题号	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	五	六	七	[illegible]	[illegible]	十	总分
得分											

本题分数	24
得　分	

一、填空题（每空 3 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin(\sqrt{n^2+n}-n)=$______.

2. 若 $f(x)=\ln(\cos 2x)$ 和 $g(x)=ax^b$ 是$x\to 0$时的等价无穷小量，则常数 $a=$______，$b=$______.

3. 设函数$y=xe^x$，则高阶导数 $y^{(2019)}=$______.

4. 求 $\begin{cases} x=1+e^{t^2} \\ y=\ln(1+2t^2) \end{cases}$ 在$t=0$处的导数值$\dfrac{dy}{dx}|_{t=0}=$______.

5. 设函数 $y=\arctan(e^x)$，则微分$dy|_{x=0}=$______.

6. 函数 $f(x)=xe^{-x}$的拐点是______.

7. 设函数 $y=x\ln(1+x)$，则相应的二阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式为______.

本题分数	6
得　分	

二、选择题（每空 3 分）

1. 以下命题正确的个数是(　　):

1) 若$\{a_n\}$是发散数列，则$\{|a_n|\}$必发散;

2) 若$f(x)$和$g(x)$是无穷大量，则$f(x)+g(x)$必无界;

3) $f(x)$是在(a,b)连续，且$f(a^+)=f(b^-)=0$，则$f(x)$至少有一个最值位于(a,b)内;

4) 若可导函数$f(x)$为周期为T的周期函数，则$f'(x)$也必是周期为T的周期函数.

（A）1；（B）2；（C）3；（D）4.

2. 设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|x|)$，则$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处可导的（ ）

（A）充分必要条件；（B）充分非必要条件；

（C）必要非充分条件；（D）既非充分又非必要条件.

本题分数	30
得　分	

三、计算题（每空6分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right]$.

2、$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\ln(1+2x)(1-\cos\sqrt{x})^2}$.

3、$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

4、设函数$y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+2\ln(x+\sqrt{x^2+4})$，求该函数在$x=0$处的切线方程和法线方程.

5、设$y=f(x)$是由方程$e^y+xy+x^2=e$确定的隐函数，求$y'(0),y''(0)$.

本题分数	8
得　分	

四、设$x_1=2,x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right),n=1,2\cdots$，

(1) 证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在；(2) 求该极限值$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分数	8
分	

五、设$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{x}{x-1}}, & x\ge 0 \\ (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}, & x<0 \end{cases}$，

试分析函数$f(x)$的间断点，并判断间断点的类型.

数	8
分	

六、证明：当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$.

七、设$f(x)$在$[0,2]$可导，且$f(0)\cdot f(2)>0$，$f(0)\cdot f(1)<0$. 证明:存在$\xi\in(0,2)$，有$f'(\xi)=f(\xi)$.

八、设$f(x)$在$x=0$的某个邻域内任意阶可导，且
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$，试求：(1) $f(0),f'(0),f''(0)$;
(2) 极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right)$.

二O一九 … 学期

课程 《…》参考答案及评分…

命题教师：　　　　试卷类型：　　　　试卷…

一. 填空题（每题3分，共24分）：

1) $\frac{\pi}{6}$;　　　2) $a=-2, b=2$;　　　3) $e^x(x+2019)$;

4) 2;　　　5) $\frac{1}{2}dx$;　　　6) $(2, \frac{2}{e^2})$;

7) $y=x^2-\frac{1}{3!}\left[\frac{1}{(1+\xi)^2}+\frac{2}{(1+\xi)^3}\right]x^3 \quad (\xi\in(0,x))$. $= x^2 - \frac{1}{3!}\frac{3+\xi}{(1+\xi)^3}$

二. 选择题（每题3分，共6分）：

1，B;　2, A

三. 计算题（每题6分，共30分）：

1, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+1)^2}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}$; ----------

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+1)^2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{(n+1)^2}\to\frac{1}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}\to\frac{1}{2};$$ ----------

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right]=\frac{1}{2}.$$ ----------

2, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\ln(1+2x)(1-\cos\sqrt{x})^2}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-\sin x}{(2x)(\frac{x}{2})^2}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$ ----------

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x(1-\cos x)}{(2x)(\frac{x}{2})^2}$$ ----------

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{x\frac{x^2}{2}}{(2x)(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}$$ ----------

3、取对数 $\lim\limits_{x\to1}\tan\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}}$$ ----------

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$ ----------------

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$$ ----------------

4. $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4} + \frac{x}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + 2\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x+\sqrt{x^2+4}}$

$$= \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} + 2\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4}$$ ----------------

切点为$x=0, y=2\ln 2$ $y=2x+2\ln 2$

切线斜率$k_1 = y'(0) = 2$，切线方程为$2x-y+2\ln 2=0$ ----------------

法线斜率$k_2 = -1/2$，法线方程为$x+2y-4\ln 2=0$ ----------------

5. 首先可知$x=0, y(0)=1$， $y=-\frac{1}{2}x+2\ln 2$

求一次导数 $e^y y' + (y+xy') + 2x = 0$， ----------------

得到 $y'(0) = -e^{-1}$； ----------------

求二次导数 $(e^y y'' + e^y (y')^2) + (2y' + xy'') + 2 = 0$， ----------------

得到$y''(0) = e^{-2} - 2e^{-1}$. $= \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e} = \frac{1-2e}{e^2}$ ----------------

四. (1) 证明极限存在；

证明有界性

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \ge \sqrt{x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}$$ ----------------

证明单调递减

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_n} - 2x_n\right) = \frac{2-x_n^2}{2x_n} \le 0$$

单调递减有下界可知极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在。 ----------------

(2) 求解极限，

令$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

可知$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$，取正根，得到$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sqrt{2}$ ----------------

五. 可疑点$x=0,1$

(1) 对于$x=0$，有

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{x}{x-1}}\right) = 1;$$

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}} = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{\sin x}{x}} = e;$$

可知$f(0^+) \ne f(0^-)$，左右极限不相等，$x=0$为跳跃间断点----------------

(2) 对于$x=1$，有

$f(1^+) = \lim\limits_{x\to1^+}(e^{\frac{x}{x-1}}) = +\infty$;

$f(1^-) = \lim\limits_{x\to1^-}(e^{\frac{x}{x-1}}) = 0$;

可知$f(0^+)$为正无穷，右极限不存在， $x=1$为无穷间断点.

六. (1)令$f(x) = x - \sin x$，

则$f'(x) = 1 - \cos x > 0$，$f(x)$在$(0, \pi/2)$上单调递增，

故$f(x) = x - \sin x > f(0) = 0$，即 $x > \sin x$ 得证。

(2)令 $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$，

则$g'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$，

$g(x)$在$(0, \pi/2)$上单调递减，

故$g(x) = \dfrac{\sin x}{x} > g(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{2}{\pi}$，即 $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$ 得证。

七. 令$F(x) = e^{-x}f(x)$，则$F(x)$在$[0,2]$连续，在$(0,2)$可导.

由$f(0)\cdot f(1) < 0$可知，$F(0)\cdot F(1) < 0$;

由$f(0)\cdot f(2) > 0$可知，$f(0), f(2)$同号，则$F(1)\cdot F(2) < 0$，

由零点定理可知，

存在$x_1 \in (0,1)$，使得$F(x_1) = 0$;

存在$x_2 \in (1,2)$，使得$F(x_2) = 0$。

由罗尔定理可知存在$\xi \in (x_1, x_2) \subset (0,2)$，

使得$F'(\xi) = 0$，

即$e^{-\xi}[f'(\xi) - f(\xi)] = 0$，得证。

八. 方法一：给出$f(x), \sin(3x)$的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^3);$$

$$\sin(3x) = 3 - \frac{1}{3!}(3x)^3 + o(x^4);$$

(1) 极限可以写作

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(3x)}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(3x) + xf(x)}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{[f(0)+3]x + f'(0)x^2 + [\frac{1}{2!}f''(0) - \frac{3^3}{3!}]x^3 + o(x^3)}{x^3}\right) = 0,$$

可知以下关系：

扫描全能王 创建

$$\begin{cases} f(0)+3= & 0 \\ f'(0)= & 0 \\ \frac{1}{2!}f''(0)-\frac{3^3}{3!}= & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(0)= & -3 \\ f'(0)= & 0 \\ f''(0)= & 9 \end{cases}$$

（2）所求极限为

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+f(x)}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{[f(0)+3]+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^3)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2!}f''(0)=\frac{9}{2}$$

方法二：使用洛必达法则

（1）极限经过 3 次洛必达法则可以分别写作

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)+xf(x)}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\cos(3x)+f(x)+xf'(x)}{3x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-9\sin(3x)+2f'(x)+xf''(x)}{6x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-27\cos(3x)+3f''(x)+xf'''(x)}{6}\right)=0,$$

可知每次洛必达法则后,分式的分子极限皆为零

$$\lim_{x\to 0}(3\cos(3x)+f(x)+xf'(x))=3+f(0)+0f'(0)=0,$$

可得：$f(0)\ =\ -3$

经过第 2 次洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}(-9\sin(3x)+2f'(x)+xf''(x))=-0+2f'(0)+0f''(0)=0,$$

可得：$f'(0)\ =\ 0$

经过第 3 次次洛必达法则，有

可得：$\lim_{x\to 0}(-27\cos(3x)+3f''(x)+xf'''(x))=-27+3f''(0)+0f'''(0)=0,$

故，$f''(0)\ =\ 9$

（2）所求极限为

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+f(x)}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f''(x)}{2}\right)=\frac{1}{2}f''(0)=\frac{9}{2}$$