

本题分数	
得分	

一. 填空题(每空格 3 分)

1. 函数 $u(x, y)$ 在点 P 可微是函数在该点偏导数存在的_____；比值审敛法中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1$ 是正项级数

收敛的_____；正项级数部分和有界是正项级数收敛的_____。

(1. 充分不必要条件；2. 必要不充分条件；3. 充分必要条件)

2. 向量场 $A = xyi + \ln(1 + yz)j + e^xk$ 在点 $(0, 1, 1)$ 处的散度为_____。

3. 设 Σ 是下半球面 $z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ ，则 $\iint_{\Sigma} \frac{xy + 1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS =$ _____。

4. 设 Ω 是被球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 围成的封闭区域，则 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv =$ _____。

5. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ _____ (收敛, 发散), $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n}{n!} =$ _____。

6. 微分方程 $y' = (1 - y^2) \tan x$ 满足 $y(0) = 2$ 的特解为 $y =$ _____。

7. 以 $y = \cos 2x$ 为特解的二阶常系数齐次线性微分方程为_____。

(30.0分)

本题分数	6 分
得 分	

二、选择题:

1. 曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在 $(1, 1, \sqrt{3})$ 的切线与 y 轴正向间的夹角为 ()

- (A) π (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

2. 在下列无穷级数中, 发散的级数是 ()

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$; (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2})$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

3. 下列说法不正确的是 ()

(A) 方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy}{x^2}$ 为齐次方程;

(B) 微分方程 $y'' + \sin y' + y = 0$ 为二阶微分方程;

(C) 若 y_1 和 y_2 是微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个解, 则 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解;

(D) 微分方程 $x^2 y' + y = x \ln x$ 是一阶非齐次线性微分方程

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}$$

$$2. z = f(x^2+y^2), \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$3. \text{ 设 } z = xy + \sin(x+2y) \text{ 在 } (0,0) \text{ 处沿 } \{1,2\} \text{ 的方向导数.}$$

$$4. \text{ 计算 } \iint_D (x+y) d\sigma \quad D: x^2+y^2-2Rx \leq 0, R>0.$$

$$5. \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz \quad \Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ 的空间}$$

$$6. \oint_L (x^2+y^2 + \sin y) ds, L: x^2+y^2=4\pi.$$

$$7. I = \int_L (2x^2 - y^2 + x^2 e^{3y}) dx + (x^3 e^{3y} - 2xy - 2y^2) dy, L \text{ 为圆周 } (x-1)^2 + y^2 = 1, \text{ 逆时针方向.}$$

$$8. \iint_{\Sigma} x ds \quad \Sigma \text{ 为 } x+y+z=1 \text{ 在第一卦限部分}$$

$$9. \text{ 判断 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n!} \text{ 敛散性.}$$

$$10. \text{ 将 } \sin \frac{x}{2} \text{ 展开为幂级数.}$$

$$11. f'(x) + f(x) = \cos x, f(0) = 0. \text{ 求 } f(x)$$

$$12. y'' - 4y' + 4y = x \text{ 通解.}$$

一. 填空题

1. 充分不必要条件; 充分不必要条件; 充分不必要条件.

2. $\text{div } \vec{A} = y + \frac{z}{1+y^2} + x e^{xz}$

3. $z = -\sqrt{9-x^2-y^2}$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{xy+1}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} ds &= \iint_D \frac{1}{4} (xy+1) \sqrt{1+\frac{x^2}{9x^2+y^2}+\frac{y^2}{9x^2+y^2}} dx dy \\ &= \frac{3}{4} \iint_D \frac{xy+1}{\sqrt{9x^2+y^2}} dx dy \\ &\stackrel{\text{奇偶性}}{=} \frac{3}{4} \iint_D \frac{1}{\sqrt{9x^2+y^2}} dx dy \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-r^2}} r dr \\ &= \frac{9}{2}\pi \end{aligned}$$

4. 原积分 $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi dy \int_0^1 r^4 \sin y dr$
 $= 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{5} \sin y dy$
 $= \frac{4}{5}\pi$

5. 收敛 0

6. $y' = (1-y^2) \tan x \Rightarrow \frac{1}{1-y^2} dy = \tan x dx$
 $\frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = -\ln |\cos x| + C$
 $\frac{1+y}{1-y} = C \cos^2 x$
 $x=0, y=2$ 代入 $C = -\frac{1}{3}$
 $\frac{1+y}{1-y} = -\frac{1}{3} \cos^2 x$

7. $\alpha=0, \beta=2 \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i$
 $\lambda^2 + 4 = 0$
 $y'' + 4y = 0$

选择题

1. B

2. B

3. D

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{xy}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

$$2. z = f(x^2 + y^2)$$

$$\text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot 2x.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f' + 2x \cdot f'' \cdot 2x = 2f' + 4x^2 f''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x f'' \cdot 2y = 4xy f''$$

$$3. z = xy + \sin(x+2y) \text{ 在 } (0,0) \text{ 沿 } (1,2) \text{ 的方向导数.}$$

$$\text{解: } l = (1,2) \Rightarrow l_0 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$z_x = y + \cos(x+2y), z_y = x + 2\cos(x+2y)$$

$$z_x|_{x=0,y=0} = 1, z_y|_{x=0,y=0} = 2$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial l}|_{(0,0)} = 1 \times \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$4. \iint_D (x^2 + y^2) dr, D: x^2 + y^2 \leq 2R, R > 0.$$

$$\text{解: 原积分} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} r^3 dr.$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4R^4 \cos^4 \theta d\theta.$$

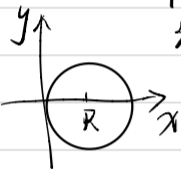
$$= \frac{3\pi}{2} R^4$$

$$5. \iiint \varepsilon^2 dx dy dz, \text{ 且 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1. \quad \text{椭圆面积 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad S = \pi ab$$

$$\text{解: 原积分} = \int_{-c}^c \varepsilon^2 dz \iint_{D_z} dx dy$$

$$= \int_{-c}^c \pi ab (1 - \frac{z^2}{c^2}) \varepsilon^2 dz.$$

$$= \frac{4}{15} \pi abc^3$$



奇偶性 $(x-2)^2 y^2 = 4$

6. $\oint_L (x^2 + y^2 + \sin y) ds$, $L: x^2 + y^2 = 4\pi$

解: $x = 2 + 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$

原积分 = $\oint_L (x^2 + y^2) ds$

$= \int_0^{2\pi} (8 + 4\cos\theta) \sqrt{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta} d\theta$

$= \int_0^{2\pi} 8(2 + \cos\theta) d\theta$

$= 32\pi$

7. $I = \int_L (2x^2 y^2 + x^2 e^{3y}) dx + (x^3 e^{3y} - 2xy - 2y^2) dy$

L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 逆时针方向

解: $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 e^{3y} - 2y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -2y + 3x^2 e^{3y}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$\therefore I = 0$

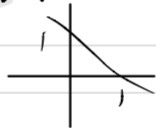
8. $\iint_{\Sigma} x ds$, Σ 为 $x + y + z = 1$ 在第一卦限部分

解: 原积分 = $\iint_D x \sqrt{1+1+1} dx dy$

$= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x dy$

$= \sqrt{3} \int_0^1 x(1-x) dx$

$= \frac{\sqrt{3}}{6}$



9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n!}$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{9^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{9^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n+1} = 0 < 1$

由比值审敛法, 原级数收敛.

10. $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \infty < x < +\infty$

$\sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{3!}(\frac{x}{2})^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\frac{x}{2})^{2n+1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} - \infty < x < +\infty$

11. $f'(x) + f(x) = \cos x$, $f(0) = 0$.

解: $f(x) = \left[\int \cos x e^{\int dx} + c \right] e^{-\int dx}$
 $= \left[\int \cos x e^x dx + c \right] e^{-x}$
 $= \left(\frac{1}{2}(\cos x + \sin x) e^x + c \right) e^{-x}$
 $= \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + c e^{-x}$
 $f(0) = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$
 $\therefore f(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}e^{-x}$

12. $y'' - 4y' + 4y = x$ 通解.

解: $\mu = 0$

特征方程 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\mu = 0$ 不是特征值.

令特解 $y^* = ax + b$

$-4a + 4(ax + b) = x$

$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

$\therefore y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$