南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一九 ～ 二〇二〇 学年 第I学期 **《高等数学II》期中考试试题**

考试日期： 2019 年11 月20 日　　试卷类型：　　　　　试卷代号：

班号　　　　学号　　　　姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1. 设 $y = e^{\tan\frac{1}{x}} \cdot \sin\frac{1}{x}$，则$y' =$ ________________.

2. 设 $y = \sin^4 x - \cos^4 x$，则$y^{(n)} =$ ________________.

3. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2a}{x-a})^x = 8$, 则$a =$ __________.

4. 写出函数 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$带佩亚诺余项的麦克劳林公式：________________.

5. 函数 $y = \ln(x^2+1)$的拐点是 ________________.

6. 曲线 $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ 的渐近线方程为______________.

7. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x + y + 3e^{xy} = 0$ 确定，则 $y'(0) =$ __________.

二、填空题（每题 3 分，共 9 分）

1.

设函数$f(x)$在区间$(-\delta,+\delta)$内有定义，若当$x \in (-\delta,+\delta)$时，恒有$|f(x)| \le x^2$，

则 $x = 0$必定是$f(0)$的（　　　）.

(A)间断点　　　　(B)连续而不可导的点

(C)可导点，且 $f'(0) = 0$　　　　(D)可导点，且 $f'(0) \ne 0$

2.

曲线 $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$（　　　）.

(A)仅有水平渐近线　　　　(B)仅有铅直渐近线

(C)既有铅直又有水平渐近线　　　　(D)既有铅直又有斜渐近线

3.

设 $x\to 0$时，$e^{\tan x}-e^{x}$与x^{n}是同阶无穷小，则n为（　　　）

(A)1　　　　(B)2　　　　(C)3　　　　(D)4

三、求极限（每题 5 分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

2、$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

3、$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\tan x}$

四、（8 分）

已知函数$y=y(x)$由方程$e^{y}+6xy+x^{2}-1=0$确定，求$y''(0)$.

五、（10 分）

设$F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^{2}[f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)]\sin\frac{x}{t}$，其中$f(x)$二阶可导，求$F'(x)$.

六、（12 分）

求 $y=x^4-12x^3+48x^2-50$ 的凹凸区间和拐点

七、（12 分）

已知曲线的极坐标方程是$r=1-\cos\theta$,求该曲线上对应于$\theta=\frac{\pi}{6}$处的

切线和法线的直角坐标方程.

八、（13 分）

设 f(x)在 $[a,b]$上有三阶导数，且 $\mathrm{f(a)}=\mathrm{f(b)}=f'(a)=f'(b)=0$,证明在$(a,b)$

内至少有一点 ε，使$f'''(\varepsilon)=0$.

一、

1.

$$-\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}(\cos\frac{1}{x}+\tan\frac{1}{x}\cdot\sec\frac{1}{x})$$

$$y'=e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})+\sin\frac{1}{x}\cdot e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})$$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}(\cos\frac{1}{x}+\tan\frac{1}{x}\cdot\sec\frac{1}{x})$$

2.

$$2^n\sin(2x+\frac{n-1}{2}\pi)$$

$$y=\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=-\cos 2x$$

所以套用n阶导公式，$y^{(n)}=2^n\sin(2x+\dfrac{n-1}{2}\pi).$

3.

$.\ln 2$

左边$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3a}{x-a})^{\frac{x-a}{3a}\cdot 3a+a}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3a}{1-a})^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{3a}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3a}{1-a})^{a}=e^{3a}=8=$右边

得$a=\ln 2$

4.

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{2^n n!}+o(x^{2n})$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\therefore e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{2^n n!}+o(x^{2n})$$

5.

$(-1,\ln 2),(1,\ln 2)$

$y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$，$y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$，

令$y''=0$，得$x=\pm 1$,该函数没有二阶导数不存在的点.

点$x=1$和$x=-1$把$(-\infty,+\infty)$分成三部分，在$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$上$y''<0$，曲线是凸的

在$(-1,1)$上$y''>0$,曲线是凹的，当$x=\pm 1$时，$y=\ln 2$.

故$(-1,\ln 2)$和$(1,\ln 2)$是曲线的拐点.

6.y=1

7.

解答:由 $x+y+3e^{xy}=0$ 两端对 x 求导可得：$1+y'+3e^{xy}(y+xy')=0$

当 $x=0$ 时易得 $y=-3$.将 $x=0,y=-3$ 代入上式有：$1+y'(0)+3e^{0}(-3+0)=0$

解得 $y'(0)=8$.故应填 8

二、

1.

(C)

令$x=0$,由$|f(0)|\le 0$知$f(0)=0$，而$0\le|f(x)-f(0)|=|f(x)|\le x^2$

由夹逼准则$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-f(0)]=0$,即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,所以$f(x)$在$x=0$处连续.

再讨论左右导数.$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$,

由$|f(x)|\le x^2$得$-x^2\le f(x)\le x^2$,当$x>0$时,$-x\le\dfrac{f(x)}{x}\le x$,

根据$\lim\limits_{x\to 0+}(-x)=\lim\limits_{x\to 0+}x=0$及夹逼准则知$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

同理，当$x<0$时，$x\le\dfrac{f(x)}{x}\le -x$，则$f'_+(0)=0$，所以$f'(0)=0$.

2.

当$x\to\infty$时，极限$\lim\limits_{x\to\infty}y$均不存在，故不存在水平渐近线；又因为

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}=1,\lim\limits_{x\to\infty}(xe^{\frac{1}{x^2}}-x)=0$,故存在斜渐近线$y=x$.

此外，函数在$x=0$处无定义,$\lim\limits_{x\to 0}y=\infty$，故$x=0$为铅直渐近线，选择$(D)$

3.

.(C)

: $\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan x}-e^{x}}{x^{n}}=\frac{e^{x}(e^{\tan x-x}-1)}{x^{n}}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^{n}}$

$=$（洛）$\lim_{x\to0+}\frac{\sec^{2}x-1}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos^{2}x}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to0}\frac{\sin^{2}x}{x^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to0}\frac{x^{2}}{x^{n-1}}$

所以$n-1=2,n=3$

三、

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^{3}}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-(1-\cos x)}{x^{3}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^{2}}{x^{2}}=1/2$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{2}+x}-\sqrt{x^{2}-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^{2}+x}+\sqrt{x^{2}-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1$$

$$\lim_{x\to0^{+}}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\tan x}=e^{\lim\frac{\ln(\frac{1}{2x})}{\frac{1}{\tan x}}}=e^{\lim_{x\to0+}\frac{2x(-\frac{1}{2x^{2}})}{-\frac{1}{\sin x}}}=1$$

四、

方程两边对x求导：$e^{y}\cdot y'+6y+6xy'+2x=0$

$y'=-\frac{6y+2x}{e^{y}+6x}$，且$y'(0)=y'\big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$

求二阶导：$y''=-\frac{(6y'+2)(e^{y}+6x)-(6y+2x)(e^{y}\cdot y'+6)}{(e^{y}+6x)^{2}}$

把$x=0,y=0$，$y'(0)=0$代入得$y''(0)=-2$

五、

$$F(x)=\lim_{t\to\infty}t^{2}[f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)]\sin\frac{x}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)}{\frac{1}{t}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{1}{t}}$$

$$=\pi\cdot\lim_{\frac{\pi}{t}\to0}\frac{f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)}{\frac{\pi}{t}}\cdot x\cdot\lim_{\frac{x}{t}\to0}\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}=\pi xf'(x)$$

故$F'(x)=\pi[f'(x)+xf''(x)]$.

六、

$(-\infty,2)$，$(4,+\infty)$ 凹区间 （2，4）凸区间 （2，62），（4，206）拐点

七、

该曲线的参数方程为：$\begin{cases} x=(1-\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$，即$\begin{cases} x=\cos\theta-\cos^2\theta \\ y=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta \end{cases}$

由$\theta=\dfrac{\pi}{6}$得切点的坐标为（$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$-$\dfrac{3}{4}$,$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$).

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1$$

$\therefore$ 切线方程为$y-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}=x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{4}$，即$x-y-\dfrac{3}{4}\sqrt{3}+\dfrac{5}{4}=0,$

法线方程为$y-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}=-(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{4})$，即$x+y-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{4}=0.$

八、

$\because f(x)$ 在$[a,b]$上有三阶导数

$\therefore$ 在(a,b)上存在一点 ε_1 $(a<\varepsilon_1<b)$

使 $f(b)-f(a)=f'(\varepsilon_1)(b-a)$

$\because f(b)=f(a)=0 \quad b-a\neq 0$

$\therefore f'(\varepsilon_1)=0$

在(a,ε_1)上存在一点 ε_2 $(a<\varepsilon_2<\varepsilon_1)$

使 $f'(\varepsilon_1)-f'(a)=f''(\varepsilon_2)(\varepsilon_1-a)$

$\because f'(\varepsilon_1)=f'(a)=0 \quad \varepsilon_1-a\neq 0$

$\therefore f''(\varepsilon_2)=0$

同理可得在(ε_1,b)上一点 ε_3

$f''(\varepsilon_3)=0$

在$(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$上存在一点 ε $(\varepsilon_2<\varepsilon<\varepsilon_3)$

使 $f''(\varepsilon_3)-f''(\varepsilon_2)=f'''(\varepsilon)(\varepsilon_3-\varepsilon_2)$

$\because f''(\varepsilon_3)=f''(\varepsilon_2)=0 \quad \varepsilon_3-\varepsilon_2\neq 0$

$\therefore f'''(\varepsilon)=0$

$\therefore$ 在(a,b)上至少有一点 ε，使 $f'''(\varepsilon)=0$