2017-2018 学年第二学期期中考试试卷

一、选择题(9 分，每题 3 分，共 3 题)

1、设直线l_1:$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+6}{1}$，直线$l_2$:$\begin{cases}x-y=2\\2y+z=7\end{cases}$，则两直线的夹角为（　　）.

A、$\dfrac{\pi}{4}$　　B、$\dfrac{\pi}{3}$　　C、$\dfrac{\pi}{6}$　　D、$\dfrac{\pi}{2}$

2、函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，在$(0,0)$处（　　）.

A、连续，偏导数存在　　B、不连续，偏导数存在

C、连续，偏导数不存在　　D、不连续，偏导数不存在

3、设空间区域$\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0$,$\Omega_2:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$,则有（　　）.

A、$\iiint_{\Omega_1}xdv=4\iiint_{\Omega_2}xdv$　　B、$\iiint_{\Omega_1}ydv=4\iiint_{\Omega_2}ydv$

C、$\iiint_{\Omega_1}zdv=4\iiint_{\Omega_2}zdv$　　D、$\iiint_{\Omega_1}xyzdv=4\iiint_{\Omega_2}xyzdv$

二、填空题(21 分，每题 3 分，共 7 题)

1、设向量$\overrightarrow{OA}=(1,2,2)$,$\overrightarrow{OB}=(1,1,0)$，则$\Delta OAB$的面积为__________.

2、双曲线$\begin{cases}x^2-y^2=1\\z=0\end{cases}$绕$x$轴旋转而得的旋转曲面的方程为__________.

3、点$(1,2,1)$在平面$x+2y+2z-25=0$上的投影为__________.

4、设$z=z(x,y)$是由方程$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$所确定的二元函数，则$dz|_{(0,1)}=$__________.

5、设函数$u(x,y,z)=x^2+3y^2+xyz$，则$gradu|_{(1,1,1)}=$__________.

6、交换二重积分的积分次序：$\int_0^4 dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2}f(x,y)dx=$__________.

7、函数$u=x^2+y^2+z^2$在曲线$\Gamma:x=t^3,y=t^2,z=t$上对应于$t=1$处沿切线正方向（对应于t增大的方向）的方向导数为__________.

三、(6 分) 设$z(x,y)=f(xy)+g(x^2-y^2,e^y)$，其中函数$f$具有连续的二阶导数，函数$g$具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（8 分）求过点$(-1,0,4)$且平行于平面$3x-4y+z-10=0$，又与直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交的直线的方程.

五、（8 分）求曲面$x^2+2y^2+6z=21$平行于平面$x+2y+3z=8$的切平面方程以及过切点的法线方程.

六、（8 分）求曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2-3x=1\\2x-2y+z-1=0\end{cases}$在点$(1,1,1)$处的法平面，并求原点到该法平面的距离.

七、（12 分）求函数$f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$的极值.

八、（6 分）求$\iint_D x^2e^{-y^2}dxdy$，其中D是直线$y=x,y=1$以及y轴所围的平面闭区域.

九、(8分) 设Ω是两个球体$x^2+y^2+z^2\leq 2Rz$及$x^2+y^2+z^2\leq R^2(R>0)$所围的公共部分，计算$\iiint_{\Omega} z\,dv$.

十、(6分) 求球面$x^2+y^2+z^2=4$含在圆柱面$x^2+y^2=2x$内部的那部分面积.

十一、(8分) 求球面$x^2+y^2+z^2=2az$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的闭区域的体积.

2017-2018 学年第二学期期中考试试卷参考答案

一、选择题(9 分，每题 3 分，共 3 题)

1、【正解】B

【学解】直线l_1的方向向量为$\vec{a}=(1,-2,1)$

直线l_2的方向向量为$\vec{b}=(1,-1,0)\times(0,2,1)=(-1,-1,2)$

所以两直线夹角为$\theta=\arccos\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\pi}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 4.3——空间直线的方向向量.

2、【正解】B

【学解】设$P(x,y)$沿直线$y=kx$趋于点$(0,0)$，则有$\lim\limits_{x\to0,y=kx}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$，

因为k值不同极限不同，故$f(x,y)$在点$(0,0)$极限不存在，即$f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续.

$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，所以$f(x,y)$在点$(0,0)$出偏导数存在.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 1.4、易错考点 3-2——二元函数的连续性与偏导数存在性判断.

3、【正解】C

【学解】 由于区域Ω_1关于面xoz和yoz对称，所以被积函数如果为关于x或y的奇函数，则结果为零.

【考点延伸】《考试宝典》专题九易错考点 3-1——三重积分的对称性.

二、填空题(21 分，每题 3 分，共 7 题)

1、【正解】$\dfrac{3}{2}$

【学解】 $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=\dfrac{3}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题七第二部分——向量叉乘的应用.

2、【正解】$x^2-y^2-z^2=1$

【学解】设旋转前双曲线上一点坐标为(x_0,y_0,z_0)，旋转后对应坐标为(x,y,z)

则$x=x_0$，$y^2+z^2=y_0^2+z_0^2$，$z_0=0$，$y_0^2=x_0^2-1$.所以$y^2+z^2=x^2-1$

即旋转后方程为$x^2-y^2-z^2=1$.

【考点延伸】《考试宝典》专题七 5.2——旋转曲面方程求解.

3、【正解】$(3,6,5)$

【学解】平面的法向量为$(1,2,2)$，过点$(1,2,1)$且垂直于平面的直线方程为

$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{2}$，改写为参数式$\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=1+2t\end{cases}$，

代入平面方程$1+t+2(2+2t)+2(1+2t)-25=0$，解得$t=2$.代入参数式方程

故点在平面上的投影为$(3,6,5)$

【考点延伸】《考试宝典》专题七第三部分——空间直线、空间平面方程的理解应用.

4、【正解】$dx+zdy$

【学解】方程两边同时对x和y求导：

$$\frac{z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=\frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{1}{y},\quad -\frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)},$$

所以 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=\left.\frac{z}{x+z}\right|_{(0,1)}=1$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=z$

故$dz|_{(0,1)}=dx+zdy$

【考点延伸】《考试宝典》专题八第三部分——函数的全微分.

5、【正解】$3\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}$

【学解】$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=(2x+yz)|_{(1,1,1)}=3$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=(6y+xz)|_{(1,1,1)}=7$，

$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=xy|_{(1,1,1)}=1$，所以$gradu|_{(1,1,1)}=3\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.2——梯度的计算.

6、【正解】$\int_{-2}^{0}dx\int_{2x+4}^{4-x^2}f(x,y)dy$

【学解】积分区域为$\begin{cases}0\leq y\leq 4\\ -\sqrt{4-y}\leq x\leq \frac{y-4}{2}\end{cases}$，将其改写为$x$型区域：$\begin{cases}-2\leq x\leq 0\\ 2x+4\leq y\leq 4-x^2\end{cases}$

所以改变积分次序后，原式$=\int_{-2}^{0}dx\int_{2x+4}^{4-x^2}f(x,y)dy$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——交换二重积分积分次序..

7、【正解】$\frac{12}{\sqrt{14}}$

【学解】曲线Γ在$t=1$处切线方向向量为$\vec{l}=(3t^2,2t,1)|_{t=1}=(3,2,1)$，函数$u$沿$\vec{l}$的方向向量为$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{(1,1,1)}=(u_x\cos\alpha+u_y\cos\beta+u_z\cos\gamma)|_{(1,1,1)}=\frac{12}{\sqrt{14}}$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数的计算.

三、(6分)【学解】$\frac{\partial z}{\partial y}=xf'(xy)-2yg_1'+e^y g_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(xy)+xyf''(xy)-4xyg_{11}''+2xe^y g_{12}''$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1、6.2——梯度的计算.偏导数的计算.

四、(8分)【学解】设交点为$(t-1,t+3,2t)$，则所求直线方向向量为$\vec{s}=(t,t+3,2t-4)$

平面的法向量为$\vec{n}=(3,-4,1)$，则$\vec{s}\cdot\vec{n}=0$，即$3t-4(t+3)+2t-4=0$

所以$t=16$，$\vec{s}=(16,19,28)$，所求直线方程为$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.2——梯度的计算.《考试宝典》专题七第四部分——空间直线方程的计算，向量的关系.

五、（8分）【学解】平面的法向量$\overrightarrow{n_1}=(1,2,3)$，令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+6z-21$

则$F_x=2x$，$F_y=4y$，$F_z=6$，设切点的坐标为(x_0,y_0,z_0)，所以切平面法向量$\overrightarrow{n_2}=(2x_0,4y_0,6)$.因为$\overrightarrow{n_1}\parallel\overrightarrow{n_2}$，即$\dfrac{2x_0}{1}=\dfrac{4y_0}{2}=\dfrac{6}{3}$.所以$x_0=1,y_0=1$、切点坐标为$(1,1,3)$，$\overrightarrow{n_2}=(2,4,6)$

所以所求切平面方程为$2(x-1)+4(y-1)+6(z-3)=0$，

即$x+2y+3z-12=0$，法线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》专题七第四部分——空间直线和平面方程.

六、（8分）【学解】由$\begin{cases}4x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}-3=0\\ 2-2\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$解得$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{dz}{dx}=-1\end{cases}$，所以切向量为$\left(1,\dfrac{1}{2},-1\right)$

法平面为$x-1+\dfrac{1}{2}(y-1)-(z-1)=0$，即$2x+y-2z=1$

原点到法平面距离$d=\dfrac{|-1|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{1}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》专题七第六部分——空间曲线法平面方程，空间点到平面距离.

七、（12分）【学解】$f_x=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$f_y=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$\begin{cases}f_x=0\\ f_y=0\end{cases}\Rightarrow x=\pm1,y=0$

所以驻点为$(1,0)$和$(-1,0)$.

$A=f_{xx}=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$B=f_{xy}=(x^2y-y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$C=f_{yy}=(xy^2-x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

当$x=1,y=0$时，$A=-2e^{-\frac{1}{2}}<0$，$B=0$，$C=-e^{-\frac{1}{2}}$，$AC-B^2>0$，所以$(1,0)$为函数的极大值点，$f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$

当$x=-1,y=0$时，$A=2e^{-\frac{1}{2}}>0$，$B=0$，$C=e^{-\frac{1}{2}}$，$AC-B^2>0$，所以$(-1,0)$为函数的极小值点，$f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$

【考点延伸】函数的极值.

八、（6分）【学解】原式$=\displaystyle\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_0^y x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy=\frac{1}{6}\int_0^1 y^2e^{-y^2}d(y^2)$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3e}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九第二部分——二重积分的计算.

九、（8分）【学解】将积分区域分成两部分：$x^2+y^2\leqslant 2Rz-z^2$和$x^2+y^2\leqslant R^2-z^2$

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{R}{2}}zdz\iint_{D_{z_1}}dxdy+\int_{\frac{R}{2}}^{R}zdz\iint_{D_{z_2}}dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{R}{2}}\pi z(2Rz-z^2)dz+\int_{\frac{R}{2}}^{R}\pi z(R^2-z^2)$$

$$=\frac{5}{24}\pi R^4$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九第三部分——三重积分的计算，“先一后二”法.

十、(6分)【学解】定义$\Sigma:z=\sqrt{4-x^2-y^2},D:x^2+y^2=2x$

$$\text{由对称性，}A=2\iint_{\Sigma}dS=2\iint_{D}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=4\iint_{D}\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{2\cos\theta}\frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}}$$

$$=16\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=8(\pi-2)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九第二部分——二重积分的应用与计算.

十一、(8分)【学解】用球坐标表示积分区域$\Omega:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}\\0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi\end{cases}$

$$\text{所以}V=\iiint_{\Omega}dv=\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_{0}^{2a\cos\varphi}r^2dr$$

$$=\frac{16}{3}a^3\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi=a^3\pi$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九第三部分——三重积分的应用与计算.