

南京航空航天大学

第 1 页 (共 6 页)

二〇一九 ~ 二〇二〇 学年 第 II 学期 《高等数学 (2)》 考试试题

考试日期: 2020 年 6 月 28 日 试卷类型: A 试卷代号:

		班号			学号			姓名			
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则 $f'_x(0, 0) =$ _____

【解析】定义: $f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$

2. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 - 2xyz + e^z = e + 1$ 确定, 则 $dz|_{(1,0)} =$ _____

【解析】两边同时取微分得到 $dz = \frac{2yz - 2x}{e^z - 2xy} dx + \frac{2xz}{e^z - 2xy} dy$

当 $(x, y) = (1, 0)$ 时, $z = 1$, 所以 $dz|_{(1,0)} = -\frac{2}{e} dx + \frac{2}{e} dy$

3. 设 $u = xy^2 + z^2 - xyz$, 则 $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}u) =$ _____

【解析】 $\overrightarrow{\text{grad}}u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}) = (y^2 - yz, 2xy - xz, 2z - xy)$

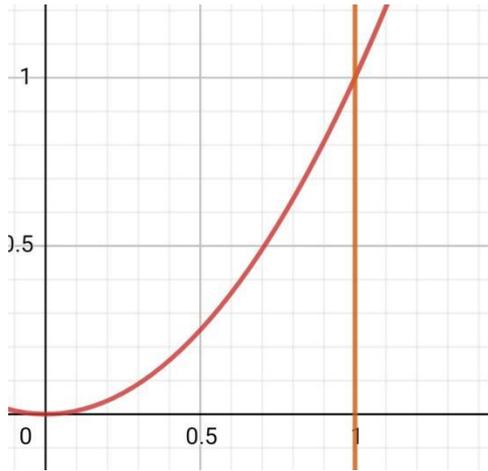
$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}u) = 0 + 2x + 2 = 2x + 2$

4. 曲面 $z + 2xy - e^z = 1$ 在点 $(1, 1, 0)$ 处的切平面方程为 _____

【解析】法向量 $\vec{n} = (2y, 2x, 1 - e^z) = (2, 2, 0) \Rightarrow$ 平面方程点法式

5. $f(x, y)$ 连续, 化累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$ 为极坐标的形式的二次积分为

【解析】 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx$



6. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的周长为 L , 则曲线积分 $\oint_C (2xy + 3x^2 + 4y^2) dx$

【解析】 $\oint_C (2xy + 3x^2 + 4y^2) dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} \oint_C (3x^2 + 4y^2) dx = \oint_C 12 dx = 12L$

7. 将函数 $\ln(x+2)$ 展开为 x 的幂级数 (写出收敛域) _____

【解析】 $\ln(x+2) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$

收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2$, 当 $x = -2$ 时, $\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ 条件收敛

当 $x=2$ 时, $\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, 所以收敛域为 $[-2, 2)$

8. 微分方程 $2xydx + (x^2 + y^2) dy = 0$ 的通解为 _____

【解析】 $2xydx + x^2dy + y^2dy = 0 \Rightarrow ydx^2 + x^2dy + y^2dy = 0 \Rightarrow d(x^2y) + y^2dy = 0$

通解为 $x^2y + \frac{y^3}{3} = C$

二. 选择题

1. 微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{3x}$ 的特解形式为: D

A. $y^* = Ae^{3x}$ B. $y^* = Axe^{3x}$

C. $y^* = (Ax + B)e^{3x}$ D. $y^* = x(Ax + B)e^{3x}$

【解析】特征方程 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

设特解 $y^* = x(Ax + B)e^{3x}$

e^{3x} 照抄, $Ax + B$ 是与 x 同阶的一般多项式, 3 是单根所以乘 x

2.若函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处不连续, 则C

(A) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在 (B) $f(x_0, y_0)$ 必不存在

(C) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 必不可微(D) $f_x(x_0, y_0)$ 、 $f_y(x_0, y_0)$ 必不存在

【解析】可微必然连续, 所以不连续一定不可微(命题与逆反命题)

三.设函数 $z=f(xy, x-2y)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1 + f_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (yf_1 + f_2) = f_1 + y(f_{11}x - 2f_{12}) + xf_{21} - 2f_{22}$$

四. 计算下列积分

1. 设 L 为闭曲线 $x^2 + y^2 = 4$, 取正向, 求曲线积分 $\oint_L (2xye^x - y)dx + 2(x-1)e^x dy$

【解析】设 L 围成的区域为 D ,

$$P=2xye^x - y, Q = 2(x-1)e^x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^x, \frac{\partial P}{\partial y} = 2xe^x - 1$$

$$\oint_L (2xye^x - y)dx + 2(x-1)e^x dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy = \pi R^2 = 4\pi$$

[格林公式必考!]

2. $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2 + y^2}$ 以及平面 $z = 1$ 所围成的区域的整个边界曲面

【解析】令 Σ_1 为锥面 $z=\sqrt{x^2 + y^2}$, Σ_2 为平面 $z = 1$, 投影为 $D: x^2 + y^2 \leq 1$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

$$\text{则} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) dS = (\sqrt{2}+1) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= (\sqrt{2}+1) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \pi$$

五. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = \sqrt{7}$ 之间的最短距离

【解析】 设椭球面上某一点坐标为 (x_0, y_0, z_0)

$$\text{距离} d = \frac{|x_0 + y_0 + z_0 - \sqrt{7}|}{\sqrt{3}}, \quad \text{令 } f(x, y, z) = \frac{(x+y+z - \sqrt{7})^2}{3}$$

$$\text{令 } F(x, y, z) = \frac{(x+y+z - \sqrt{7})^2}{3} + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 1)$$

拉格朗日乘法

$$\begin{cases} \frac{2(x+y+z - \sqrt{7})}{3} + 2\lambda x = 0 \\ \frac{2(x+y+z - \sqrt{7})}{3} + 4\lambda y = 0 \\ \frac{2(x+y+z - \sqrt{7})}{3} + 8\lambda z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{得 } x = \pm \frac{2}{\sqrt{7}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{7}}, z = \pm \frac{1}{2\sqrt{7}}, \text{ 所以距离 } d_1 = \frac{\sqrt{21}}{6}, d_2 = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{最短距离为 } d_1 = \frac{\sqrt{21}}{6}$$

六. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ 的收敛域以及和函数

$$\text{【解析】 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n-1)!} x^{2n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 2x^2 e^{x^2} + e^{x^2} = e^{x^2}(1 + 2x^2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2n+3} = \infty, \text{ 收敛域为 } R$$

七. $I = \iint_{\Sigma} xz^2 dydz + (xy^2 - z^3) dzdx + (2xy + y^2z) dxdy$, 其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ($a > 0$), 取上侧

【解析】 增加辅助面 $\Sigma_1: z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$ 的下侧, 且 Σ 与 Σ_1 围成的空间区域为 Ω

$$\text{令 } I_1 = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} xz^2 dydz + (xy^2 - z^3) dzdx + (2xy + y^2z) dxdy = \iiint_{\Omega} (z^2 + 2xy + y^2) dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega} (z^2 + y^2) dxdydz = \frac{2}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr = \frac{4}{15} \pi a^5$$

$$\text{令 } I_2 = \iint_{\Sigma_1} xz^2 dydz + (xy^2 - z^3) dzdx + (2xy + y^2z) dxdy = -\iint_D (2xy + y^2z) dxdy = 0$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{4}{15} \pi a^5$$

八. 设 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n+1}$

判断 (1) (2) 的敛散性

【解析】 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n(n^2+1)}} = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 绝对收敛

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n+1}$ 发散

又因为 $\frac{\ln n}{n+1}$ 单调递减且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n+1} = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n+1}$ 条件收敛

九. 求微分方程 $y'' - y = 0$ 的一条积分曲线, 使其在原点处与直线 $y = x$ 相切

【解析】特征方程 $\lambda^2 - 1 = 0$, 得 $\lambda_{1,2} = 1 \Rightarrow f(x) = (C_1 + C_2 x)e^x$

$f(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow f(x) = C_2 x e^x \Rightarrow f'(x) = C_2(1+x)e^x$

$f'(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow f(x) = (1+x)e^x$

十. 设 $u_n = (-1)^n \frac{a^n}{\ln n}$, ($a > 0$) 讨论级数的敛散性

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = a$, 当 $a > 1$ 时, 发散

当 $0 < a < 1$ 时, 绝对收敛

当 $a=1$ 时, $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 也发散

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ 且 $\frac{1}{\ln n}$ 单调递减

根据莱布尼茨, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 条件收敛

南航试卷+QQ



截至2021年8月，已有近3年试卷科目(后续会不断更新):

试卷科目

B:变分原理与有限元

C:测试技术、操作系统、测试信号分析与处理、材料力学、创业基础

D:电机学、电路、电子线路、电工与电子技术、电力工程、电磁场理论、电气测试技术、电力电子、大物、电离辐射探测学

F:复合材料力学、飞行器结构力学

G:概率论、高数、工程热力学/基础、工程电磁场、工程材料、工数、工图、管理学、功率变换器计算机仿真与设计、工程经济学

H:航概、互换性与技术测量、宏观经济学

J:军高、结构力学及有限元、计算方法、计算机组成原理、计软、计硬、计量经济学、机械原理、机械设计基础、机械制造工艺与装备、机械振动基础、机床数控技术、金属材料

K:控制系统工程

L:理论力学、离散数学、雷达原理、流体力学

M:模拟电子技术、马原、毛概

R:燃烧室原理

S:数字电路、数据库原理、数据结构、数字信号处理、塑性力学

T:通信原理

W:微机原理与应用、微波技术、微观经济学

X:现代控制理论、信号与系统/线性系统

Y:有限元、仪表飞行程序、应用统计学、运筹学

Z:自动控制原理

科目展示院系版

全校热门: 高数、线代、概率论、毛概、马原、航概、大物、创业基础、军高、计算方法、理力、材力、电工电子技术、工图、数字电路、微机原理

院系热门(仅部分):

(航空) 复合材料、飞行器结构力学、互换性、有限元、工数、控制系统工程、变分原理、塑性力学、流体力学

(能动) 燃烧室、工热、互换性、机械设计基础、现控、自控、机械振动基础

(自动化) 电机学、电路、电力电子、计软、计硬、机械设计基础、模电、现控、自控、测试信号分析、电力工程、电气测试技术、工磁、功率变换器、数字信号处理、信号

(电信) 电子线路、雷达原理、信号、微波技术、通信原理、电磁场、数据结构、数字信号处理、工程经济学

(机电) 测试技术、工热、机原、机械制造工艺、工热基础、工材、互换性、控制系统工程、机床数控技术

(材料) 金属材料、电离辐射探测学

(民航) 机械设计基础、模电、信号、运筹、自控、机械振动基础、工程经济学

(理) 计组、模电、数据库

(经管) 管理学、计量、应统、运筹、操作系统、数据库、宏经、微经、工程经济学

(航天) 结构力学及有限元、电路、工材、机原、数字信号处理、通信原理、自控

(计科) 操作系统、工数、离散数学、计组、数据库、数据结构

(长空) 工热、工材、工数、计组、机原

(国教) 计量、应统、运筹、宏经

祝您考试顺利，取得理想成绩！