

二〇二〇~二〇二一学年 第2学期 《高等数学(2)期中》考试试题

考试日期: 2021年 月 日 试卷类型: 试卷代号: 080011

班号 学号 姓名

题号	一	二	三						四				总分
			1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	
得分													

本题分数 24

一、填空题 (每空3分, 共24分)

1. 已知 $u(x, y, z) = x^{y^2}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial y}|_{(3,2,2)} =$ _____.

2. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \pi}} (1 + xy)^{\frac{1}{\sin(1+2x)}} =$ _____.

3. 曲面 $2xy + 4z - e^z = 3$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的法线方程为 _____.

4. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $M(1, 1)$ 处可微, 且 $f(1, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)} = 3$, $\phi(x) = f(x, f(x, x))$, 则 $\frac{d}{dx}\phi^3(x)|_{x=1} =$ _____.

5. 交换积分次序 $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx =$ _____.

6. 积分 $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz$ 在球坐标系下的三次积分是 _____.

7. 设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = x$, 则 $\oint_L (x+y)^2 ds =$ _____.

8. 设 Γ 是曲线 $\begin{cases} y - x^3 = 0 \\ z - \frac{2}{3}x^3 = 0 \end{cases}$ 从点 $(0, 0, 0)$ 到点 $(1, 1, \frac{2}{3})$ 的弧线段, 则 $\int_{\Gamma} (y^2 - z) dx + x^2 dz =$ _____.

本题分数 6

二、单项选择题 (共6分)

得分

1. 考虑下列命题:

- (1) 若函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处极限存在;
- (2) 若函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处一阶偏导数存在, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处极限存在;
- (3) 若函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处极限存在, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续;
- (4) 若函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处一阶偏导数存在;
- (5) 若函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 沿任一方向的方向导数必存在.

上述命题中, 正确的个数是 ().

- (A) 1个; (B) 2个; (C) 3个; (D) 4个.

2. 函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2(x^3 + y^3)$ 的极值点有 ().

- (A) $(0, 0)$ 和 $(0, \frac{1}{3})$; (B) $(0, \frac{1}{3})$ 和 $(\frac{1}{3}, 0)$;
(C) $(0, 0)$ 和 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$; (D) $(\frac{1}{3}, 0)$ 和 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

三、计算题 (共42分)

本题分数 7

1. 已知函数 $z = f(x^2 + y^2, xy, x)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

得分

本题分数 7

2. 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 求 $dz|_{(0,1)}$.

得分

本题分数	7
------	---

得分	
----	--

3. 计算二重积分 $\iint_D x e^{\frac{x^2}{y}} dx dy$, 其中 D 是由 $y = x$, $y = x^2$ 以及 $y = 2$ 所围成的平面闭区域。

本题分数	7
------	---

得分	
----	--

4. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x+y+z) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $x^2+y^2 = 3z$ 所围成的闭区域。

本题分数	7
------	---

得分	
----	--

5. 计算曲线积分 $\int_L (xy^2 - 3y + 2) dx + (x^2y + 5x + y^2) dy$, 其中 L 是为上半椭圆 $x^2 + 4y^2 = 1 (y \geq 0)$, 由点 $A(-1, 0)$ 到点 $B(1, 0)$ 。

本题分数	7
------	---

得分	
----	--

6. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 位于柱体 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 内的部分。

本题分数	8
得分	

1. 设 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x,y)dx + x \cos y dy = t^2$, $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数, 求 $f(x,y)$.

本题分数	8
得分	

2. 求中心在原点的椭圆 $5x^2 + 4xy + 8y^2 = 1$ 的长半轴与短半轴的长度.

本题分数	7
得分	

3. 设 a, b 为实数, 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3, 4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $\vec{l} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(1) 求 a, b ;

(2) 求曲面 $z = 2 + ax^2 + by^2 (z \geq 0)$ 的面积.

本题分数	7
得分	

4. 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1,y) = 0$,

$$f(x,1) = 0, \quad \iint_D f(x,y) dx dy = a, \quad \text{其中}$$

$$D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \text{计算 } I = \iint_D xy f_{xy}(x,y) dx dy.$$

$$1. \underline{324 \ln 3} \quad 2. \underline{e^{\frac{e}{2}}}$$

$$3. \underline{4x + 2y + 3z = 8}$$

$$4. \underline{51}$$

$$5. \underline{\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{x^2}^x f(x,y) dy}$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2x} d\theta \int_0^{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}} r^2 \sin\varphi f(r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi) dr$$

$$7. \underline{\frac{\pi}{2}} \quad 8. \underline{\frac{13}{30}} \quad B \quad C$$

$$\equiv 1. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1' + yf_2' + f_3'$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2x[2yf_{11}'' + xf_{12}'] + f_2' \\ &\quad + y[2yf_{21}'' + xf_{22}'] + \\ &\quad [2yf_{31}'' + xf_{32}'] \\ &= 4xyf_{11}'' + 2x^2f_{12}'' + f_2' + \\ &\quad 2y^2f_{21}'' + xyf_{22}'' + 2yf_{31}'' + \\ &\quad xf_{32}'' \end{aligned}$$

解法1 易得 $x=0, y=1$ 时, $z=1$.
方程两边分别对 x, y 求偏导数, 得

$$x + (x+1)\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf(x-y) + x^2f_1' \cdot (1 - \frac{\partial z}{\partial x}),$$

$$(x+1)\frac{\partial z}{\partial y} - 2y = x^2[f_1' \cdot (-\frac{\partial z}{\partial y}) + f_2'].$$

把 $x=0, y=1, z=1$ 代入以上两式, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{0,0} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{0,0} = -2.$$

所以 $dz \Big|_{0,0} = -dx + 2dy.$

$\equiv 2$

$$\equiv 3. \quad \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ 2 \\ 1 \\ \downarrow \\ x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \iint x e^{\frac{x^2}{y}} dx dy &= \int_1^2 dy \int_{\sqrt{y}}^y x e^{\frac{x^2}{y}} dx \\ &= \int_1^2 \frac{y}{2} (e^y - e) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 e^y \cdot y dy - \int_1^2 \frac{e}{2} y dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 y de^y - \left[\frac{e}{4} y^2 \right] \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} y e^y \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 e^y dy - \left[\frac{e}{4} y^2 \right] \Big|_1^2 \\ &= \left[\frac{1}{2} y e^y - \frac{1}{2} e^y + \frac{e}{4} y^2 \right] \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{4} (2e^2 - 3e) \end{aligned}$$

$$\equiv 4. \quad \begin{cases} z = \sqrt{4x^2 - y^2} \text{ 在 } xOy \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases}$$

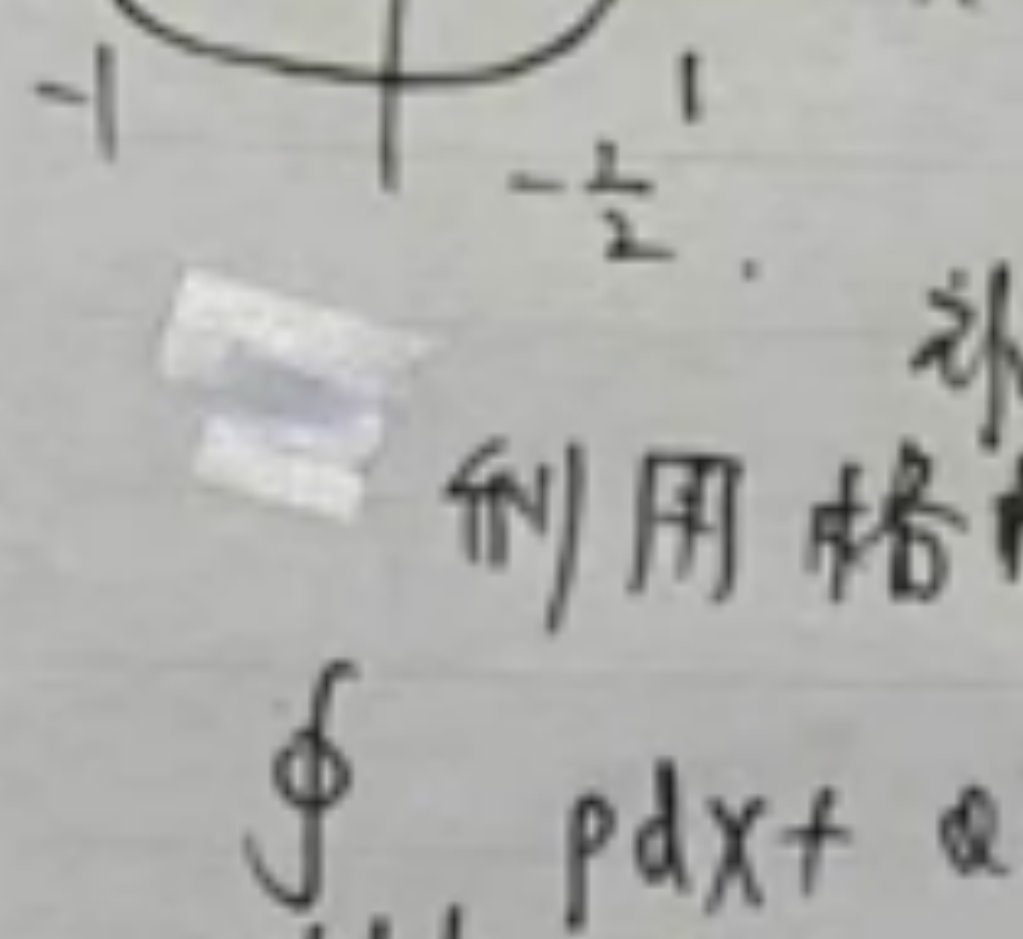
$$\text{平面投影为 } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{采用极坐标 } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

由于对称性

$$\begin{aligned} \iiint (x+y+z) dx dy dz &= \iiint z dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} z dz \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r}{2} (4-r^2 - \frac{1}{9}r^4) dr \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} (4r - r^3 - \frac{1}{9}r^5) dr \\ &= \pi \left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{54}r^6 \right] \Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{13}{4} \pi \end{aligned}$$

$$\equiv 5.$$



$$P(x,y) = xy^2 - 3y + 2$$

$$Q(x,y) = x^2y + 5x + y^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy + 5, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy - 3$$

补: 直线 $L: (1,0) \rightarrow (1,0)$

利用格林公式

$$\oint_{-L+L} P dx + Q dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$-\int_L P dx + Q dy + \int_1^1 2 dx = 8 \iint dx dy$$

$$\int_L P dx + Q dy = 4 - 8 \iint dx dy$$

$$= 4 - 8 \cdot \pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 4 - 4\pi$$

$$\equiv 6. \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$ds = \sqrt{2} dx dy$$

$$\text{在 } xOy \text{ 平面投影为 } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iint z ds = \iint \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr$$

$$= \frac{16}{3} \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{16}{3} \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{9} \sqrt{2}$$

由于曲线积分 $\int_L f(x, y) dx + x \cos y dy$ 在全平面与路径无关

$$\therefore \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cos y), \text{ 即 } f'_y = \cos y$$

$\therefore f(x, y) = \sin y + g(x)$, 其中 $g(x)$ 是只含有变量 x 的函数

又

$$\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x, y) dx + x \cos y dy = \int_0^t f(x, 0) dx$$

$$+ \int_0^{t^2} t \cos y dy = \int_0^t f(x, 0) dx + t \sin t^2 = t^2$$

$\therefore$ 上式对 t 求导, 得

$$f(t, 0) + \sin t^2 + 2t^2 \cos t^2 = 2t$$

$$\text{即: } f(t, 0) = 2t - \sin t^2 - 2t^2 \cos t^2$$

$$\text{即: } f(x, 0) = 2x - \sin x^2 - 2x^2 \cos x^2$$

又由 $f(x, y) = \sin y + g(x)$, 知

$$f(x, 0) = g(x)$$

$$\therefore g(x) = 2x - \sin x^2 - 2x^2 \cos x^2$$

$$\therefore f(x, y) = \sin y + 2x - \sin x^2 - 2x^2 \cos x^2$$

四1

问题可转化为求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $5x^2 + 4xy + 8y^2 = 4$ 下的极值

$$\text{令 } \Phi(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(5x^2 + 4xy + 8y^2 - 4)$$

$$\text{则 } \begin{cases} \Phi'_x = 2x - 10\lambda x - 4y\lambda = 0 & (\text{对 } x \text{ 求导}) \\ \Phi'_y = 2y - 4\lambda x - 16\lambda y = 0 & (\text{对 } y \text{ 求导}) \end{cases}$$

$$\text{化简得 } \begin{cases} (1-5\lambda)x - 2\lambda y = 0 & (1) \\ -2\lambda x + (1-8\lambda)y = 0 & (2) \end{cases}$$

要使上述方程组有非零解 (因从实际意义看原问题极值存在, 即方程组一定有解)

$$\text{其系数必有 } (1-5\lambda)(1-8\lambda) - (-2\lambda)(-2\lambda) = 0 \text{ 即 } 36\lambda^2 - 13\lambda + 1 = 0$$

$$\text{故有 } (4\lambda-1)(9\lambda-1) = 0 \text{ (十字相乘法)}$$

$$\text{解得 } \lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = \frac{1}{9} \text{ 设对应于 } \lambda_i \text{ 方程组的解为 } (x_i, y_i) \ (i=1, 2)$$

把它们代入方程组 (1) 或 (2) 得

$$x_i^2 + y_i^2 - \lambda_i(5x_i^2 + 4x_i y_i + 8y_i^2) = 0$$

$$\text{即得 } \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ x_2^2 + y_2^2 = \lambda_2 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\text{所以长半轴 } a = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{ 短半轴 } b = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{故长半轴的长度为 } \frac{1}{2}$$

四2

解 (1) 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3, 4)$ 处的梯度为

$$\text{grad } z = 6ai + 8bj.$$

$$\text{由题设条件, 知 } \begin{cases} 6a = -3k, \\ 8b = -4k, \\ \sqrt{36a^2 + 64b^2} = 10, \end{cases} \text{ 其中 } k > 0. \text{ 解得 } a = -1, b = -1.$$

(2) 曲面 $z = 2 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 在 xOy 面上的投影为

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\},$$

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{1 + 4r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} d(1 + 4r^2) \\ &= \frac{13\pi}{3}. \end{aligned}$$

四3

四4.

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 xy f''_{xy}(x, y) dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 xy d f'_x(x, y) \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[xy f'_x(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 x f'_x(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 x f'_x(x, 1) dx - \int_0^1 dy \int_0^1 x f'_x(x, y) dx \\ &= \int_0^1 x d f(x, 1) - \int_0^1 \left[\int_0^1 x d f(x, y) \right] dy \\ &= x f(x, 1) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, 1) dx - \\ &\quad \int_0^1 \left[x f(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, y) dx \right] dy \\ &= - \int_0^1 f(1, y) dy + \iint_D f(x, y) dx dy = a. \end{aligned}$$