1. **解**：因为 $f(x)=\frac{\cos x}{1-e^x}$，所以 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\cos x}{1-e^x}+\frac{\cos\frac{1}{x}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$，显然定义域为

$$1-e^x\neq 0\cup 1-e^{\frac{1}{x}}\neq 0\cup x\neq 0\Longleftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).\square$$

2. **解**：显然有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+5\ln(1+x)}{5x+\ln^2(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+5\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}}{5+\frac{\ln^2(1+x)}{x}}=\frac{1+5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}{5+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)}{x}}=\frac{1+5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}{5+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}}=\frac{6}{5}.\square$$

3. **解**：因为 $y=\operatorname{arccot}\sqrt{1-x}$，所以

$$dy=-\frac{1}{1+\left(\sqrt{1-x}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{1-x}\right)'dx=-\frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot(-1)dx=\frac{1}{2(2-x)\sqrt{1-x}}dx$$

因此可得 $dy|_{x=-1}=\left.\frac{1}{2(2-x)\sqrt{1-x}}\right|_{x=-1}dx=\frac{1}{2(2+1)\sqrt{1+1}}dx=\frac{\sqrt{2}}{12}dx.\square$

4. **解**：显然可得

$$\begin{aligned}f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{x}{2}}+\cos x-2}{x}\\&=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)\right)+\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-2}{x}\\&=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)}{x}=\frac{1}{2}.\square\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{x}{2}}+\cos x-2}{x}\\&=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\sin x}{1}=\frac{1}{2}.\square\end{aligned}$$

5. **解**：拐点是二阶导数左右异号的点.□

6. **解**：利用高阶求导公式即可

$$y=\cos(5x)\Longrightarrow y^{(n)}=5^n\cdot\cos\left(5x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\Longrightarrow y^{(n)}(0)=5^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).\square$$

7. **解**：先作变形有 $f(x)=\frac{x}{1-x}=x\cdot\frac{1}{1-x}$，则

$$f(x)=x\cdot\left(\sum_{k=0}^{n-1}x^k+o(x^{n-1})\right)=\sum_{k=0}^{n-1}x^{k+1}+o(x^n).\square$$

8. **解**：对 $y=\sqrt{2x-1}$ 求导可得

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\Longrightarrow y'|_{x=5}=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 5-1}}=\frac{1}{3}$$

因此可得切线方程为 $y=\frac{1}{3}(x-5)+3\Longleftrightarrow x-3y+4=0$.□

9. **解**：D.

对于 A：缺少极限存在的前提；对于 B：导数极限定理可知；对于 C：考虑尖点，导数不存在.□

10. **解**：C.

因为 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha^2}\sin\left(\frac{1}{e^x+1}\right), & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha^2}\sin\left(\frac{1}{e^x+1}\right)=\sin\left(\frac{1}{2}\right)\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha^2}=0\Longrightarrow\alpha^2>0$$

再利用可导的定义有 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$，则

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha^2}\sin\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{x}=\sin\left(\frac{1}{2}\right)\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha^2-1}=0\Longrightarrow\alpha^2-1>0$$

综上可得 $\alpha\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.□

11. **解**：

因为 $e^{3x^{\frac{1}{5}}}-1$ 与 $ax^b\ln(x+1)$ 为等价无穷小，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^{\frac{1}{5}}}-1}{ax^b\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^{\frac{1}{5}}}{ax^{b+1}}=1$$

比较系数可得 $a=3$，$b=-\frac{4}{5}$.□

12. **解**：利用泰勒公式即可

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}\tan x+o(x)\right)-\left(1+\frac{1}{2}x+o(x)\right)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\tan x-x)+o(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}.\square\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\tan x}-1\right)-\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\tan x+o(x)\right)-\left(\frac{1}{2}x+o(x)\right)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\tan x-x)+o(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}.\square\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\tan x}\right)^2-\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+x}\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+x}\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{2x^3}=\frac{1}{6}.\square\end{aligned}$$

13. **解**：利用夹逼准则放缩即可

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}$$

$$\frac{1}{2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)\leqslant\frac{1}{2}$$

则有 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.\square$

14. **解**：利用幂指化即可

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\arctan\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\arctan\frac{2}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\arctan\frac{2}{x}\right)}$$

而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\arctan\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\frac{2}{x}}{x^2}=0$$

所以 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\arctan\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^0=1.\square$

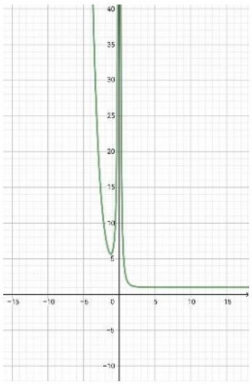
注：本题出的很烂，简单判断一下这里是1^0型，答案显然是 1.

15. **解**：题目已经说了求水平渐近线，那我们直接取极限即可

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{x}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=\infty$$

因此水平渐近线为$y=1$.□



16. **解**：求微分直接求导即可

$$y=f\left(\arcsin\sqrt{x}\right)\Longrightarrow y'=f'\left(\arcsin\sqrt{x}\right)\cdot\left(\arcsin\sqrt{x}\right)'$$

$$=f'\left(\arcsin\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{f'\left(\arcsin\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

因此可得$\mathrm{d}y=\dfrac{f'\left(\arcsin\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.□

17. **解**：利用莱布尼茨法则和高阶导数公式即可

$$f(x)=x\ln(1+x)\Longrightarrow f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot x^{(n-k)}\cdot[\ln(1+x)]^{(k)}$$

$$=x[\ln(1+x)]^{(n)}+nx'[\ln(1+x)]^{(n-1)}$$

$$=x\cdot\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(x+1)^n}+n\frac{(-1)^{n-2}\cdot(n-2)!}{(x+1)^{n-1}}.\square$$

$$=(-1)^n\frac{(n-2)!}{(x+1)^{n-1}}\left[n-\frac{x(n-1)}{x+1}\right]=(-1)^n\frac{(n+x)(n-2)!}{(x+1)^n}.\square$$

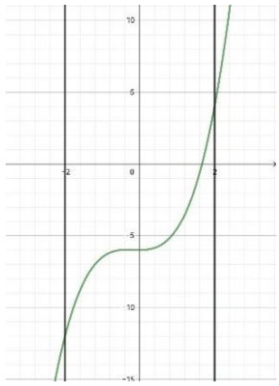
18. **解**：求导判断单调性即可

$$y=x^3+\frac{1}{2}x^2-6\Longrightarrow y'=3x^2+x=x(3x+1)=0\Longrightarrow x=0,\ x=-\frac{1}{3}$$

则当$x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup(0,+\infty)$时，$y'>0$，$y$递增；当$x\in\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$时，$y'>0$，$y$递减，则存在极小值点$x=0$和极大值点$x=-\dfrac{1}{3}$，求解可得

$$y(0)=-6,\ y\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{323}{54},\ y(-2)=-12,\ y(2)=4$$

因此最大值为 4，最大值点为$x=2$；最小值为 - 12 ，最小值点为$x=-2$.□



19. **解**：利用参数方程求导即可

$$\begin{cases}\sin t - x\mathrm{e}^x + t = 0\\ y=\sin t + t\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\cos t\,\mathrm{d}t-(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\mathrm{d}t=0\\ \mathrm{d}y=\cos t\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}t\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1+\cos t}{(x+1)\mathrm{e}^x}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1+\cos t\end{cases}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1+\cos t}{\frac{1+\cos t}{(x+1)\mathrm{e}^x}}=(x+1)\mathrm{e}^x$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}(x+1)\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x}=(x+2)\mathrm{e}^x.\square$$

20. **解**：定义域$x\neq 2\cup \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x-2}}-1\neq 0 \Longleftrightarrow x\neq 2$，0，那么

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\arctan x}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{x-2}}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\frac{x^2}{x-2}}=\lim_{x\to 0^+}(x-2)=-2$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\arctan x}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{x-2}}-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{\frac{x^2}{x-2}}=\lim_{x\to 0^-}(x-2)=-2$$

则$x=0$是第一类间断点，属于可去间断点，又

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x\arctan x}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{x-2}}-1}=2\arctan 2\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{x-2}}-1}=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x\arctan x}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{x-2}}-1}=2\arctan 2\cdot\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{x-2}}-1}=-1$$

则$x=2$是第一类间断点，属于跳跃间断点，在其他定义域内$f(x)$均连续.□

21. **解**：构造$f(x)=\sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\pi}$, $x\in(0,\pi)$，求导可得

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}=0\Longrightarrow\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}\Longrightarrow x=2\arccos\frac{2}{\pi}$$

因为$\cos\dfrac{x}{2}$在$x\in(0,\pi)$内单调，因此导函数有且仅有一个零点$x=2\arccos\dfrac{2}{\pi}$，即$f(x)$的最小值出现在端点处，则有

$$f(x)>f(0)=0,\ f(x)>f(\pi)=0$$

则当$x\in(0,\pi)$时，有$\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}$.□

22. **证明**：利用微分方程即可

(1)表达式等价于

$$2xf(x)+f'(x)=0\Longleftrightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=0\Longleftrightarrow\frac{1}{y}\mathrm{d}y+2x\,\mathrm{d}x=0\Longleftrightarrow\ln y+x^2=C$$

即可得到$y=\mathrm{e}^{-x^2+C}\Longleftrightarrow y\mathrm{e}^{x^2}=C'\Longleftrightarrow\mathrm{e}^{x^2}f(x)=C'$，则我们可以构造$G(x)=\mathrm{e}^{x^2}f(x)$，

且有$G(a)=G(b)=0$，则$\exists\xi\in(a,b)$，s.t.$G'(\xi)=0$，即

$$G'(\xi)=\mathrm{e}^{\xi^2}f(\xi)\cdot2\xi+\mathrm{e}^{\xi^2}f'(\xi)=\mathrm{e}^{\xi^2}(2\xi f(\xi)+f'(\xi))=0$$

即$2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$.□

(2)观察可得(2)式为(1)的导数，又因为$G'(b)=\mathrm{e}^{b^2}(2bf(b)+f'(b))=0$，则$\exists\eta\in(a,b)$，s.t.

$G''(\eta)=\mathrm{e}^{\eta^2}(2f(\eta)+2\eta f(\eta)+f''(\eta))=0$

即$2f(\eta)+2\eta f(\eta)+f''(\eta)=0$.□