南京航空航天大学

二〇二一～二〇二二 学年 第 1 学期《高等数学II(1)期中》考试试题

考试日期：2021 年 11 月 20 日　试卷类型：A　试卷代号：080010

班号　学号　姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

本题分数	24
得　分	

一、填空(每空 3 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=$______。

2. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\sec\frac{\pi x}{2}=$______。

3. 已知 $f'(x_0)=-\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$______。

4.若函数 $f(x)=\ln\sqrt{\sin x}$,则 $\mathrm{d}f(x)=$______。

5. 在 $x\to0$ 时，$\sin3x+ax+bx^3$ 是 x^3 高阶无穷小，则 $a=$____，$b=$____。

6. 设函数 $y=\frac{3-x}{x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$____$(n\geq1)$。

7. 函数 $f(x)=\sin^2x$ 的麦克劳林展开式中 x^{2n} 项的系数是______。

本题分数	9
得　分	

二、选择题（每题 3 分）

1.设 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则在点 $x=0$ 处（ ）

A. 不连续　　B.连续但不可导

C.可导但导数不连续　　D.可导且导数连续

2. 设 $f(x)$ 满足关系式 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，且 $f'(c)=0(c\neq0)$，则（ ）

A. $f(c)$ 是 $f(x)$ 的极小值

B. $f(c)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C. 点 $(c,f(c))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点

D. $f(c)$ 不是 $f(x)$ 的极值；$(c,f(c))$ 也不是曲线 $f(x)$ 的拐点

3. 曲线 $y=e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}$ 的渐近线条数是（ ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

本题分数	30
得　分	

三、计算题（每题 6 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+2^x+4^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$

3.设 $y=\left(1+x^2\right)^{\sin x}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

4.设函数 $y=y(x)$ 由 $y-xe^y=1$ 确定，求 $y'(0)$，$y''(0)$。

5.求曲线 $\begin{cases} x-e^x\sin t+1=0 \\ y=t^3+2t \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程。

本题分数	8
得　分	

四、求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{xn^x-n^{-x}}{n^x+xn^{-x}}$ 的间断点，并指出其具体类型。

本题分数	8
得　分	

五、求常数 a 使得 $f(x)=\begin{cases} \ln(1+3x)-7e^x, & x>0 \\ 5\arctan\frac{2x}{1-x}+a(x+1)^2, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续。此时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导？若可导,求 $f'(0)$。

本题分数	8
得　分	

六、求函数 $f(x)=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$ 在区间[-1,2]上的极值和最值。

本题分数	6
得　分	

七、已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$。

本题分数	7
得　分	

八、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1.$，证明：

（1）至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$。

南京航空航天大学

二〇二一 ～ 二〇二二 学年 第 一 学期

课程名称：《 高等数学 II(1)期中 》参考答案及评分标准

命题教师： 试卷类型： A 试卷代号：

一．填空

1. 1　2. $\dfrac{2}{\pi}$　3. 2　4. $\dfrac{1}{2}\cot x dx$　5. $a=-3$ ，$b=\dfrac{9}{2}$

6. $(-1)^n\dfrac{6n!}{3^{n+1}}$或$(-1)^n\dfrac{2n!}{3^n}$　7. $\dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}$

$\overline{2n!}$

$(-1)^{n-1}\times\left[\frac{1}{(2n-1)!}+\frac{1}{3!(2n-3)!}+\frac{1}{5!(2n-5)!}+\cdots+\frac{1}{(2n-3)!\,3!}+\frac{1}{(2n-1)!}\right]$

二．选择

1 C　2 A　3 B

三、（1）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x+4^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\left(\dfrac{1+2^x+4^x}{3}-1\right)\right]^{\frac{3}{2^x+4^x-2}\cdot\frac{2^x+4^x-2}{3x}}$ ………… 2

其中$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x+4^x-2}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x\ln2+4^x\ln4}{3}=\ln2$ ………………………… 4

所以$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x+4^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x+4^x-2}{3x}}=2$ ………………………………………… 6

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{1+2^x+4^x}{3}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{1+2^x+4^x}{3}-1\right]}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{3x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{4^x-1}{3x}}$

$=e^{\frac{\ln2}{3}+\frac{\ln4}{3}}=e^{\ln2}$

（2）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\tan(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}$ …………………… 2

$=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}$ ………………………………………… 4

$=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\dfrac{4}{\pi^2}$ ………………………………………………… 6

（3）两边取对数 $\ln y=\sin x\ln\left(1+x^2\right)$，………… 2

同时对 x 求导得 $\frac{y'}{y}=\cos x\ln\left(1+x^2\right)+\sin x\frac{2x}{1+x^2}$ ………… 4

可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=[\cos x\ln\left(1+x^2\right)+\sin x\frac{2x}{1+x^2}]\left(1+x^2\right)^{\sin x}$ ………… 6

（4）由 $y-xe^y=1$ 知，x=0 时，y=1,且

$y'-e^y-xy'e^y=0$ ………… 2

将 x=0，y=1 代入得 $y'(0)=e$ ………… 3

对上式两边再求导可得

$y''-y'e^y-y'e^y-xy''e^y-x(y')^2e^y=0$ ………… 5

将 x=0，y=1，$y'(0)=e$ 代入得 $y''(0)=2e^2$ ………… 6

（5）$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-e^x\sin t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-e^x\cos t=0$ 从而得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{e^x\cos t}{1-e^x\sin t}$，………… 2

又 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3t^2+2$，故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(3t^2+2)(1-e^x\sin t)}{e^x\cos t}$ ………… 4

由于 t=0 时，x=−1，y=0，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2e$，

因此切线方程为 $y=2e(x+1)$ ………… 6

四、解：当 x>0 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{xn^x-n^{-x}}{n^x+xn^{-x}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x-n^{-2x}}{1+xn^{-2x}}=x$ ………… 2

当 x=0 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{xn^x-n^{-x}}{n^x+xn^{-x}}=-1$ ………… 4

当 x<0 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{xn^x-n^{-x}}{n^x+xn^{-x}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{xn^{2x}-1}{n^{2x}+x}=-\frac{1}{x}$ ………… 6

间断点为 x=0,

当 x=0 时,左极限不存在，为第二类间断点.………… 8

五、解：由 $f(x)$在点 x=0 处连续，可得

$$\lim_{x\to0^-}\left[5\arctan\frac{2x}{1-x}+a(x+1)^2\right]=a=f(0)$$

$$\lim_{x\to0^-}\left[\ln(1+3x)-7e^x\right]=-7=f(0)=a$$

由此得 a=−7.………… 2

当 $x=0$ 时，$f_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{5\arctan\dfrac{2x}{1-x}-7(x+1)^2+7}{x}=-4$ ………… 4

$f_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+3x)-7e^x+7}{x}=3-7=-4$ ………… 6

因为 $f_+(0)=f_-(0)$，所以 $f(x)$ 在 0 处可导，

导数 $f'(0)=-4$ ………………… 8

六．解：由于 $f'(x)=-1+\dfrac{8}{(x+2)^3}=0$，可知 $x=0$ 为驻点………… 2

又 $f''(0)=-\dfrac{24}{(x+2)^4}\Big|_{x=0}=-\dfrac{3}{2}<0$，则 $x=0$ 为极大值点………… 4

计算得 $f(0)=2$，$f(-1)=0$，$f(2)=3/4$，………… 6

比较得 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的极大值为 $f(0)=2$，

最大值为 $f(0)=2$，最小值为 $f(-1)=0$。………… 8

七.解：由于 $f(0)=f'(0)=0$，则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ …… 1

则极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ 为 1^∞，因此

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{f(x)}{x}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\right\} \text{ ………… } 4$$

结果为 $e^{\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2} \text{ ………… } 6$$

八．证明：

(1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$\cancel{F(0)=-1<0}$，　$F(1)=1>0$，

由零点定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$ ………… 2

(2) 在区间 $[0,\xi],[\xi,1]$ 上分别使用拉格朗日中值定理得

$$\begin{cases}\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=f'(\eta), & \eta\in(0,\xi)\subset(0,1)\\[2ex] \dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=f'(\zeta), & \zeta\in(\xi,1)\subset(0,1)\end{cases} \text{ ………… } 5$$

即 $\dfrac{f(\xi)}{\xi}=f'(\eta)$，$\dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi}=f'(\zeta)$，从而

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=1 \text{ ………… } 7$$