

考试日期: 2022 年 5 月 30 日

试卷类型:

试卷代号: 080021

序号

班号

学号

姓名

题号

一

二

三

四

总分

1

2

3

4

5

6

1

2

3

得分

24

9

8

8

8

8

8

8

6

6

7

100

本题分数

24

得分

一、填空(每空 3 分)

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{\sqrt{(xy)^2 + 1} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$2. \text{若函数 } f(x,y) = x^{y+1}, M(e,0), \text{ 则 } df|_M = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$3. \text{函数 } u(x,y,z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \text{ 在点 } (-1,-1,1) \text{ 处的梯度为 } \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 方向导数的最大值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$4. \text{二次积分 } \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y) dy \text{ 在极坐标形式的二次积分为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$5. \text{设 } \Omega = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}, \text{ 则 } \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dv \text{ 在球面坐标系下的三次积分形式是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$6. \text{设 } C \text{ 为圆周 } x^2 + y^2 = 1, \text{ 则曲线积分 } \oint_C (2xy + x^2 + y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$7. \text{已知 } (ax \cos y - y^2 \sin x) dx + (ay \cos x - x^2 \sin y) dy \text{ 为某函数的全微分, 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}.$$

本题分数	9
得分	

二、选择题 (每题 3 分)

1. 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是 ()

A. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0.$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \text{ 且 } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$

C. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} [f_x(x, 0) - f_x(0, 0)] = 0, \text{ 且 } \lim_{y \rightarrow 0} [f_y(0, y) - f_y(0, 0)] = 0.$

2. 设函数 $f(x, y) = x^3 - 3x - y$, 则它在点 $(0, 0)$ 处 ()

A. 取得极小值.

B. 取得极大值.

C. 无法判断是否取得极值.

D. 不取极值.

3. 设有空间区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$, Ω_1 是 Ω 在第一卦限的部分, 则下面正确的是 ()

A. $\iiint_{\Omega} x dv = 4 \iiint_{\Omega_1} x dv.$

B. $\iiint_{\Omega} y dv = 4 \iiint_{\Omega_1} y dv.$

C. $\iiint_{\Omega} z dv = 4 \iiint_{\Omega_1} z dv.$

D. $\iiint_{\Omega} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_1} xyz dv.$

三、计算题 (共 48 分)

本题分数	8
得分	

1. 设 $z = f(x^2 + y^2, \frac{y}{x})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数,

求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

本题分数	8
得分	

2. 求曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 上在点 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 处的切平面方程以及相应的法线方程.

本题分数	8
得分	

3. 计算积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$.

本题分数	8
得分	

4. 计算积分 $\iiint_{\Omega} |z - x^2 - y^2| dv$, 其中 $\Omega: 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1$.

本题分数

8

得 分

5. 设 C 为圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 上 $y \geq 0$ 的部分, 求 $I = \int_C e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$.

本题分数

8

得 分

6. 计算曲线积分 $I = \int_C (2xy + x)dx + (x^2 + x - 2y)dy$, 其中 C 是 $y = 1 - |1 - x|$ 对应 x 由 0 到 2 的一段.

四、综合应用题 (共 19 分)

本题分数	6
得 分	

1. 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆, 求这椭圆到坐标原点的 longest 和 shortest 距离.

本题分数	6
得 分	

2. 如果曲线 C 是弧段 $\widehat{AB}: y = \pi \cos x$, $A(-\pi, -\pi), B(\pi, -\pi)$. 计算 $\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ 。

本题分数	7
得分	

3. 设半径为 $R (0 < R < 2a)$ 的球面 Σ 的球心为点 $(0, 0, a)$, 问当 R 为何值时, 球面 Σ 在定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 1)$ 内部的那部分面积最大.

一. 填空

1. 2 2. $dx + edy$ 3. $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1), \frac{\sqrt{14}}{3}$ 4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}}^{\frac{1}{\cos^2 \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$
5. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} f(r^2) r^2 \sin \varphi dr$ 6. 2π 7. 2

二. 选择

- 1 C 2 D 3 C

$$(1) \quad z_x = 2xf_1' - \frac{y}{x^2} f_2' \dots\dots\dots 3$$

$$z_{xy} = 2x(2yf_{11}'' + \frac{1}{x} f_{12}'') - \frac{1}{x^2} f_2' - \frac{y}{x^2} (2yf_{21}'' + \frac{1}{x} f_{22}'') \dots\dots\dots 6$$

$$= 4xyf_{11}'' + (2 - \frac{2y^2}{x^2})f_{12}'' - \frac{1}{x^2} f_2' - \frac{y}{x^3} f_{22}'' \dots\dots\dots 8$$

$$(2) \quad F(x, y, z) = z - 1 + x^2 + y^2 = 0$$

求切点处的法向量为 $\vec{n} = (-1, -1, 1) \dots\dots\dots 4$

切平面方程为 $x + y - z + \frac{3}{2} = 0 \dots\dots\dots 6$

法线方程为 $x + \frac{1}{2} = y + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - z \dots\dots\dots 8$

$$(3) \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx \dots\dots\dots 3$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} (y - y^2) dy \dots\dots\dots 6 \\ &= \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy \end{aligned}$$

$$= [-\cos y + y \cos y - \sin y]_0^1$$

$$= 1 - \sin 1 \dots\dots\dots 8$$

$$(4) \quad \Omega_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}, \Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1 \dots\dots\dots 2$$

$$\iiint_{\Omega} |z - x^2 - y^2| \mathrm{d}v = \iiint_{\Omega_1} (z - x^2 - y^2) \mathrm{d}v + \iiint_{\Omega_2} (x^2 + y^2 - z) \mathrm{d}v \dots\dots\dots 3$$

$$\iiint_{\Omega_1} (z - x^2 - y^2) \mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}r \int_{r^2}^1 (z - r^2) r \mathrm{d}z = \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots 5$$

$$\iiint_{\Omega_2} (x^2 + y^2 - z) \mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{r^2} (r^2 - z) r \mathrm{d}z = \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots 7$$

$$\iiint_{\Omega} |z - x^2 - y^2| \mathrm{d}v = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 8$$

(5) 令 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \dots\dots\dots 2$

$ds = \sqrt{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta} d\theta = 2d\theta \dots\dots\dots 4$

$I = \int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = 2\int_0^\pi e^2 d\theta \dots\dots\dots 6$

$= 2\pi e^2 \dots\dots\dots 8$

(6) 补有向曲线 $L_1: y=0, x: 2 \rightarrow 0$ 2

由格林公式得

$$\int_L (2xy+x)dx + (x^2+x-2y)dy + \int_{L_1} (2xy+x)dx + (x^2+x-2y)dy$$
$$= -\iint_D (2x+1-2x)dx dy \dots\dots\dots 4$$

$$-\iint_D (2x+1-2x)dx dy = -1 \dots\dots\dots 6$$

$$\int_{L_1} (2xy+x)dx + (x^2+x-2y)dy = \int_2^0 x dx = -2 \dots\dots\dots 7$$

$$I = \int_L (2xy+x)dx + (x^2+x-2y)dy = 1. \dots\dots\dots 8$$

【解析】设 $P(x, y, z)$ 为椭圆上的一点，则

$$|OP| = x^2 + y^2 + z^2.$$

所求问题为如下的条件极值问题：

目标函数 $x^2 + y^2 + z^2$ ，约束条件： $z = x^2 + y^2$ ，

$$x + y + z = 1.$$

$$\text{设 } F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 (z - x^2 - y^2) + \lambda_2 (x + y + z - 1)$$

则由方程组

$$\begin{cases} F'_x = 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ F'_y = 2y - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ F'_z = 2z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ F'_{\lambda_1} = z - x^2 - y^2 = 0 \\ F'_{\lambda_2} = x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{可得：} x_1 = y_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \quad z_1 = 2 - \sqrt{3},$$

$$x_2 = y_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

因为

$$|OP_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}},$$

$$|OP_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}},$$

所以最长距离 $\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$ ，最短距离 $\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$.

(2) 解: 添加辅助线两条辅助线 $l: x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 逆时针, $\vec{AB}: y = -\pi, x: -\pi \rightarrow \pi$

$$\because \oint_{\widehat{AB} + \overline{BA} + l} Pdx + Qdy = - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0 \therefore \int_{\widehat{AB}} = \int_{\overline{AB}} - \int_l \dots\dots\dots 3$$

$$\int_l = -2\pi \quad \text{又} \int_{\overline{AB}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x - \pi}{x^2 + \pi^2} dx = -2 \arctan \frac{x}{\pi} \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 5$$

$$\therefore \int_{\widehat{AB}} = \int_{\overline{AB}} - \int_l = \frac{3\pi}{2} \dots\dots\dots 6$$

(3) 解: 设球面方程 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2$,

则两球面的交线为 xoy 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4a^2}(4a^2 - R^2) \end{cases}$

$$dS = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy, \dots\dots\dots 3$$

$$\text{所求面积 } S(R) = \iint_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2\pi R^2 - \frac{\pi}{a} R^3 \dots\dots\dots 5$$

$$\text{令 } S'(R) = 4\pi R - \frac{3\pi}{a} R^2 = 0, \text{ 得 } R = \frac{4a}{3}, \dots\dots\dots 6$$

$$\text{因为 } S''\left(\frac{4a}{3}\right) = -4\pi < 0, \text{ 所以当 } R = \frac{4a}{3} \text{ 时, 球面 } \Sigma \text{ 在定球内的面积最大. } \dots\dots\dots 7$$