南京航空航天大学

二〇二二～二〇二三学年 第 2 学期《高等数学 I(2) 》期末考试

考试日期：2023 年 6 月 26 日 试卷类型：A 试卷代号：

班号 学号 姓名 序号

题号	一	二	三	四	五	六	七	
得分								

本题分数	24
得 分	

一、填空(每空 3 分)

1. 直线$l_1:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$与直线$l_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$的夹角为________.

2. 极限$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$________.

3. 设$z=\ln(x+y)+x$，则$dz\big|_{(0,1)}=$________.

4. 已知函数$u=x^2+\sin y+e^z$，则在点(x,y,z)处的梯度$gradu=$________，该梯度在$M(1, 0, 0)$处的散度$div(gradu)$=________.

5. 设曲线L为圆周$x^2+y^2=a^2$,则曲线积分$\oint_L(x^2+y^2)^n ds=$________

6. 空间曲面Σ：$x^2+y^2=a^2,0\le z\le h$,则曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+1)dS=$________.

7. 空间曲面$z-e^z+2xy=3$在点$(1,2,0)$处的切平面方程________.

本题分数	9
得　分	

二、选择题（每题 3 分）

1．设线性无关函数$y_1(x)$，$y_2(x)$，$y_3(x)$ 都是二阶非齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$$

的解，C_1和C_2是任意常数，则该非齐次方程的通解是(　　)．

(A) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$；　(B) $C_1y_1+C_2y_2+(C_1+C_2)y_3$；

(C) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$；　(D) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$．

2．设函数$f(x,y)$为连续函数，则$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=$(　　)．

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$；　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$．

3．已知三阶常系数线性齐次微分方程的通解为$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{2x}$，则三阶微分方程为（　　）．

(A) $y'''-4y''+3y'+2y=0$；　(B) $y'''+4y''+3y'+2=0$；

(C) $y'''-4y''-5y'+2y=0$；　(D) $y'''-4y''+5y'-2y=0$．

本题分数	36
得　分	

三、计算题（每题 6 分）

1．设$z=f(xy,\frac{x}{y})+g(x+y)$，其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$具有连续二阶导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

2. 设函数$u=f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数，方程$e^{xy}-xy=2$ 确定$y=y(x)$ ，以及方程 $e^{x}=\sin(x-z)$ 确定$z=z(x)$，求$\dfrac{du}{dx}$.

3. 设Ω为$x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$，求$\iiint\limits_{\Omega}(x+y-3z)dv$.

4. 设函数$f(x)$具有一阶连续导数，且$f(0)=1$，平面单连通区域的任意光滑曲线C均有 $\oint_C (xe^x+f(x))ydx+f(x)dy=0$，求$f(x)$.

5. 设L是由点$O(0,0)$到点$A(1,1)$的任意光滑曲线，求曲线积分

$$\int_L (1-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y.$$

6. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(f(x,y,z)+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2f(x,y,z)+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(f(x,y,z)+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中Σ是平面$x-y+z=1$在第四卦限部分，取上侧，$f(x,y,z)$为连续函数.

本题分数	8
得　　分	

四、计算$I=\int_L (e^x\cos y-y+1)\mathrm{d}x+(x-e^x\sin y)\mathrm{d}y$，其中$L$是上半圆周$x^2+y^2=1(y\geq 0)$，取逆时针方向，由点$A(1,0)$到$B(-1,0)$.

本题分数	8
得　　分	

五、计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} x\sin x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中曲面Σ是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被水平面$z=1$ 所截的部分，取上侧.

本题分数	10
得　分	

六、求$y''-3y'+2y=xe^x$的通解.

本题分数	5
得　分	

七、已知函数$z=f(x,y)$的全微分$dz=2xdx-2ydy$, 并且$f(1,1)=2$,求$f(x,y)$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$上的最值.

1. $\vec{v_1}=(-1,-2,1)$ $\quad \vec{v_2}=(1,-2,1)$

$$\therefore \cos\theta = \left|\frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|}\right| = \arccos\frac{2}{3}.$$

2. $$\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\ln(1+1)}{\sqrt{1+0}} = \ln 2.$$

3. $z_x = \frac{1}{x+y}+1 \qquad z_y=\frac{1}{x+y}$

$$dz = z_x\,dx + z_y\,dy$$

$$\therefore dz\big|_{(0,1)} = 2dx+dy.$$

4. $\operatorname{grad} u = (u_x, u_y, u_z) = (2x, \cos y, e^z)$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 2 - \sin y + e^z$$

$$\therefore \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)\big|_{(1,0,0)} = 3.$$

5. $$\oint (x^2+y^2)^n\,ds = a^{2n}\oint ds = 2\pi a\cdot a^{2n} = 2\pi a^{2n+1}$$

6. $$\iint_\Sigma x\,dS = \iint_\Sigma y\,dS = 0$$

$$\therefore I = \iint_\Sigma 1\,dS = 2\pi a h.$$

7. $F(x,y,z) = z - e^z + 2xy - 3$

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2y, 2x, 1-e^z)$$

$\therefore \vec{n} = (4, 2, 0) = 2(2, 1, 0)$

$\therefore 2(x-1) + y - 2 = 0 \Rightarrow 2x + y - 4 = 0.$

二.

1. A.

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的解为

$y_1 - y_2$ 和 $y_1 - y_3$.

$\therefore y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解可表示为

$y = \lambda(y_1 - y_2) + \mu(y_1 - y_3) + y_3$

$\Rightarrow y = (\lambda + \mu)y_1 - \lambda y_2 + (1-\mu)y_3$

令 $C_1 = \lambda + \mu$

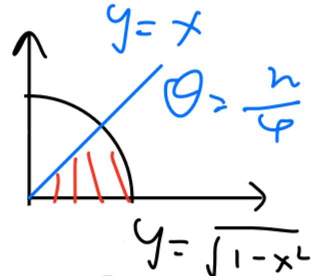
$C_2 = -\lambda$. $\Rightarrow \mu = C_1 + C_2$

$\therefore y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3.$

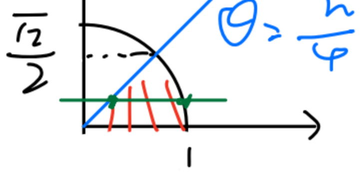
2. C

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

$0 \le r \le 1$ $\Rightarrow$

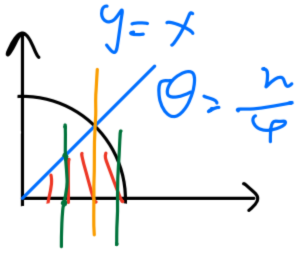


先对 x: $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dx.$



先对 y:

$$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{x}f(x,y)\,dy+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy$$



3. D

$r_1=r_2=1 \qquad r_3=2$.

$\therefore (r-1)^2(r-2)=0 \Rightarrow r^3-4r^2+5r-2=0$.

三.

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'+g'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}f_{12}''\right)-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}f_{22}''\right)+g''$$

2. $du=f_1'+\dfrac{dy}{dx}f_2'+\dfrac{dz}{dx}f_3'$

法一: 隐函数

令 $F(x,y)=e^{xy}-xy-2$

$G(x,z)=e^{x}-\sin(x-z)$.

$\therefore F_x=ye^{xy}-y \qquad F_y=xe^{xy}-x$.

$G_x = e^x - \cos(x-z) \quad G_z = \cos(x-z)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{ye^{xy} - y}{xe^{xy} - x}$

$\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{G_x}{G_y} = -\dfrac{e^x - \cos(x-z)}{\cos(x-z)}$

$\therefore \dfrac{du}{dx} = f_1' - \dfrac{ye^{xy} - y}{xe^{xy} - x} f_2' - \dfrac{e^x - \cos(x-z)}{\cos(x-z)} f_3'$

法二：全微分

$d(e^{xy} - xy) = d(2)$

$\therefore ye^{xy}dx + xe^{xy}dy - xdy - ydx = 0$

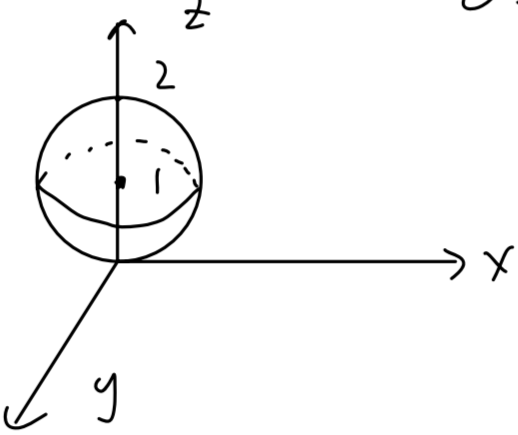
$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ye^{xy} - y}{xe^{xy} - x}$

$d(e^x) = d(\sin(x-z))$

$\therefore e^x dx = \cos(x-z)dx - \cos(x-z)dz$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{e^x - \cos(x-z)}{\cos(x-z)}$

3.



奇偶性

$\therefore I = -3\iiint\limits_{\Omega} z\,dV$

截面法. $I=-3\int_0^2 z\iint_D d\sigma$

$x^2+y^2=1-(z-1)^2=r^2=2z-z^2$

$\therefore I=-3\pi\int_0^2 z(2z-z^2)\,dz=-4\pi$

4. $P=(xe^x+f(x))y \quad Q=f(x)$

$\therefore P_y=xe^x+f(x)=Q_x=f'(x)$

$\therefore f'(x)-f(x)=xe^x \quad f(0)=1$

$\therefore f(x)=e^{\int dx}\left(\int xe^x e^{-\int dx}dx+C\right)$

$=e^x\left(\frac{1}{2}x^2+C\right) \quad f(0)=1\Rightarrow C=1$

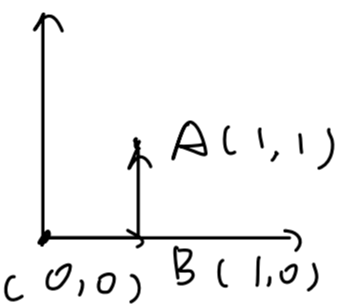
$\therefore f(x)=e^x\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)$

5. $P=1-2xy-y^2 \quad Q=-(x+y)^2$

$\therefore P_y=-2x-2y=Q_x=-2(x+y)$

$\therefore$ 积分与路径无关.

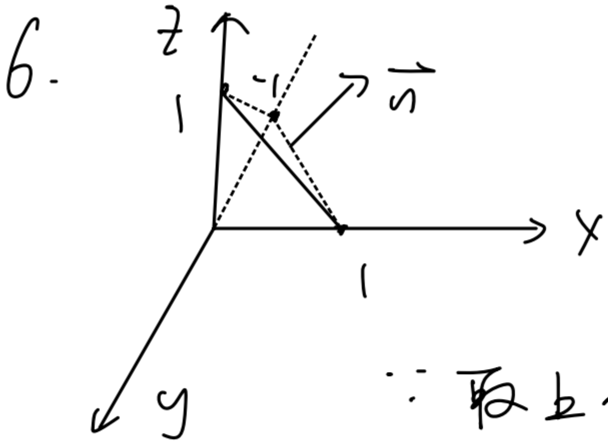
取



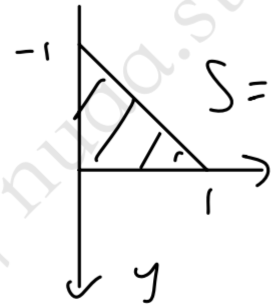
$CB\begin{cases}x=x\\ y=0\\ x从0\to1\end{cases}$ $BA\begin{cases}x=1\\ y=y\\ y从0\to1\end{cases}$

$\therefore I = \int_{CB} + \int_{BA} = \int_0^1 dx - \int_0^1 (y+1)^2 dy$

$\therefore I = -\frac{4}{3}$.

6. 

采用合一投影法. 向 xoy 投影



$S = \frac{1}{2}$

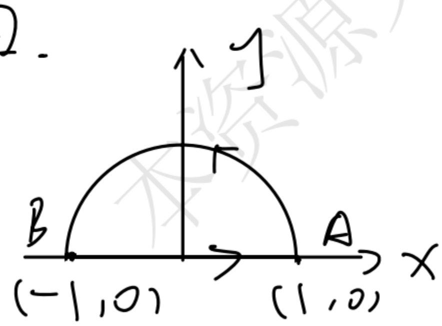
$\because$ 取上侧

$\therefore z > 0$

$\therefore \Sigma$ 的法向量 $\vec{n} = (1, -1, 1)$

$$\therefore I = \iint_{D_{xy}} (f(x,y,z) + x - 2f(x,y,z) - y + f(x,y,z) + z)\, dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x - y + z)\, dx dy = \iint_{D_{xy}} dx dy = \frac{1}{2}$$

四. 

补路径 L_1 : $\overrightarrow{BA}$

$\therefore I = \int_{L+L_1} - \int_{L_1}$

记 $I_0 = \int_{L+L_1}$

∴ $P_y = -e^x \sin y - 1$ $\quad Q_x = 1 - e^x \sin y$

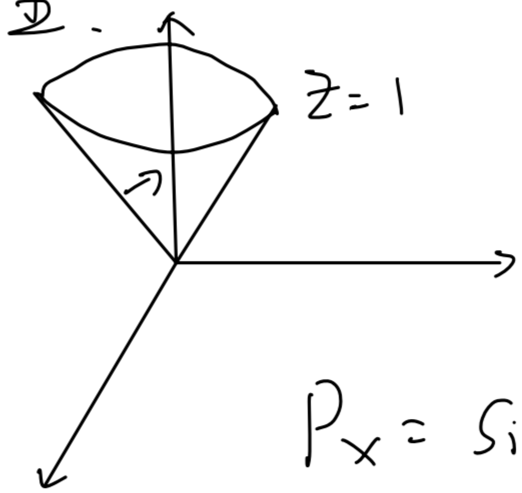
∴ $I_0 = 2\iint\limits_{D_{xy}} d\sigma = \pi$

记 $I_1 = \int_{L_1}$

∴ $I_1 = \int_{-1}^{1}(e^x+1)\,dx = e - e^{-1} + 2$

∴ $I = \pi + e^{-1} - e - 2$.

五、



补面 Σ_1: $z=1$. $x^2+y^2\le 1$. 取下侧

∴ $I = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1}$

$P_x = \sin x + x\cos x$

$Q_y = 2y$

$R_z = 2z$.

∴ $I_0 = -\iiint\limits_{\Omega}(\sin x + x\cos x + 2y + 2z)\,dV$

$= -2\iiint\limits_{\Omega} z\,dV = -2\int_0^1 z\,dz \iint\limits_{D} d\sigma$

$= -2\pi\int_0^1 z^3\,dz = -\frac{\pi}{2}$

$I_1 = -\iint\limits_{\Sigma_1} dx\,dy = -\pi$ $\quad$ ∴ $I = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$.

六. $r^2-3r+2=0$

$\therefore r_1=2 \quad r_2=1$ 　　$\lambda=1$ 为单根.

$Y=C_1e^{2x}+C_2e^x$

令 $y^*=x\cdot(ax+b)e^x=(ax^2+bx)e^x$.

求出 $y^{*''}$, $y^{*'}$, 代入方程, 得

$\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-1 \end{cases}$ 　$\therefore y^*=-(\frac{1}{2}x^2+x)e^x$

$\therefore y=C_1e^{2x}+C_2e^x-(\frac{1}{2}x^2+x)e^x$.

七、

$$z=\int_{(0,0)}^{(x,y)} 2x\,dx-2y\,dy+C.$$

$\therefore z=x^2-y^2+C$

$\Rightarrow f(x,y)=x^2-y^2+C$

$\because f(1,1)=2$

$\therefore C=2$ 　$\therefore f(x,y)=x^2-y^2+2$.

在 $x^2+\frac{y^2}{4}<1$ 内.

$f_x=2x$ 　　$f_{xx}=2$ 　$f_{yy}=-2$ 　$f_{xy}=0$

$f_y=2y$ 　　$\because AC-B^2=-4<0$

$\therefore$ 在 $x^2+\frac{y^2}{4}<1$ 内无极值.

当 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 时. $\Rightarrow 4x^2+y^2-4=0$

令 $F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda(4x^2+y^2-4)$

$F_x=2x+8\lambda x=0$

$F_y=-2y+2\lambda y=0$

$F_\lambda=4x^2+y^2-4=0.$

$\therefore$ 当 $x=0$ 时 $y^2=4.$ 当 $y=0$ 时. $x^2=1$

$\therefore f(0,\pm 2)=-2$ $\therefore f(\pm 1,0)=3.$

$\therefore$ 最大值 3. 最小值 -2.