南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一九 ～ 二〇二〇 学年 第Ⅱ学期《高等数学（2）》考试试题

考试日期： 2020 年 6 月 28 日 试卷类型：A 试卷代号：

班号			学号			姓名				
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

1.$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f_x(0,0)=$ ______

【解析】定义：$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

2.设z=z(x,y)由方程$x^2-2xyz+e^z=e+1$确定，则 $dz|_{(1,0)}=$ ______

【解析】两边同时取微分得到$dz=\dfrac{2yz-2x}{e^z-2xy}dx+\dfrac{2xz}{e^z-2xy}dy$

当(x,y)=(1,0)时，z=1，所以$dz|_{(1,0)}=-\dfrac{2}{e}dx+\dfrac{2}{e}dy$

3.设$u=xy^2+z^2-xyz$,则$div(\overrightarrow{gradu})=$ ______

【解析】$\overrightarrow{gradu}=(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z})=(y^2-yz,2xy-xz,2z-xy)$

$div(\overrightarrow{gradu})=0+2x+2=2x+2$

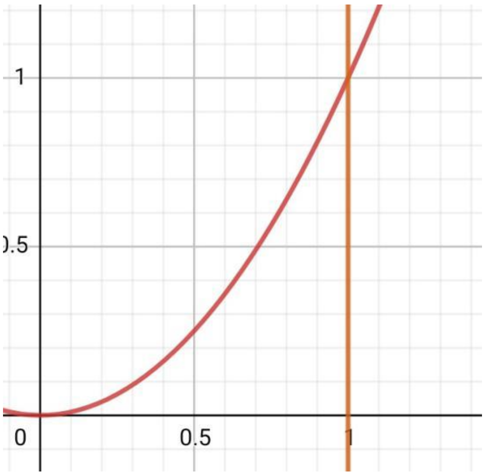
4.曲面$z+2xy-e^z=1$在点(1,1,0)处的切平面方程为______

【解析】法向量$\vec{n}=(2y,2x,1-e^z)=(2,2,0)\Rightarrow$ 平面方程点法式

5. f(x,y)连续，化累次积分$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$为极坐标的形式的二次积分为

______

【解析】$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$



6.设椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的周长为L,则曲线积分$\oint_C(2xy+3x^2+4y^2)dx$

【解析】$\oint_C(2xy+3x^2+4y^2)dx\xrightarrow{\text{奇偶性}}\oint_C(3x^2+4y^2)dx=\oint_C 12dx=12L$

7.将函数$\ln(x+2)$展开为x的幂级数(写出收敛域)__________

【解析】$\ln(x+2)=\ln 2+\ln(1+\dfrac{x}{2})=\ln 2+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\frac{x}{2})^{n+1}}{n+1}=\ln 2+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=2$,当x=$-2$时,$\ln 2+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$条件收敛

当x=2时,$\ln 2+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$发散，所以收敛域为$[-2,2)$

8. 微分方程$2xydx+(x^2+y^2)dy=0$的通解为__________

【解析】$2xydx+x^2dy+y^2dy=0\Rightarrow ydx^2+x^2dy+y^2dy=0\Rightarrow d(x^2y)+y^2dy=0$

通解为$x^2y+\dfrac{y^3}{3}=C$

二. 选择题

1. 微分方程$y''-5y'+6y=xe^{3x}$的特解形式为：D

$A.y^*=Ae^{3x}$ ________ $B.y^*=Axe^{3x}$

$C.y^*=(Ax+B)e^{3x}$ $D.y^*=x(Ax+B)e^{3x}$

【解析】特征方程$\lambda^2-5\lambda+6=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=3$

设特解$y^*=x(Ax+B)e^{3x}$

e^{3x}照抄，$Ax+B$是与x同阶的一般多项式，3是单根所以乘x

2.若函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处不连续，则C

(A)$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$不存在（B）$f(x_0,y_0)$必不存在

(C)$f(x,y)$在(x_0,y_0)必不可微(D)$f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$必不存在

【解析】可微必然连续，所以不连续一定不可微（命题与逆反命题）

三.设函数$z=f(xy,x-2y)$,其中f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1+f_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(yf_1+f_2)=f_1+y(f_{11}x-2f_{12})+xf_{21}-2f_{22}$$

四.计算下列积分

1.设L为闭曲线$x^2+y^2=4$,取正向，求曲线积分$\oint_L(2xye^x-y)dx+2(x-1)e^xdy$

【解析】设L围成的区域为D,

$$P=2xye^x-y,Q=2(x-1)e^x,\frac{\partial Q}{\partial x}=2xe^x,\frac{\partial P}{\partial y}=2xe^x-1$$

$$\oint_L(2xye^x-y)dx+2(x-1)e^xdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D dxdy=\pi R^2=4\pi$$

[格林公式必考!]

2.$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$以及平面$z=1$所围成的区域的整个边界曲面

【解析】令Σ_1为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$，Σ_2为平面$z=1$，投影为D：$x^2+y^2\le1$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

则$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS=(\sqrt{2}+1)\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy$

$$=(\sqrt{2}+1)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi$$

五. 求椭球面$x^2+2y^2+4z^2=1$与平面$x+y+z=\sqrt{7}$之间的最短距离

【解析】设椭球面上某一点坐标为(x_0,y_0,z_0)

距离$d=\dfrac{\left|x_0+y_0+z_0-\sqrt{7}\right|}{\sqrt{3}}$，令$f(x,y,z)=\dfrac{(x+y+z-\sqrt{7})^2}{3}$

令$F(x,y,z)=\dfrac{(x+y+z-\sqrt{7})^2}{3}+\lambda(x^2+2y^2+4z^2-1)$

拉格朗日乘数法

$$\begin{cases}\dfrac{2(x+y+z-\sqrt{7})}{3}+2\lambda x=0\\ \dfrac{2(x+y+z-\sqrt{7})}{3}+4\lambda y=0\\ \dfrac{2(x+y+z-\sqrt{7})}{3}+8\lambda z=0\\ x^2+2y^2+4z^2-1=0\end{cases}$$

得$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{7}}$, $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{7}}$, $z=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$, 所以距离$d1=\dfrac{\sqrt{21}}{6}$, $d2=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

最短距离为$d1=\dfrac{\sqrt{21}}{6}$

六.求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$的收敛域以及和函数

【解析】$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}=x^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(n-1)!}x^{2n-2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n!}=2x^2e^{x^2}+e^{x^2}=e^{x^2}(1+2x^2)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n!}\cdot\dfrac{(n+1)!}{2n+3}=\infty$, 收敛域为$R$

七.$I=\iint\limits_{\Sigma}xz^2dydz+(xy^2-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$, 其中$\Sigma$为半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,(a>0)$, 取上侧

【解析】增加辅助面Σ_1：$z=0, x^2+y^2\le a^2$的下侧，且Σ与Σ_1围成的空间区域为Ω

令$I_1=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xz^2dydz+(xy^2-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+2xy+y^2)dxdydz$

$=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+y^2)dxdydz=\dfrac{2}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\dfrac{2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr=\dfrac{4}{15}\pi a^5$

令$I_2=\iint\limits_{\Sigma_1}xz^2dydz+(xy^2-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy=-\iint\limits_{D}(2xy+y^2z)dxdy=0$

$I=I_1-I_2=\dfrac{4}{15}\pi a^5$

八. 设(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ (2)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n+1}$

判断（1）（2）的敛散性

【解析】（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n(n^2+1)}}=1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$绝对收敛

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n+1}$发散

又因为 $\frac{\ln n}{n+1}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n+1}=0$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n+1}$条件收敛

九.求微分方程$y''-y=0$的一条积分曲线，使其在原点处与直线$y=x$相切

【解析】特征方程$\lambda^2-1=0$，得$\lambda_{1,2}=1\Rightarrow f(x)=(C_1+C_2x)e^x$

$f(0)=0\Rightarrow C_1=0\Rightarrow f(x)=C_2xe^x\Rightarrow f'(x)=C_2(1+x)e^x$

$f'(0)=1\Rightarrow C_2=1\Rightarrow f(x)=(1+x)e^x$

十. 设$u_n=(-1)^n\frac{a^n}{\ln n}$，（a>0）讨论级数的敛散性

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=a$,当$a>1$时，发散

当0<a<1时，绝对收敛

当a=1时，$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$也发散

又 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$且 $\frac{1}{\ln n}$ 单调递减

根据莱布尼茨，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$条件收敛