2014-2015 学年第二学期期中考试 A 卷

一、填空题(24 分，每题 3 分，共 8 题)

1、设空间三点分别为$(1,1,1),(2,1,0),(0,-1,1)$，则这三个点构成的三角形面积为________.

2、直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1}$与平面$x-y-3z=3$的夹角为________.

3、点$(1,1,1)$在平面$x+2y-z=8$上的投影点为________.

4、求极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x^2y^2)}{e^{xy}\sin(x^2+y^2)}=$________

5、已知$z=\int_{x-y}^{xy}e^t dt$，求$dz\big|_{(1,1)}=$________

6、函数$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在点$P(1,2,2)$处方向导数的最大值为________.

7、将三次积分$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$改变积分的次序为先对$x$方向，再对$y$方向，最后对$z$方向的三次积分，则$I=$________

8、已知$f(x,y)=3x+\sin y\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中$D=\{|y|\leq x,0\leq x\leq 1\}$则$f(x,y)=$________

二、单项选择题(9 分，每题 3 分，共 3 题)

1、设$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则下面结论不正确的是(　　).

A、$f(x,y)$在点$(0,0)$全微分为 0　　B、$f(x,y)$在点$(0,0)$连续

C、$f(x,y)$在点$(0,0)$不可微分　　D、$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

2、函数$z=2x^3+2y^3-x^2-y^2+2$的极大值点有(　　).

A、$(0,0)$　　B、$\left(0,\frac{1}{3}\right)$　　C、$\left(\frac{1}{3},0\right)$　　D、$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

3、设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leq 1,y\geq 0\}$，$\Omega_1$为$\Omega$在第一卦限内的部分，则有（　　）.

A、$\iiint\limits_{\Omega}xz^2dv=4\iiint\limits_{\Omega_1}xz^2dv$　　B、$\iiint\limits_{\Omega}x^2zdv=4\iiint\limits_{\Omega_1}x^2zdv$

C、$\iiint\limits_{\Omega}xy^2dv=4\iiint\limits_{\Omega_1}xy^2dv$　　D、$\iiint\limits_{\Omega}x^2ydv=4\iiint\limits_{\Omega_1}x^2ydv$

三、计算题（42分）

1、（7分）已知一直线L过点$(-1,0,4)$，与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{3}$相交，且平行于平面$3x-4y+z=10$，求此直线方程.

2、（7分）已知$u=f\left(\frac{y}{x}\right)+g(x+y,xy)$，其中$f,g$具有二阶连续导数，求$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

3、（7分）设$u=u(x,y),v=v(x,y)$由方程组$\begin{cases}u^2-v+xy=0\\u+v^2+x-y=0\end{cases}$确定，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

4、（7分）设$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 2x\}$，计算$I=\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy$.

5、（7分）设区域$D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,-1\leq y\leq 1\}$，试计算二重积分$I=\iint\limits_D |x^2+y^2-1|dxdy$.

6、（7分）计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(xy+3z^2)dxdydz$，其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$，与$z=2-(x^2+y^2)$围成的闭区域.

四、综合应用题（25分）

1、（8分）在椭圆抛物面$z=x^2+2y^2$上求一点，使得曲面在该点处的切平面垂直于直线$\begin{cases}x+y=1\\y+2z=2\end{cases}$，并写出曲面在该点处的法线方程.

2、（8分）设$f(0)=0,f'(0)=1$，区域$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant t^4\}$，求极限

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{\iiint\limits_{\Omega}f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz}{t^8}.$$

3、（9分）求平面$x+y+z=0$与椭球面$4x^2+y^2+z^2-2xy=1$相交面而成的椭圆的面积.

2014-2015 学年第二学期期中考试 A 卷参考答案

一、填空题(24 分，每题 3 分，共 8 题)

1、【正解】$\dfrac{3}{2}$

【学解】$\vec{m}=(1,0,-1),\vec{n}=(1,2,0),\vec{m}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=2i-j+2k$

故$S=\dfrac{1}{2}|\vec{m}\times\vec{n}|=\dfrac{3}{2}$

【考点延伸】运用向量求空间三角形的面积

2、【正解】0

【学解】直线的方向向量为$\vec{l}=(2,-1,1)$，平面的法向量为$\vec{n}=(1,-1,-3)$

$$\sin\theta=\left|\cos\langle\vec{l},\vec{n}\rangle\right|=\frac{2+1-3}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+9}}=0,$$

故直线与平面的夹角为$0°$

【考点延伸】空间直线与平面的夹角

3、【正解】$(2,3,0)$

【学解】设投影点为(x_0,y_0,z_0)，平面的法向量为$\vec{n}=(1,2,-1)$，

$\dfrac{x_0-1}{1}=\dfrac{y_0-1}{2}=\dfrac{z_0-1}{-1}=t$，故$x_0=t+1,y_0=2t+1,z_0=1-t$

代入平面方程有$t+1+4t+2+t-1=8,t=1$

故投影点为$(2,3,0)$

【考点延伸】某点在平面上投影的求法

4、【正解】0

【学解】$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x^2y^2)}{e^{xy}\sin(x^2+y^2)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}}=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 1.3——多元函数的极限问题

5、【正解】$dz=(e-1)dx+(e+1)dy$

【学解】$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy,\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}-e^{x-y}=e-1,\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+e^{x-y}=e+1$

即$dz=(e-1)dx+(e+1)dy$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——变限积分与全微分的综合问题

6、【正解】1

【学解】方向导数的最大值即为梯度的模，$grad\ u(P)=\{u_x(P),u_y(P),u_z(P)\}$

$$=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}$$

$|g|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=1$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.2——梯度的性质以及方向导数

7、【正解】$\int_0^1 dz\int_{-z}^{z}dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx$

【学解】由题意知Ω表示的是一个高为 1 的倒圆锥，改变积分顺序则为

$$I=\int_0^1 dz\int_{-z}^{z}dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九【易错考点】3-1——三重积分转换积分顺序，主要在转换时要选择适当的基面，题目要求先对x,再对y,z进行积分，我们应当倒着想，即从z开始.

8、【正解】$3x+2\sin y$

【学解】令$A=\iint_D f(x,y)dxdy$，对方程两边积分有$A=\iint_D 3xdxdy+\iint_D \sin yAdxdy$,

$$A=\int_0^1 3xdx\int_{-x}^{x}dy+\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}A\sin ydy,\text{解得}A=2,\text{故}f(x,y)=3x+2\sin y$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——运用积分法解积分方程

二、单项选择题(9 分，每题 3 分，共 3 题)

1、【正解】A

【学解】首先易得出$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$；

要证其不可微分，$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{\Delta x\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$,

设$\Delta y=k\Delta x$，所以$=\sqrt{\frac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+(k\Delta x)^2}}=\sqrt{\frac{k}{1+k^2}}\neq 0$，所以不可微分；

$f(x,y)$在$(0,0)$必定连续，故只有 A 错误。

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1——多元函数偏导数全微分的定义关系

2、【正解】A

【学解】$z_x=6x^2-2x=0,x=0$或$\frac{1}{3}$, $z_y=6y^2-2y=0,y=0$或$\frac{1}{3}$, $\Rightarrow$ 极大值点为$(0,0)$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.2——多元函数的极值点

3、【正解】D

【学解】Ω是一个半径为 1 的半球，关于平面 xoy,yoz 对称，选项A左边部分为 0，右边不为 0，显然选项A错误，BC和A犯了同样的错误，只有选项D正确

【考点延伸】《考试宝典》专题九第三部分——三重积分的区域问题。注意所表示的区域关于什么对称.

三、计算题（42 分）

1、【学解】设两直线的交点为$(t-1,t+3,3t)$，则直线L的方向向量为$(t,t+3,3t-4)$

平面的法向量为$(3,-4,1)$，故$3t-4(t+3)+3t-4=0,t=8$,，则

$$L:\frac{x+1}{8}=\frac{y}{11}=\frac{z-4}{20}$$

【考点延伸】空间直线方程的求法

2、【学解】$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f'+g_1+yg_2,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{x^2}f'-\dfrac{y}{x^3}f''+g_{11}+xg_{12}+g_2+yg_{21}+xyg_{22}$

$$=-\frac{1}{x^2}f'-\frac{y}{x^3}f''+g_2+g_{11}+(x+y)g_{12}+xyg_{22}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.3——多元复合函数的偏导数

3、【学解】

$$\begin{cases}2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-y\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=-1\end{cases},\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-y&-1\\-1&2v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u&-1\\1&2v\end{vmatrix}}=-\frac{2vy+1}{4uv+1},$$

$$\begin{cases}2u\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=-x\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=1\end{cases},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}2u&-1\\1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u&-1\\1&2v\end{vmatrix}}=\frac{2u+x}{4uv+1}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八第二部分——隐函数微分法

4、【学解】$I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r(r\cos\theta+r\sin\theta)^2dr=\frac{3\pi}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——二重积分的计算

5、【学解】$I=2\displaystyle\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy+2\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$

$$=2\iint_{0\leq x,y\leq 1}(x^2+y^2-1)dxdy+4\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy$$

$$=2\int_0^1dx\int_0^1(x^2+y^2-1)dy+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1r(1-r^2)dr=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——含绝对值得二重积分的计算，注意进行分割来去掉绝对值.

6、【学解】令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases},r\leq z\leq 2-r^2,r=2-r^2$,解得 r=1

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1rdr\int_r^{2-r^2}(r^2\sin\theta\cos\theta+3z^2)dz=\frac{67}{20}\pi$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九第三部分——三重积分的计算

四、综合应用题（25 分）

1、【学解】设点$P(x_0,y_0,z_0)$满足条件，$x^2+2y^2-z=0,F_x=2x,F_y=4y,F_z=-1$

故在点 P 的法向量为$(2x_0,4y_0,-1)$，直线的方向向量为$\vec{s}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=(2,-2,1)$，

又$\vec{n}\parallel\vec{s}$，故$\dfrac{2x_0}{2}=\dfrac{4y_0}{-2}=\dfrac{-1}{1}\Rightarrow x_0=-1,y_0=\dfrac{1}{2},z_0=\dfrac{3}{2}$，即$(x_0,y_0,z_0)=\left(-1,\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，

法线方程为$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{-2}=\dfrac{z-\frac{3}{2}}{1}$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 5.2——空间曲面上某点法线方程的求法

2、【学解】$\iiint\limits_{\Omega} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{t^2} \rho^2 f(\rho) d\rho$

$$= 4\pi \int_0^{t^2} \rho^2 f(\rho) d\rho$$

$$故 I = \lim_{t\to 0} \frac{\iiint\limits_{\Omega} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz}{t^8} = \lim_{t\to 0} \frac{4\pi \int_0^{t^2} \rho^2 f(\rho) d\rho}{t^8}$$

$$= 4\pi \lim_{t\to 0} \frac{t^4 f(t^2)\cdot 2t}{8t^7} = \pi \lim_{t\to 0} \frac{f(t^2)}{t^2} = \pi \lim_{t^2\to 0} \frac{f(t^2)-f(0)}{t^2} = \pi f'(0) = \pi$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九第三部分——三重积分与洛必达法则，变限积分综合问题

3、【学解】$z=-x-y$ 代入椭圆方程有 $5x^2+2y^2=1$，

$$令 x = \frac{\sqrt{5}}{5}\cos t, y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, S = \iint\limits_{D} dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \cdot \left|-\frac{\sqrt{5}}{5}\sin t\right| dt = \frac{\sqrt{10}}{10}\pi$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十第五部分——空间曲面相交问题。