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时 $bx - \sin x$ 与 $\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt$ 是等价无穷小则

$b=1$ 泰勒 相对 x 3阶

$b \neq 1$ 1阶 $\frac{4x - \sin x}{x} \rightarrow C \neq 0$

洛必达 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - \sin x}{g(x)} \quad \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}} \quad a=4$

A. $a=4$ $b=1$ B. $a=1$ $b=4$ C. $a=-4$ $b=1$ D. $a=4$ $b=-1$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有二阶连续导数 则下列说法正确 (A)

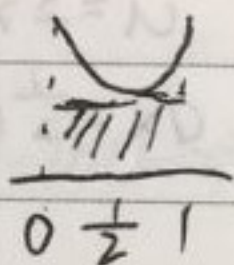
1. 若 $f''(x) > 0$ 则 $\int_0^1 f(x) dx > f(\frac{1}{2})$

2. 若 $f''(x) > 0$ 则 $\int_0^1 f(x) dx < f(\frac{1}{2})$

3. 若 $f''(x) < 0$ 则 $\int_0^1 f(x) dx > f(\frac{1}{2})$

4. 若 $f''(x) < 0$ 则 $\int_0^1 f(x) dx < f(\frac{1}{2})$

A. 1, 4 B. 2, 3 C. 2, 4 D. 1, 3



$\int_0^1 f(x) dx = \text{面积}$ $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) \cdot 1$ 面积

图

泰勒 $f(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - \frac{1}{2})^2$

$\int_0^1 (x - \frac{1}{2}) dx = 0$

恒正

$\int_0^1 f(x) dx = f(\frac{1}{2}) + \text{正}$

3. 下列反常积分收敛 (B)

A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+2x}} dx$

B. $\int_0^1 \frac{\sqrt{\ln^3(1-x)}}{\sqrt[3]{x}} dx$

C. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$

D. $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^3} dx$

奇点 $x_0 = 0$?

C. $I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sin x} + \int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ 发散

$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} |\ln| \csc(x - \cot x) ||_{\epsilon}$

变形 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 0$

$$\therefore \text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) \ln(3+t^2) dt}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x \ln(3+t^2) dt}{\sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(3+t^2) dt}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\int_0^x \ln(3+t^2) dt}{2x} = \frac{\ln(3+x^2)}{2} \cdot \frac{\int_0^x \ln(3+t^2) dt}{\sin^2 x \cdot x^2}$$

$$\star \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t) f(t) dt = \frac{d}{dx} [x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt]$$

$$= \int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x)$$

$$1. \int \frac{1}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x} dx \quad \boxed{\text{万能公式}}$$

$$= \int \frac{1}{1+2 \tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{1+(\sqrt{2} \tan x)^2} d(\sqrt{2} \tan x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C$$

$$2. \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$$

$$= \int [\ln(1+x) - \ln(1-x)] d(\frac{x^2}{2})$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{2} (\frac{1}{1+x} - \frac{(-1)}{1-x}) dx$$

I₁

$$I_1 = \int \frac{x^2}{2} \frac{2}{1-x^2} dx = \int \frac{(x^2-1)+1}{1-x^2} dx$$

$$= -x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} dx$$

$$= -x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$$

$$3. \int \frac{x}{x^2+4x+5} dx \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \quad I = x + \frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+4)-4}{x^2+4x+5} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx - 2 \int \frac{1}{1+(x+2)^2} d(x+2)$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+5| - 2 \arctan(x+2) + C$$

$$4. \text{若 } f(x) = x e^x + \frac{x(e^x + e^{-x})}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \int_1^x f(x) dx \quad \text{求 } \int_1^x f(x) dx$$

$$\int_{-1}^1 x e^x dx = (x-1)e^x \Big|_{-1}^1$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x dx}{\sin x + \cos 3x} \quad \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x + \cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$I \quad u = \frac{\pi}{2} - x$$

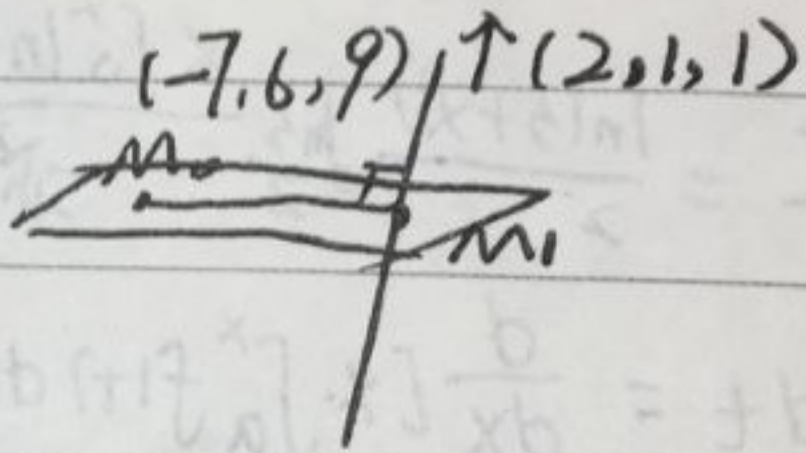
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} + \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4}$$

Date = 7

五 已知一直线通过 $x+y-z-8=0$ 与直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ 的交点, 且与 $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交. 求该直线的方程.



过 M_0 做平面 π , 与 l 垂直交于 M_1 .

$$M_1 \begin{cases} \pi_2: 2(x-(-7)) + 1(y-6) + 1(z-(-9)) = 0 \end{cases}$$

平面方程 过点法式

$$l_0 \begin{cases} x=2z \\ y=z+1 \end{cases}$$

$$M_1(-6, -2, -3)$$

连 M_0M_1

l_0 上一点 $M(2t, t+1, t)$ $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{s}_0 = (2, 1, 1) \rightarrow$ 算 $t \rightarrow M_1$

六. $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体, 将它在 $x=0, x=\xi (\xi > 0)$ 之间部分的体积记为 $V(\xi)$ 且 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi) (0 < a < \infty)$ 求 a 为多少?

$$\begin{aligned} V(\xi) &= \int_0^\xi \pi \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \right)^2 dx = \pi \int_0^\xi \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \int_0^\xi \frac{1}{2} \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+x^2} \Big|_0^\xi = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{1+\xi^2} \right) \\ \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{1+a^2} \right) &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

七. 设 $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \int_0^1 |2x-t| dt$ 及 $f(x)$ 的极值

1) $2x \leq 0$ $I = \int_0^1 (t-2x) dt = \frac{1}{2} - 2x$

2) $x \geq \frac{1}{2}$ $I = \int_0^1 (2x-t) dt = 2x - \frac{1}{2}$

3) $0 < x < \frac{1}{2}$ $f(x) = \int_0^{2x} (2x-t) dt + \int_{2x}^1 (t-2x) dt$

$$\begin{aligned} &\approx = 4x^2 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{2}(1-4x^2) - 2x(1-2x) \\ &= 4x^2 - 2x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - 2x & x \leq 0 \\ 4x^2 - 2x + \frac{1}{2} & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2} & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} -2 & x \leq 0 \\ 8x - 2 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

求导
极小

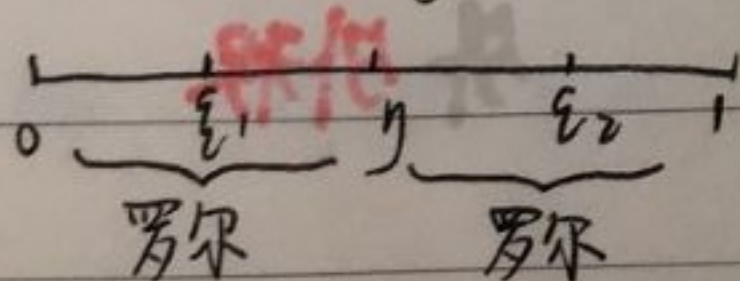
八. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 在 $(0,1)$ 内可导 $f(0) = f(1) = \int_0^1 f(x) dx$

证明: 1. 方程 $f(x) = \int_0^1 f(x) dx$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根;

2. 存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$

1. $F(x) = \int_0^x f(x) dx - x \int_0^1 f(x) dx$ $F(0) = 0$ $F(1) = 0$ 罗尔存在 $\eta \in (0,1)$ $F(\eta) = 0$

2. $f(0) = f(\eta) = f(1)$ $\int_0^1 f(x) dx = (1-0)f(\eta)$ $\eta \in (0,1)$



$f(\xi_1) = 0$ $f(\xi_2) = 0$

η 为 $f(x) = \int_0^1 f(x) dx$ 的实根
常数