

二〇二〇二四学年 第一学期 《高等数学 II(1) 期中》考试试题

考试日期: 2023 年 11 月 11 日

试卷类型:

试卷代号:

一	二	三	四	五	六	七	八	总分

本题分数	24 分
得分	15

一、填空题 (每小题 3 分)。

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{2n} = e^2$

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ a^2, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \frac{1}{2}$

设 $y = \sqrt{\tan \frac{x}{2}}$, 则 $dy|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} dx$

设函数 $y = f(x)$ 是由方程 $e^y + xy - e = 0$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y = -\frac{1}{2}x + 1$

曲线 $y = \ln(1+x^2)$ 的凹区间为 $(-\infty, 1]$

函数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 的极大值为 12

曲线 $y = x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right)$ 的斜渐近线方程为 $y = x$

函数 $y = xe^x$ 的带有佩亚诺型余项的 2 阶麦克劳林公式为 $x + 2x^2 + o(x^2)$

本题分数	6 分
得分	6

二、选择题 (每小题 3 分)。

1. 下列结论中正确的是 (C)

若 $f(x)$ 在 x_0 处不可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 处也不可导。

- (B) 若曲线 $y = f(x)$ 过点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 处可导;
 (C) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 不存在;
 (D) 若 $f'(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加。

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处 (D)

- (A) 连续且取得极大值; (B) 连续且取得极小值;
 (C) 可导且导数为 0; (D) 可导且导数不为 0。

本题分数	18 分
得分	16

三、计算下列极限 (每小题 6 分)。

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan x} \right)$

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\arctan x - x}{x \cdot \arctan x} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \frac{1}{3}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos x) \cdot \frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}}$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x (x^2+1)}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x^2+1)}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

本题分数	7分
得分	7

六、证明：当 $x > 0$ 时， $e^x - 1 > (1+x)\ln(1+x)$.

设 $f(x) = e^x - 1 - (1+x)\ln(1+x)$
 $f'(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$
 $f'(0) = 0$
 $f''(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$
 $f''(0) = 0$
 $f'''(x) = e^x + \frac{1}{(1+x)^2}$
 $f'''(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立

$f(x) > f(0) = 0$
 设 $t = x+1$ 则 $y = t \ln t$ $t > 1$
 $y' = \ln t + 1 - \frac{1}{t}$

设 $f(x) = e^x - (1+x)\ln(1+x) - 1$
 $f'(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$
 $f''(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$
 $f'''(x) = e^x + \frac{1}{(1+x)^2}$
 $f'''(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立
 $f'(0) = 0$
 $f''(0) = 0$
 $f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立
 $f(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立
 即 $e^x - 1 > (1+x)\ln(1+x)$

本题分数	7分
得分	7

七、已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，

且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^x) - 3f(1+\sin x)}{x} = 2$ ，求 $f(1)$ 和 $f'(1)$.

$\lim_{x \rightarrow 0} [f(e^x) - 3f(1+\sin x)] = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(e^x) - 3 \lim_{x \rightarrow 0} f(1+\sin x) = 0$
 $f(\lim_{x \rightarrow 0} e^x) - 3f(\lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin x)) = 0$
 $f(1) - 3f(1) = 0$
 $f(1) = 0$

$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$
 $= -1$

本题分数	8分
得分	3

八、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，

且 $f(1) = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -1$ ，证明：

(1) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(2) 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -1$ $\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) < 0$
 $x_0 \in (0,1)$ $f(x_0) < 0$ $f(1) = 1 > 0$
 $\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个实根

(2) 设 $F(x) = f(x) \cdot f'(x)$
 $F'(x) = [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x)$
 $\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数 $\therefore f(x), f'(x)$ 均在 $[0,1]$ 上连续
 $\therefore F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导
 $F(0) = 0$ $F(1) = 0$
 $\therefore \exists \xi \in (0,1)$ 使 $F'(\xi) = 0$
 即 $f(\xi) \cdot f''(\xi) + [f'(\xi)]^2 = 0$