南京航空航天大学《高等数学Ⅱ（1）》

2017-2018 学年第一学期期末考试 B 卷

一、填空题(每小题 3 分，共 21 分)

1、设函数$y=\arctan(x+1)$,则$dy|_{x=0}=$________.

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}=$________.

3、函数$y=\dfrac{x}{1+x^2}$的单调递增区间是__________.

4、已知函数$f(x)$在$x=0$处连续,$F(x)=f(x)\sin x$,则$F'(0)=$__________.

5、若e^{-x}是$f(x)$的一个原函数,则$\int x^2 f(\ln x)dx=$__________.

6、$\int_{-1}^{1} x(|\sin x|+x)dx=$__________.

7、设函数$f(x)$是周期为2π的周期函数,它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}0, 0\le x<\pi\\ x, -\pi\le x<0\end{cases}$

$f(x)$的傅里叶级数的和函数为$S(x)$,$S(\pi)=$________.

二、选择题(每小题 3 分，共 6 分)

1、若$f(x)$在$[a,b]$上连续,x_0为(a,b)内任一固定点,则$\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^{x_0} f(t)dt\right)=($　　$)$

(A)$f(x_0)$;

(B)$f(x)$;

(C)0;

(D)$f(x_0)-f(a)$.

2、已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$在$x=3$处条件收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在$x=2$处(　　)

(A)绝对收敛;

(B)条件收敛;

(C)发散;

(D)不能确定.

三、计算题（每题 6 分，共 30 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}+\dfrac{1}{2n+3}+\dots+\dfrac{1}{2n+n}\right)$;

2、设$\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$,求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$;

3、求不定积分$\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$,其中$x>1$;

4、求不定积分$\int \frac{2x+5}{x^2-2x+3}dx$;

5、求定积分$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$;

6、求定积分$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

四、（本题满分 10 分）

过坐标原点做曲线$y=\ln x$的切线，该切线与曲线$y=\ln x$所围成的平面图形为D.求：

(1) 求D的面积；

(2)求D绕y轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

五、（本题满分 6 分）

设$f(x)=\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt$,求$\int_0^1 xf(x)dx$.

六、（本题满分 8 分）

判别下列级数的敛散性，如果收敛，进一步判断该级数是条件收敛还是绝对收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+3^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

七、（本题满分 8 分）

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 的收敛半径,收敛域以及和函数,并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 的和.

八、（本题满分 5 分）

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n \arcsin x\,dx.$

2017-2018 学年第一学期期末考试 B 卷参考答案

一、选择题(每小题 4 分，共 32 分)

1、【正解】 $\frac{1}{2}dx$

【学解】 $y'|_{x=0}=\left.\frac{1}{1+(x+1)^2}\right|_{x=0}=\frac{1}{2},\therefore dy|_{x=0}=\frac{1}{2}dx.$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 第二部分 2.4 复合函数求导法则

2、【正解】 $\frac{1}{3}$

【学解】 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t^2dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 第二部分 2.3 极限的计算

3、【正解】 $(-1,1)$

【学解】 $y'=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}>0\therefore x\in(-1,1)$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 第二部分 2.2 四则运算法则

4、【正解】 $f(0)$

【学解】 $F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)\sin x-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0).$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 第二部分 2.3 极限的计算

5、【正解】 $C-\frac{x^2}{2}$

【学解】 $f(x)=-e^{-x},\int x^2f(\ln x)dx=\int x^2(-e^{-\ln x})dx=\int(-x)dx=C-\frac{x^2}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 第一部分 1.1 原函数和不定积分

6、【正解】 $\frac{2}{3}$

【学解】 由奇偶性和对称性可知:原式 $=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}.$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 第一部分 1.3 定积分的特殊性质

7、【正解】 $\frac{-\pi}{2}$

【学解】根据迪利克雷收敛定理可知：$S(\pi)=\dfrac{-\pi+0}{2}=\dfrac{-\pi}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 第五部分 5.2 函数展开成傅里叶级数

二、选择题(每小题 3 分，共 6 分)

1、【正解】C

【学解】原式是个相对于x的常数，所以求导就是 0

【考点延伸】《考试宝典》专题五 【重要题型】 题型 6 积分上限函数

2、【正解】B

【学解】$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$在$x=3$处条件收敛，令$t=x-1$ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$在$t=2$处条件收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 第三部分 3.3 幂级数的运算

三、计算题（满分 36 分）

1、【学解】原式$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2+\frac{i}{n}}=\int_0^1\dfrac{1}{2+x}dx=\ln\dfrac{3}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 【重要题型】题型 2：n 项式子求和或求积的极限计算问题

2、【学解】

$$t=0,x=3,y=1,x_t'=6t+2=2,e^y y_t'\sin t+e^y\cos t-y_t'=0,y_t'=\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}=e$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{e}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 第三部分 3.2 隐函数求导

3.3 参数方程求导

3、【学解】

$$\text{原式}\ \underline{\underline{\text{令}x=\sec t}}\ \int\frac{\sec t+1}{\sec^2 t\cdot\tan t}\sec t\tan t dt=\int(1+\cos t)dt$$

$$=t+\sin t+C=C+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\arccos\frac{1}{x}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 第二部分 2.2 第二类换元积分法

4、【学解】原式$=\displaystyle\int\frac{2x-2}{x^2-2x+3}dx+\int\frac{7}{(x-1)^2+(\sqrt{2})^2}d(x-1)$

$$=\ln|x^2-2x+3|+\frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 第二部分 2.1 第一类换元积分法

5、【学解】原式 $=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 d(e^{x^2})=\frac{1}{2}\int_0^1 u d(e^u)=\frac{1}{2}e^u(u-1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题四 第二部分 2.1 第一类换元积分法

第三部分 分部积分法

6、【学解】

$$令 u=\sqrt{1-x},原式=\int_0^1 \frac{2du}{u^2+1}=2\arctan u|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 第二部分 2.2 第二类换元积分法

四、(本题满分 10 分)

【学解】易求得切线方程为 $y=\frac{x}{e}$,

$$S=\int_0^1[e^y-ey]dy=\frac{e}{2}-1,V=\int_0^1\pi(e^y)^2dy-\frac{\pi e^2}{3}=\frac{\pi}{2}e^{2y}\Big|_0^1-\frac{\pi e^2}{3}=\frac{\pi e^2}{6}-\frac{\pi}{2}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 第四部分 几何应用

五、(本题满分 6 分)

【学解】

$$原式=\int_0^1 f(x)d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}2xe^{-x^4}dx$$

$$=\int_0^1-\frac{4x^3}{4}e^{-x^4}dx=\frac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(e^{-1}-1)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 第二部分 2.1 积分上限函数

六、(本题满分 8 分)

【学解】

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n+3^n}}=\frac{1}{3}<1$,根据根值审敛法可知:此级数收敛,又因是正项级数,所以绝对收敛.

(2) 易知 $1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}$ 关于 n 单调递减,且 $1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0(n\to\infty)$

根据莱布尼兹判别法可知:此级数收敛

但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 同发散,所以原级数是条件收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 第二部分 常数项级数的审敛法

七、（本题满分 8 分）

【学解】

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$，$x=-1$时，$\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛(莱布尼兹判别法可知)，$x=1$时，$\sum\dfrac{1}{n}$发散

所以收敛域为$[-1,1)$，易知$S(x)=-\ln(1-x)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 第三部分 3.3 幂级数的运算

八、（本题满分 5 分）

【学解】$0<\int_0^1 x^n\arcsin x\,dx\leqslant\int_0^1 x^n\arcsin 1\,dx=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{n+1}\to 0(n\to\infty)$，由夹挤准则可知:原式$=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 第一部分 1.2 定积分的基础性质