

南京航空航天大学

第1页 (共6页)

二〇二〇~二〇二一学年 第2学期 《高等数学 I (2)》 期末考试试题

考试日期: 2021 年 10 月 16 日

试卷类型: A 卷

试卷代号: 082259

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	30
得分	

一、填空题 (每空 3 分)

1. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1-xy}{x^2+y^2} =$ _____;

2. 设函数 $z = e^{xy}$, 在点 $(1, 1)$ 处当 $\Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$ 时的全微分 $dz =$ _____;

3. 曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为 _____;

4. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 则球面上点 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ 处指向球面内侧的单位法向量为 _____;

5. 设向量场 $\mathbf{A} = x(1+x^2z)\mathbf{i} + y(1-x^2z)\mathbf{j} + z(1-x^2z)\mathbf{k}$, 则其在点 $M(1, 2, -1)$ 处的散度 $\text{div} \mathbf{A}|_M =$ _____;

6. 若 $|q| < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ 的和为 _____;

7. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} (x+3)^n$ 的收敛半径 $R =$ _____;

设函数 $f(x)$ 为周期是 2π 的周期函数, 它在 $(-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}, s(x) \text{ 为 } f(x) \text{ 的以 } 2\pi \text{ 为周期的傅里叶级数的和函数, 则}$$

$f(\pi) + s(-\pi) =$ _____。

分方程 $y'' = -\frac{3}{x}y' + 1 (x > 0)$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 0, y'|_{x=1} = 1$ 的特解

_____;

$y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x, y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是二阶常系数线性非齐次微分

$y'' + py' + qy = e^x - 2xe^x$ 的三个特解, 则此微分方程为 _____。

本题分数	9
得分	

二、选择题 (每空3分)

1. 已知 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则 ()

- (A) $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ 都存在 (B) $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ 都不存在
(C) $f_x(0, 0)$ 存在, $f_y(0, 0)$ 不存在 (D) $f_x(0, 0)$ 不存在, $f_y(0, 0)$ 存在

2. 设函数 $f(x, y)$ 为平面上连续函数, 则 $\int_{-1}^1 dx \int_0^1 y f(x^2, y^2) dy = ()$

- (A) $2 \int_0^1 dx \int_0^1 y f(x^2, y^2) dy$ (B) $4 \int_0^1 dx \int_0^x y f(x^2, y^2) dy$
(C) $2 \int_0^1 dy \int_{-y}^y y f(x^2, y^2) dx$ (D) 0

3. 设 $u_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n = l (0 < l < +\infty)$, 则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ ()

- (A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 不能确定其敛散性

题分数	6
分	

三、设 $u(x, y), v(x, y)$ 由方程组 $\begin{cases} x = e^u + u \sin v \\ y = e^u - u \cos v \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

本题分数	13
得分	

四、计算。

1. 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \geq 0)$ 的外侧, 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} yz dz dx + 2 dx dy. \quad (7 \text{ 分})$$

2. 求微分方程 $(xy^2 + y - 1)dx + (x^2y + x + 2)dy = 0$ 的通解. (6 分)

本题分数	7
得分	

五、将 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ 展成 x 的幂级数.

本题分数	9
得分	

六、试判断以下级数是发散、条件收敛还是绝对收敛，并说明理由.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \sin \frac{\pi}{3^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \sqrt{n}}{n+1}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$$

本题分数	7
得分	

第 5 页 (共 6 页)

七、求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = x^2 + 2x + 1$ 的通解.

本题分数	7
得分	

八、设 $f(x) = e^x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 连续, 求 $f(x)$.

7

九、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的收敛域与和函数.

十、设 $f(x)$ 为正值连续函数, 试证明不等式

$$\oint_L \frac{-y}{f(x)} dx + x f(y) dy \geq 2\pi a^2, \text{ 其中 } L \text{ 是圆周}$$

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2 (a > 0), \text{ 取逆时针方向.}$$

1/1)

1

2)

0.25e.

3)

$$x + 2y - 4 = 0$$

4)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

5)

0.

6)

$$\frac{a_9}{1 - q}$$

$$7) \quad \frac{1}{6}$$

$$8) \quad \frac{\lambda}{4}$$

$$9)$$

$$10) \quad y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$$

1C

2.A.

3A.

$$\underline{\Sigma} \quad X = e^u + u \sin v$$

$$Y = e^u - u \cos v$$

$$1 = e^u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} \sin v + u \cos v \frac{\partial v}{\partial X}$$

$$0 = e^u \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial X} \cos v + u \sin v \frac{\partial v}{\partial X}$$

$$\frac{\partial u}{\partial X} = A \quad \frac{\partial v}{\partial X} = B$$

$$(e^u + \sin v) A + u \cos v B = 1$$

$$(e^u - \cos v) A + u \sin v B = 0$$

$$B = - \frac{e^u - \cos v}{u \sin v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial X} = B = \frac{1 + u \cos v \frac{e^u - \cos v}{u \sin v}}{e^u + \sin v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial X} = A = \frac{1}{e^u + \sin v} + \frac{(e^u - \cos v) \cos v}{(e^u + \sin v) \sin v}$$

$$(12) 1. \iint_{\Sigma} yz dz dx + z dx dy$$

$$\bar{\Sigma}_1: \Sigma_1: z=0 \quad T=xy$$

$$\bar{\Sigma}_1 = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^2 r^3 \cos\varphi dr$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi$$

$$= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi$$

$$= -2\pi \cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2\pi \times (-1 - 1)$$

$$= 4\pi$$

$$(12) \frac{1}{2} (xy^2 + y + 1) dx + (x^2y + x + 2) dy = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy + 1 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy + 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$u = \frac{1}{2} x^2 y^2 + xy - x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y + x + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = 2 \quad \varphi(y) = 2y$$

$$\therefore u = \frac{1}{2} x^2 y^2 + xy - x + 2y \quad (u \in \mathbb{R})$$

$$7 \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

$$= -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \frac{1}{3-x}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n$$

$$-1 < x < 1$$

$$\lambda. (1) \sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{in\pi} \sin \frac{\pi}{3^n} \right|$$

$$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \pi}{3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1}}{3^{n+1}} / \frac{e^n}{3^n} = \frac{e}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} e^n \sin \frac{\pi}{3^n} \text{ 绝对收敛}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \sqrt{n}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sqrt{n}}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ 条件收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sqrt{n}}{n+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-\sqrt{n}} \text{ 发散}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \sqrt{n}}{n+1} \text{ 发散}$$

$$(3) U_n = \frac{1}{n - \ln n} > \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ 发散 } U_{n+1} - U_n < 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n} \text{ 条件收敛}$$

$$t \quad y'' - 2y' - 3y = x^2 + 2x + 1$$

$$y \text{ 的特征方程: } r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$(r-3)(r+1) = 0$$

$$r_1 = 3 \quad r_2 = -1$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

$$y^* = ax^2 + bx + c$$

$$y^{*'} = 2ax + b$$

$$y^{*''} = 2a$$

$$2a - 2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x + 1$$

$$-3a = 1 \quad a = -\frac{1}{3}$$

$$-4a - 3b = 2$$

$$\frac{4}{3} - 3b = 2$$

$$b = -\frac{2}{9}$$

$$2a - 2b - 3c = 1$$

$$3c = 2a - 2b - 1$$

$$3c = -\frac{11}{9}$$

$$c = -\frac{11}{27}$$

$$\therefore y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{11}{27}$$

$$(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$1) \quad f(x) = e^x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

$$f(x) = e^x - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x t f(t)dt$$

$$f'(x) = e^x - \int_0^x f(t)dt - x f(x) + x f(x)$$

$$f'(x) = e^x - \int_0^x f(t)dt$$

$$f''(x) = e^x - f(x)$$

$$\text{即 } f''(x) + f(x) = e^x$$

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r = \pm i$$

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y^* = a e^x$$

$$2a e^x = e^x$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$$

$$f(0) = 1$$

$$f(0) = C_1 + \frac{1}{2} = 1 \quad C_1 = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} e^x$$

$$f'(0) = 1 \quad f'(x) = -\frac{1}{2} \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} e^x$$

$$f'(0) = C_2 + \frac{1}{2} = 0 \quad C_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = 1 \quad \text{所以收敛半径 } R=1,$$

九

$$\text{设 } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}, \quad x \in (-1, 1) \text{ 时,}$$

$$\int_0^x s(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$x \neq 0 \text{ 时, } \frac{1}{x} \int_0^x s(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\int_0^x \left[\frac{1}{t} \int_0^t s(u) du \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

两边对 x 求导:

$$\frac{1}{x} \int_0^x s(t) dt = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) = \frac{(1-x) + x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$\int_0^x s(t) dt = \frac{x}{(1-x)^2},$$

$$\text{继续求导, } s(x) = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$x=0 \text{ 时, 由定义式知道, } s(0)=1,$$

$$x=\pm 1 \text{ 时, 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \text{ 的一般项不趋近于 } 0, \text{ 级数发散。}$$

所以

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{(1-x)^3}, & x \neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$+ \oint_L x f(y) dy - \frac{y}{f(x)} dx$$

$$= \iint_D \left(f(y) + \frac{1}{f(x)} \right) dx dy$$

$$= \iint_D f(x) + \frac{1}{f(x)} dx dy$$

$$\geq \iint_D 2x dx dy = 2\pi a^2.$$